КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика

- Раздел математики, занимающийся подсчётами количества различных комбинаций между объектами

Правило суммы

Пусть элемент α можно выбрать k способами, а элемент β – m способами.

Тогда, если любой способ выбрать α независим от любого способа выбора β, то выбор «α или β» можно сделать $k+m$ способами

Пример

У нового русского когда-то было три пентхауса, два трёхэтажных особняка и один пятиэтажный.

Каждый день он по желанию возвращался в одно из своих мест обитания.

Выбор из какого количества вариантов ему приходилось делать каждый день?

По правилу суммы количество комбинаций

$$3 + 2 + 1 = 6$$

Правило произведения

Пусть элемент α можно выбрать ***k*** способами, а элемент β можно выбрать ***m*** способами.

Тогда пару (α , β) можно выбрать ***k×m*** способами

Пример

У нового русского когда-то было семь крутых автомобилей и пять любовниц.

Сколькими способами он мог выбрать себе на свободный вечер пару «девушка и авто»?

По правилу произведения количество комбинаций

$$5 \times 7 = 35$$

Основные задачи комбинаторики

1. Сколькими способами можно переставлять элементы множества, чтобы получить различные кортежи длины ***n***?

Пример. Дизайнер интерьера расставляет семь крутых авто нового русского в гараже различными способами

Основные задачи комбинаторики

2. Сколькими способами из всего множества мощности n можно выбрать различные кортежи длины m ($m<n$)?

Пример. Новый русский выбирает из своих семи два автомобиля, один из которых подарит жене, а второй – самой красивой любовнице

Основные задачи комбинаторики

3. Скольким способами из всего множества мощности ***n*** можно выбрать различные подмножества длины ***m*** (***m<n***)?

Пример. Новый русский выбирает себе в эскорт на вечер двух из пяти своих любовниц

Перестановки

- Упорядоченные множества (кортежи), состоящие из ***n*** различных элементов

Число перестановок

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

По правилу произведения

Пример

Дизайнер интерьера каждый день расставлял семь крутых авто нового русского в гараже в новом порядке.

На сколько лет ему хватило бы ежеутренней бестолковой работы?

Число перестановок

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

$$5040 : 365 = 13,8$$

Перестановки

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

Рекуррентная формула

Рекурсия глубины 1

$$P_1 = 1! = 1$$

$$P_0 = 0! = 1$$

Размещения (без повторений)

- Упорядоченное подмножество (кортеж) из ***m*** элементов, составленное из элементов всего множества, содержащего ***n*** элементов

Число размещений

$$A^m_n = n!/(n-m)!$$

фр. *Arrangement* – размещение

Пример

Новый русский выбирает из своих семи два автомобиля, один из которых подарит жене, а второй – самой красивой любовнице

Сколько вариантов ему придётся перебрать?

Число размещений

$$A^2_7 = 7! / (7-2)! = 7! / 5! = 7 \cdot 6 = 42$$

Сочетания (без повторений)

- Неупорядоченное подмножество (выборка) из ***m*** элементов, составленное из элементов всего множества, содержащего ***n*** элементов

Число сочетаний

$$C^m_n = n!/((n-m)!m!)$$

фр. *Combinasion* – комбинация

Пример

Новый русский выбирает себе в эскорт на вечер двух из пяти своих любовниц.

Сколько вариантов ему надо перебрать?

Число сочетаний

$$C^2_5 = 5! / (2!\,(5-2)!) = 5! / (2!\,3!) =$$
$$= 5 \cdot 4 / 2 = 10$$

Число сочетаний

$$C^m_n = A^m_n / P_m$$

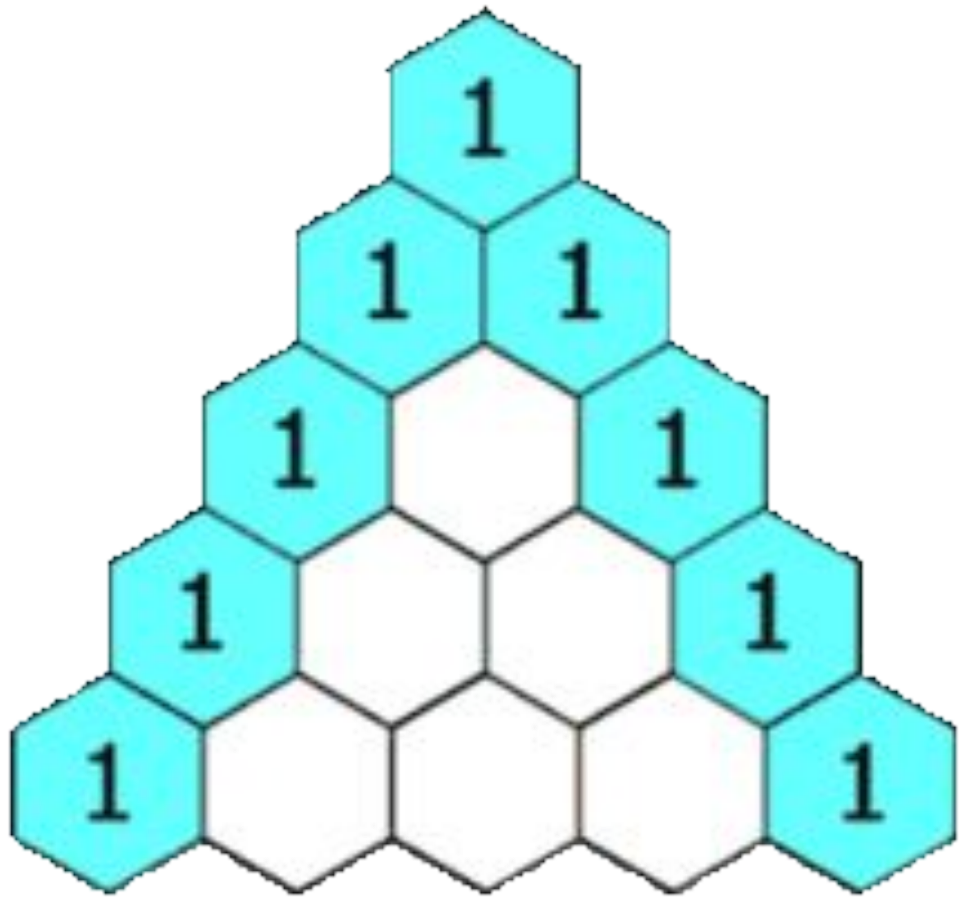
$$C^m_n = C^{n-m}_n$$

Важные частные случаи

$$C^0_n = C^n_n = 1$$

$$C^1_n = C^{n-1}_n = n$$

Треугольник Паскаля



Треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

n = 0,1,2…
Номер строки

m = 0,1,2…
Номер элемента в строке

Треугольник Паскаля

$C^2_6 = 15$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

n = 6 1 6 **15** 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

m = 2

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

Бином Ньютона

$n=2$ $(a+b)^2$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1
\end{array}
$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^{2-0}b^0 + 2a^{2-1}b^1 + 1 \cdot a^{2-2}b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Бином Ньютона

$n=3$ $(a + b)^3$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array}$$

$(a + b)^3 = 1 \cdot a^{3-0}b^0 + 3a^{3-1}b^1 + 3a^{3-2}b^2 + 1 \cdot a^{3-3}b^3$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$