

Основы теории переключательных функций

В алгебре логики рассматриваются переменные способные принимать только **два значения: 0 и 1.**

В алгебре логики определены **три операции:**

- а) операция **ИЛИ** – **дизъюнкция**, обозначается знаком – **+** (\vee);
- б) операция **И** – **конъюнкция**, обозначается знаком – **·** (\wedge);
- в) операция **НЕ** – **инверсия**, обозначается знаком – **–** (\neg);

Одно **отношение эквивалентности**, обозначается знаком – **=**, которое удовлетворяет свойствам:

- а) рефлексивности – $x = x$;
- б) симметричности – если $x = y$, то $y = x$;
- в) транзитивности – если $x = y$, а $y = z$, то $x = z$;

Из отношения эквивалентности следует **принцип подстановки:**

Если **$x = y$** , то в любой формуле, содержащей **x** , вместо **x** можно подставить **y** , и будет получена эквивалентная формула.

Алгебра логики определяется системой аксиом:

а) $x = 0$, если $x \neq 1$,
 $x = 1$, если $x \neq 0$.

б) $1 + 1 = 1$ – дизъюнкция,
 $0 \cdot 0 = 0$ – конъюнкция.

в) $0 + 0 = 0$ – дизъюнкция,
 $1 \cdot 1 = 1$ – конъюнкция.

г) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ – дизъюнкция,
 $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ – конъюнкция.

Не имеет аналога в обычной арифметике

Определяет операции
дизъюнкции и конъюнкции

д) $\bar{0} = 1$,
 $\bar{1} = 0$.

Определяет операцию отрицания

Принцип двойственности

Если в аксиомах б), в) г) заданных парами, произвести взаимную замену операций дизъюнкции и конъюнкции, а также элементов 0 и 1, то из одной аксиомы пары получается другая.

Основные теоремы (законы) алгебры логики

1. Закон повторения (тавтологии). (Идемпотентный закон).

$$\left. \begin{array}{l} x + x = x \\ x \cdot x = x \end{array} \right\}$$

2. Коммутативный закон. (Переместительный закон).

$$\left. \begin{array}{l} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{array} \right\}$$

3. Ассоциативный закон. (Сочетательный закон).

$$\left. \begin{array}{l} (x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z \end{array} \right\}$$

4. Дистрибутивный закон. (Распределительный закон).

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ x + y \cdot z = (x + y)(x + z) \end{array} \right\}$$

5. Закон обобщения

если $x = y$, то $\bar{x} = \bar{y}$

6. Закон нулевого множества

$$x \cdot 0 = 0; x + 0 = x$$

7. Закон универсального множества

$$x \cdot 1 = x; x + 1 = 1$$

8. Закон дополнительности

$$x \cdot \bar{x} = 0; x + \bar{x} = 1$$

9. Закон двойного отрицания

$$\overline{(\bar{x})} = \bar{\bar{x}} = x$$

10. Закон поглощения: $x + x \cdot y = x$; $x \cdot (x + y) = x$.

Законы отрицания

$$\left. \begin{array}{l} x + \bar{x} = 1 \\ x \cdot \bar{x} = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 0 + x = x \\ 1 \cdot x = x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 1 + x = 1 \\ 0 \cdot x = 0 \end{array} \right\}$$

11. Закон двойственности (инверсии). Теорема де Моргана.

$$\left. \begin{aligned} \overline{x + y} &= \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \overline{x \cdot y} &= \bar{x} + \bar{y} \end{aligned} \right\}$$

После инвертирования правых частей

$$\left. \begin{aligned} x + y &= \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} \\ x \cdot y &= \overline{\bar{x} + \bar{y}} \end{aligned} \right\}$$

12. Операция склеивания

$$\left. \begin{aligned} x \cdot y + x \cdot \bar{y} &= x \\ (x + y) \cdot (x + \bar{y}) &= x \end{aligned} \right\}$$

13. Операции обобщённого склеивания

$$\left. \begin{aligned} x + \bar{x} \cdot y &= x + y \\ x \cdot (\bar{x} + y) &= x \cdot y \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x \cdot y + \bar{x} \cdot z + y \cdot z &= x \cdot y + \bar{x} \cdot z \\ (x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (y + z) &= (x + y) \cdot (\bar{x} + z) \end{aligned} \right\}$$

14. Закон разложения

$$F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = x_1 \cdot F(x_n, x_{n-1}, \dots, 1) + \bar{x}_1 \cdot F(x_n, x_{n-1}, \dots, 0)$$

$$F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = [x_1 + F(x_n, x_{n-1}, \dots, 1)] \cdot [\bar{x}_1 + F(x_n, x_{n-1}, \dots, 0)]$$

Логическая неоднозначность

ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ – операция «сумма по модулю 2»

$$x \oplus y = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} = (\bar{x} + y) \cdot (x + \bar{y})$$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ – коммутативно, дистрибутивно и ассоциативно относительно операции конъюнкции.

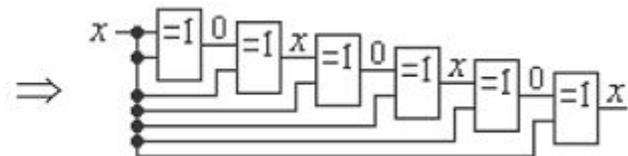
$$x \oplus y = y \oplus x; x \cdot (y \oplus z) = xy \oplus xz; x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

Справедливы тождества:

$$x \oplus 0 = x; x \oplus 1 = \bar{x}; x \oplus x = 0; x \oplus \bar{x} = 1$$

$$\overline{x \oplus y} = \bar{x} \cdot \bar{y} + x \cdot y = (\bar{x} + y) \cdot (x + \bar{y}) = \bar{x} \oplus y = x \oplus \bar{y}$$

$$x_n \oplus \dots \oplus x_2 \oplus x_1 = \sum_{p=1}^n x_p = \begin{cases} 0 & \text{при четном } n, \\ x & \text{при нечетном } n, \end{cases}$$



Переключательные функции

Любое логическое выражение, составленное из n переменных x_n, \dots, x_2, x_1 с помощью конечного числа операций алгебры логики, можно рассматривать как некоторую функцию n переменных.

В соответствии с законами алгебры логики такая функция может принимать только два значения 0 и 1.

Функция подчиняющаяся законам алгебры логики и принимающая одно из двух возможных значений называется **переключательной**.

Переключательные функции зависящие не от всех своих аргументов называются **вырожденными**.

Вырожденная переключательная функция $F(n) = 0$ называется **константой 0**, если во всех точках n_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}$) равна нулю и не зависит ни от одной переменной.

Вырожденная переключательная функция $F(n) = 1$ называется **константой 1**, если во всех точках n_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}$) равна единице и не зависит ни от одной переменной.

Невырожденные переключательные функции двух переменных x_1 и x_2 :

$$f(x_2, x_1) = x_2 + x_1 \quad - \text{ дизъюнкция (ИЛИ)}$$

$$f(x_2, x_1) = x_2 \cdot x_1 \quad - \text{ конъюнкция (И)}$$

$$f(x_2, x_1) = \overline{x_2 \cdot x_1} \quad - \text{ функция И-НЕ (штрих Шеффера } x_1 / x_2)$$

$$f(x_2, x_1) = \overline{x_2 + x_1} \quad - \text{ функция ИЛИ-НЕ (стрелка Пирса } x_1 \downarrow x_2)$$

$$f(x_2, x_1) = x_2 \oplus x_1 \quad - \text{ сумма по модулю 2}$$

Формы представления переключательных функций

Таблица истинности

i	x_2	x_1	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$\overline{x_1 \cdot x_2}$	$\overline{x_1 + x_2}$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1
2	1	0	1	0	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0	0

Аналитическое представление

Общие определения

Минтерм (*конституэнта единицы*) – образуется конъюнкцией конечного множества логических переменных и их отрицаний.

$$f(n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$$

Это переключательная функция принимает единичное значение при одном из всех возможных наборов аргументов и нулевое значение при всех остальных.

$$f(n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} = 1$$

Макстерм (*конституэнта нуля*) – образуется дизъюнкцией конечного множества логических переменных и их отрицаний.

$$f(n) = x_1 + \overline{x_2} + x_3$$

Это переключательная функция принимает нулевое значение при одном из всех возможных наборов аргументов и единичное значение при всех остальных.

$$f(n) = x_1 + \overline{x_2} + x_3 = 0$$

Ранг – число переменных (аргументов), составляющих элементарную конъюнкцию или дизъюнкцию

$$f(n) = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \quad \text{– минтерм четвертого ранга}$$

$$f(n) = \overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 \quad \text{– макстерм третьего ранга}$$

Для синтеза логических схем используются как элементарные логические функции, так и принципы суперпозиции логических функций представленных в **нормальной форме**.

Нормальные формы принято называть **каноническими**.

Представление переключательной функции в виде сумм (дизъюнкции) минтермов есть **совершенная дизъюнктивная нормальная форма** (СДНФ).

$$f(n) = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

Представление переключательной функции в виде произведений (конъюнкции) макстермов есть **совершенная конъюнктивная нормальная форма** (СКНФ).

$$f(n) = (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

Представление переключательной функции в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций называется **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ).

$$f(n) = \overline{x_1} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_3}$$

Представление переключательной функции в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций называется **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ).

$$f(n) = (\overline{x_1} + x_3) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_3})$$

Две элементарные конъюнкции (дизъюнкции) одного и того же ранга называются соседними тогда и только тогда, когда они являются функциями одних и тех же переменных и отличаются только знаком инверсии одной из переменных.

Так, например, конъюнкции

$$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \text{ и } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$$

являются соседними, так как они являются функциями одних и тех же переменных и отличаются знаком отрицания только одной переменной x_2 .

Правила упрощения логических выражений.

Это следующие правила:

- правило склеивания для соседних элементарных конъюнкций,
- правило склеивания для соседних элементарных дизъюнкций,
- правило поглощения для двух элементарных конъюнкций,
- правило поглощения для двух элементарных дизъюнкций.

Правило склеивания для соседних элементарных конъюнкций

Дизъюнкция двух соседних конъюнкций некоторого ранга p заменяется одной элементарной конъюнкцией ранга на единицу ниже ($p - 1$), являющейся общей частью сходных операндов дизъюнкции.

Данное правило является следствием распределительного закона 1-го рода.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3, \quad \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 = x_2.$$

Правило склеивания для соседних элементарных дизъюнкций

Конъюнкция двух соседних элементарных дизъюнкций некоторого ранга p заменяется одной элементарной дизъюнкцией ранга на единицу ниже ($p - 1$), являющейся общей частью исходных операндов конъюнкции.

Данное правило является следствием распределительного закона 2-го рода.

$$(x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4) = x_1 + x_2 + \bar{x}_3,$$

$$(\bar{x}_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2) = x_2.$$

Правило поглощения для элементарных конъюнкций

Логическая сумма двух элементарных конъюнкций разных рангов, из которых одна является собственной частью другой, заменяется конъюнкцией, имеющей меньший ранг.

Данное правило представляет собой следствие распределительного закона 1-го рода.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + \bar{x}_3 \cdot x_4 = \bar{x}_3 \cdot x_4; \quad \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 = \bar{x}_2.$$

Кроме этого, выполняются

равенства:

$$\text{а) } x_1 + \bar{x}_1 \cdot x_2 = x_1 + x_2; \quad \text{б) } \bar{x}_1 + x_1 \cdot x_2 = \bar{x}_1 + x_2.$$

Правило поглощения для элементарных дизъюнкций

Конъюнкция двух элементарных дизъюнкций разных рангов, из которых одна является собственной частью другой, заменяется дизъюнкцией, имеющей меньший ранг.

Данное правило является следствием распределительного закона 2-го рода и широко используется при упрощении логических выражений.

$$(x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (\bar{x}_3 + x_4) = \bar{x}_3 + x_4;$$

$$\bar{x}_2 \cdot (x_1 + \bar{x}_2) = \bar{x}_2.$$

Правило обобщенного

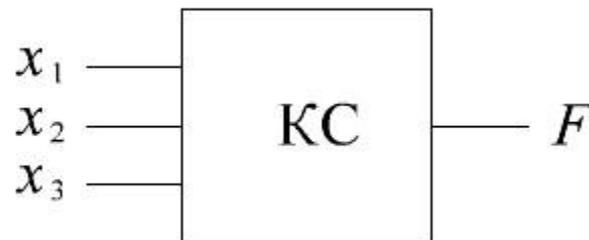
склеивания:

$$xz + y\bar{z} + xy = xz + y\bar{z}.$$

Пример. Переключательную функцию представленную в виде таблицы истинности записать в СДНФ, СКНФ, ДНФ, КНФ и составить принципиальные схемы

Таблица истинности

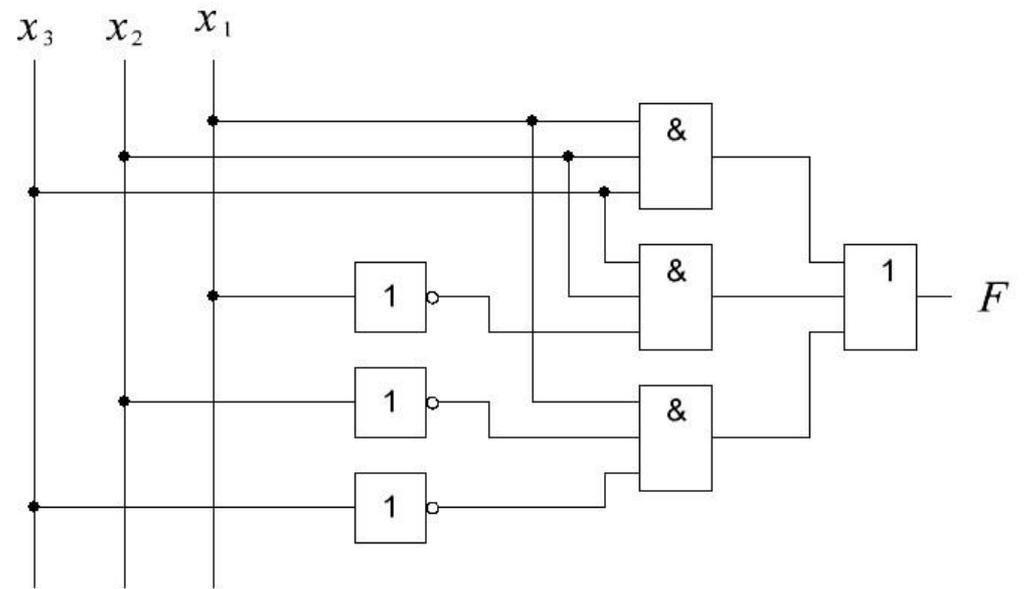
x_3	x_2	x_1	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\overline{x_3} \overline{x_2} x_1$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x_3 x_2 \overline{x_1}$
1	1	1	1	$x_3 x_2 x_1$



Структурная схема

СДНФ

$$f = \overline{x_3 x_2 x_1} + \overline{x_3 x_2 x_1} + x_3 x_2 x_1$$



ДНФ

$$f = \overline{x_3 x_2 x_1} + \overline{x_3 x_2 x_1} + x_3 x_2 x_1 = \overline{x_3 x_2 x_1} + x_3 x_2 (x_1 + x_1) = \overline{x_3 x_2 x_1} + x_3 x_2$$

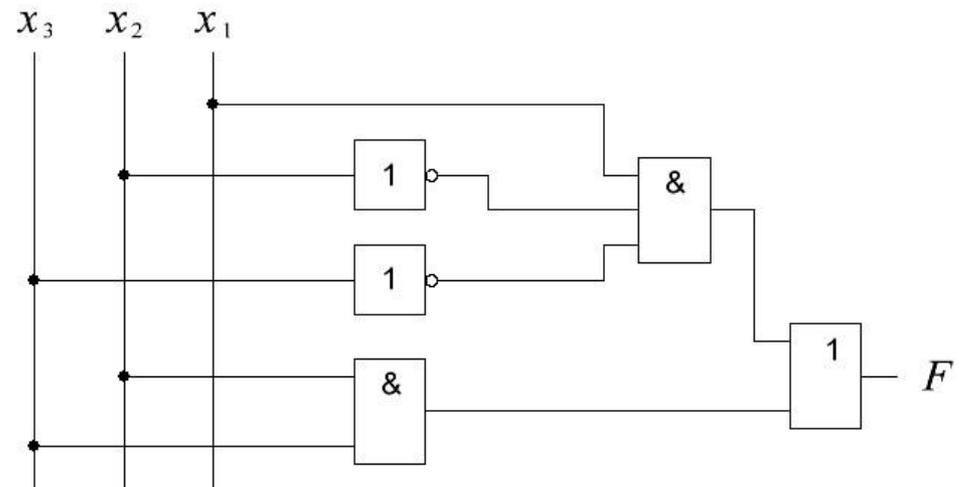


Таблица истинности

x_3	x_2	x_1	F	
0	0	0	0	$(x_3 + x_2 + x_1)$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$(x_3 + \overline{x_2} + x_1)$
0	1	1	0	$(\overline{x_3} + \overline{x_2} + \overline{x_1})$
1	0	0	0	$(\overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1})$
1	0	1	0	$(x_3 + x_2 + \overline{x_1})$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

СКНФ

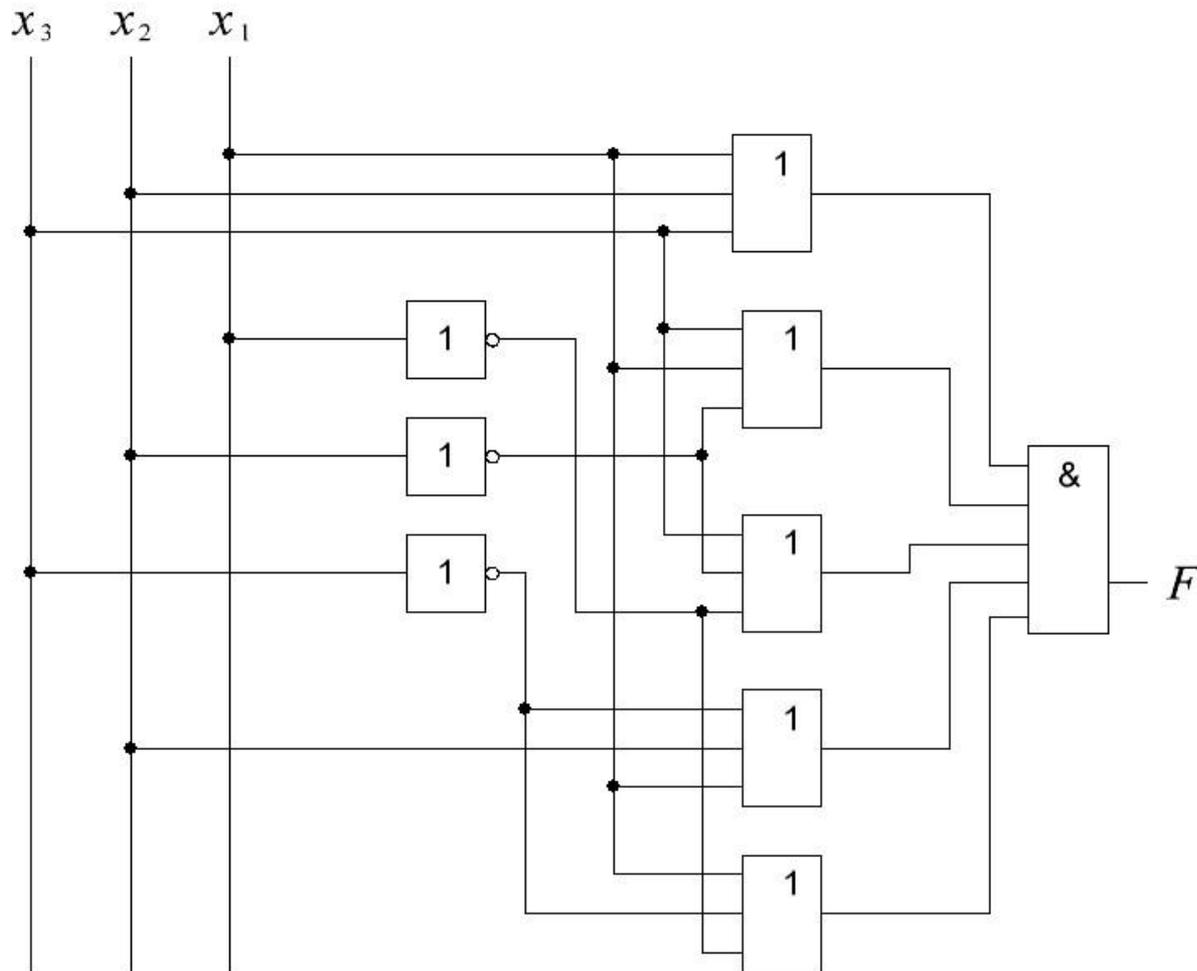
$$f = (x_3 + x_2 + x_1) \cdot (x_3 + \overline{x_2} + x_1) \cdot (x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_3} + x_2 + x_1)$$

СДНФ

$$f = \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} + \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} + \overline{x_3} x_2 x_1 + x_3 \overline{x_2} \overline{x_1} + x_3 \overline{x_2} x_1$$

СКНФ

$$f = (x_3 + x_2 + x_1) \cdot (x_3 + \overline{x_2} + x_1) \cdot (x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_3} + x_2 + x_1) \cdot (\overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1})$$



КНФ

$$f = (x_3 + x_1) \cdot (x_2 + \overline{x_2}) \cdot (x_3 + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_1}) \cdot (\overline{x_3} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_1}) =$$
$$= (x_3 + x_1) \cdot (x_3 + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_3} + x_2)$$

