

# Подготовка к ЕГЭ по математике

---

## Решение задания 13

МБОУ «СОШ № 143»

Г. Красноярск

Князькина Т. В.

# Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

*Арифметический*

*Геометрический*

*Алгебраический*

*Функционально-  
графический*

# Арифметический способ

перебор значений  
целочисленного параметра и  
вычисление корней.

Найдите все корни уравнения  $\sin 2x = \cos x$ , принадлежащие промежутку  $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

$$\sin 2x = \cos x;$$

$$\cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$1) \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Если  $n=0$ , то

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если  $n=1$ , то

$$x = \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если  $n=-1$ , то

$$x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если  $n=-2$ , то

$$x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$2) \sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если  $n=-1$ , то

$$x = -\frac{11\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = -\frac{7\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если  $n=0$ , то

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если  $n=1$ , то

$$x = \frac{13\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{17\pi}{6}, \frac{17\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ .

# Алгебраический способ

- а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;
- б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Решить уравнение :  $\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0$ .

$$\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 7x = 0, \\ \sin 5x - 1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 5x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \end{cases} \quad \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}; n, k \in Z;$$
$$\frac{1}{14} + \frac{n}{7} \neq \frac{1}{10} + \frac{2k}{5}; n, k \in Z;$$



Найдём все «неподходящие»  $n$ .

$$\frac{1}{14} + \frac{n}{7} = \frac{1}{10} + \frac{2k}{5}; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$5 + 10n = 7 + 28k; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$10n = 2 + 28k; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$5n = 1 + 14k; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$n = \frac{1 + 14k}{5}; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$n = 2k + \frac{4k + 1}{5}; n, k \in \mathbb{Z};$$



$$\frac{4k+1}{5} = a, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

$$k = \frac{5a-1}{4};$$

$$k = a + \frac{a-1}{4};$$

$$\frac{a-1}{4} = t; \quad a \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

$$a = 4t + 1;$$

$$n = 2k + \frac{4k+1}{5}; \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$k = 5t + 1;$$

$$n = 14t + 3$$

$$n = 14t + 3$$

$$n = 14t + 3$$

$$t \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$$

Все «неподходящие»  $n$

Итак,

$$\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \quad n \neq 14t + 3, t \in \mathbb{Z}.$$

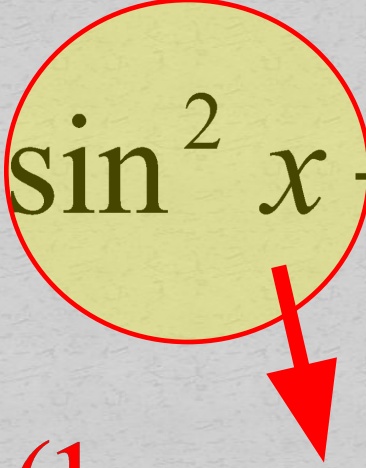
*Ответ:*  $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \quad n \neq 14t + 3, t \in \mathbb{Z}.$

**Решить уравнение**

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0.$$

**Укажите корни,  
принадлежащие отрезку  $[4\pi; 5\pi]$ .**

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0;$$


$$2 \cdot (1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0;$$

$$2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0;$$

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0;$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0:$$

$$\cos x = \frac{1}{2},$$

$$\cos x = 1;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{13\pi}{3}.$$

$$x = 4\pi.$$

$$3) x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4\pi < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 5\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$4\pi \leq 2\pi n \leq 5\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$4 \leq 2n \leq 5, n \in \mathbb{Z};$$

$$2 \leq n \leq \frac{5}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$4 + \frac{1}{3} \leq 2n \leq 5 + \frac{1}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ : } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{13\pi}{3}; 4\pi.$$

# Геометрический способ:

- а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим их отбором на заданном промежутке;
- б) изображение корней на координатной прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$$

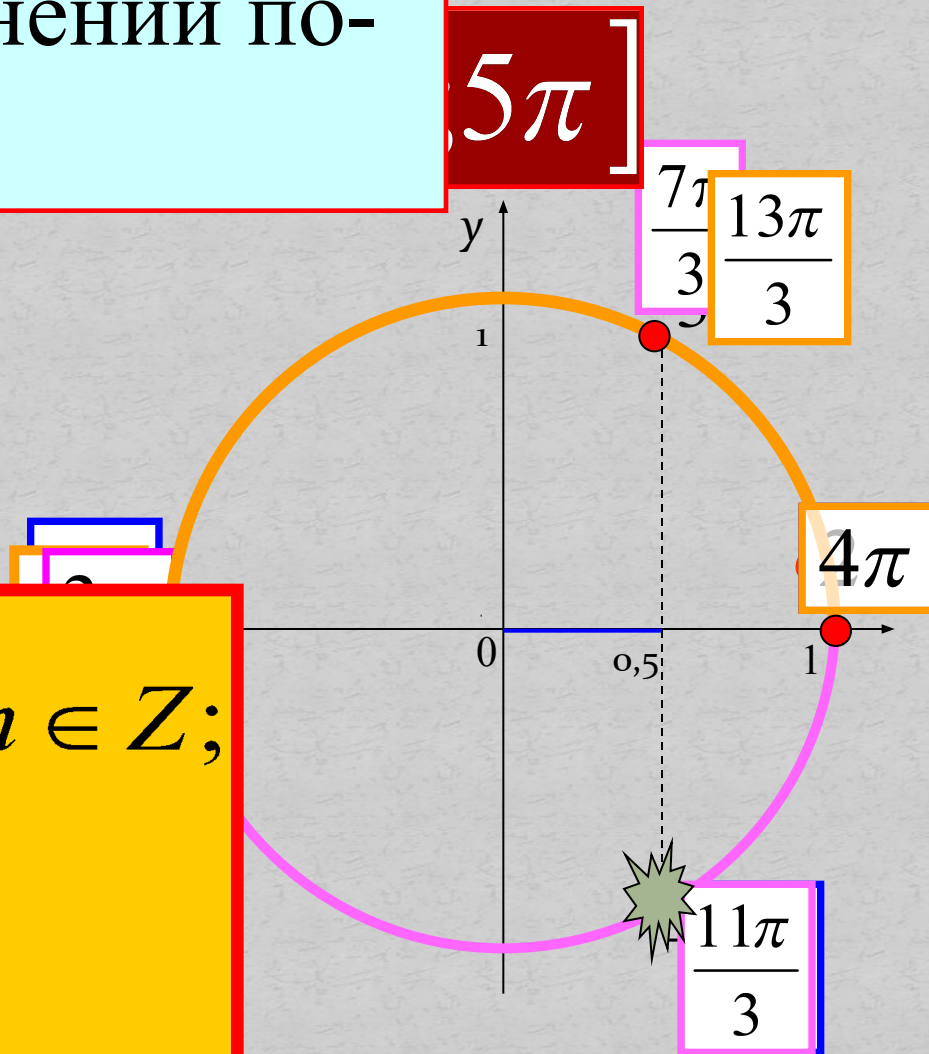
Выполним отбор корней в предыдущем уравнении по-другому!

$x =$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ : } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{13\pi}{3}; 4\pi.$$





Решить уравнение

$$2 \sin 2x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0.$$

Укажите корни,  
принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$ .

$$2 \sin 2x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0;$$

$$2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0;$$

$$4 \sin x \cdot \cos x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0;$$

$$\cos x \cdot (4 \sin x + 1) + (4 \sin x + 1) = 0;$$

*sin 2x = 2 sin x · cos x*

$$(4 \sin x + 1) \cdot (\cos x + 1) = 0;$$

$$\left[ \begin{array}{l} 4 \sin x + 1 = 0, \\ \cos x + 1 = 0, \end{array} \right.$$

*общий множитель*

$$\left[ \begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{4}, \\ \cos x = -1; \end{array} \right.$$

*общий множитель*

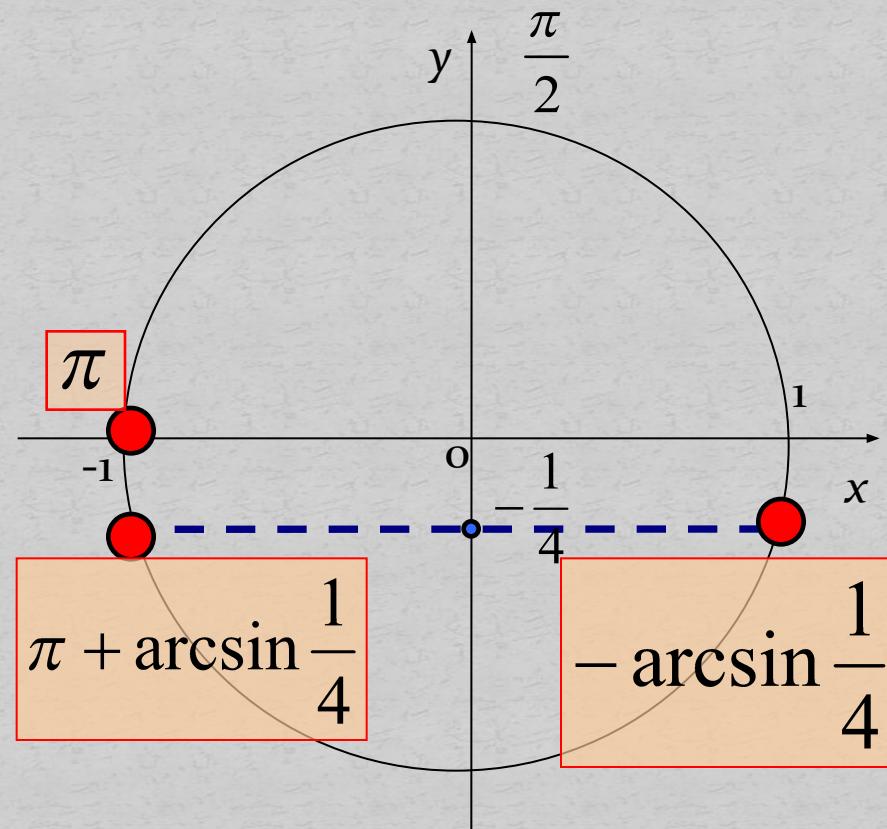
$$\sin x = -\frac{1}{4},$$

$$\cos x = -1;$$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n,$$

$$x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



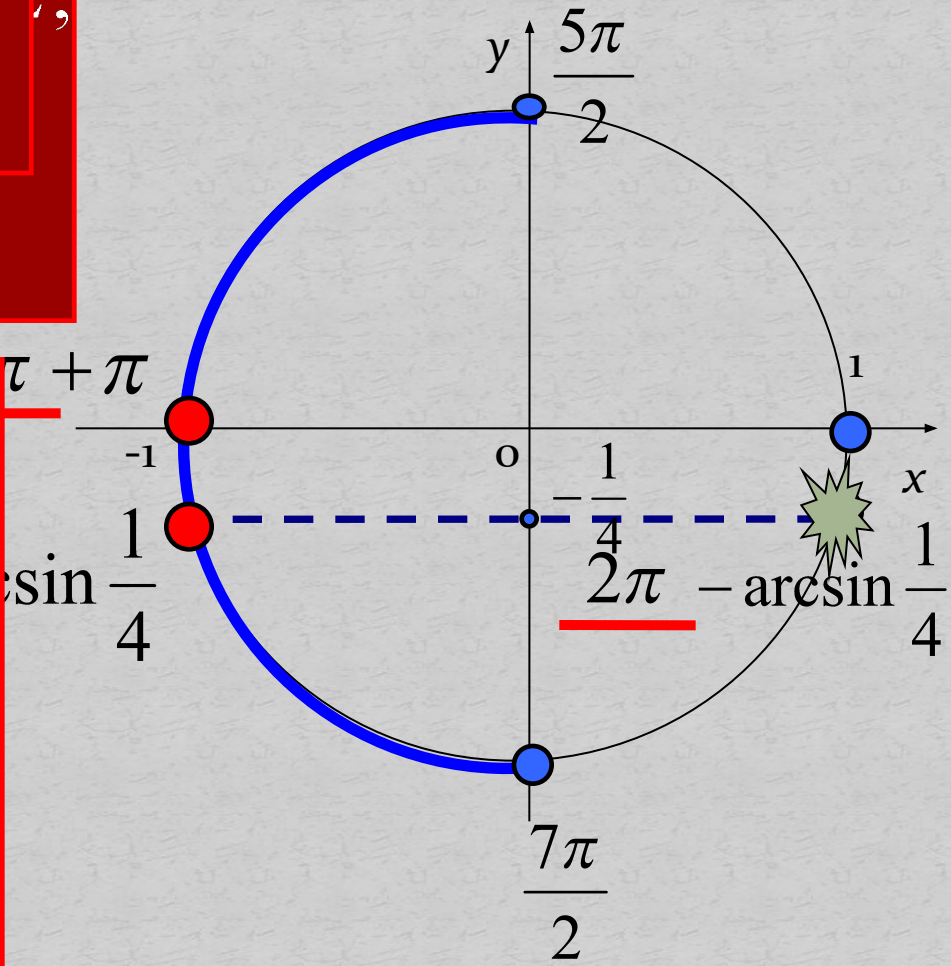
$$x = 3\pi + \arcsin \frac{1}{4},$$

$$x = 3\pi.$$

?

$$\left[ \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$$

Ответ :  $-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n,$   
 $\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$   
 $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$   
 $3\pi + \arcsin \frac{1}{4}; 3\pi.$



Решить уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Укажите корни,  
принадлежащие отрезку  $\left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$ .

$$2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2};$$

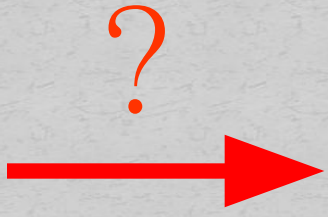
Разделим на  $\cos^2 x; \cos^2 x \neq 0.$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

0) *ное уравнение*

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\arctg\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$



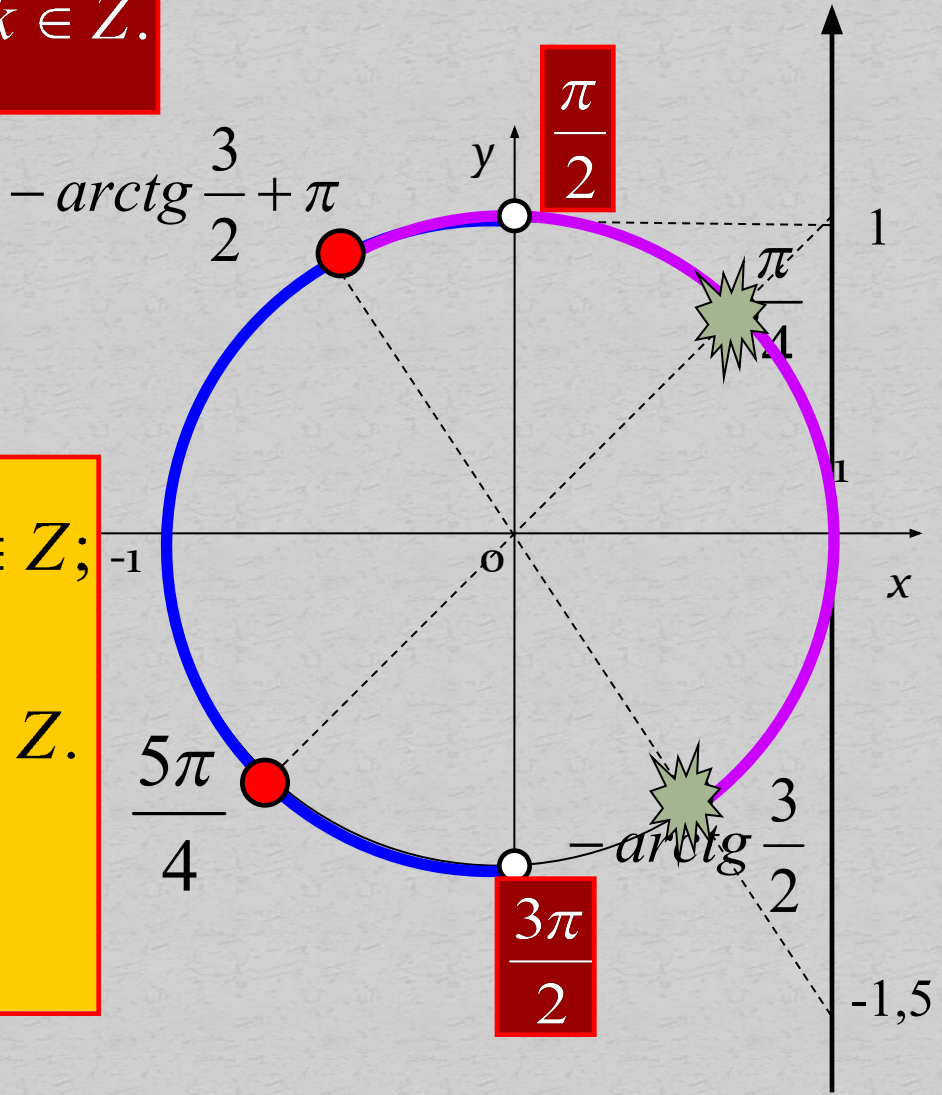
$$\left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

Ответ :

$$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$-\arctg\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{5\pi}{4}; \pi - \arctg\frac{3}{2}.$$





# Отбор корней на координатной прямой.

$$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}} = 0.$$

Решение :

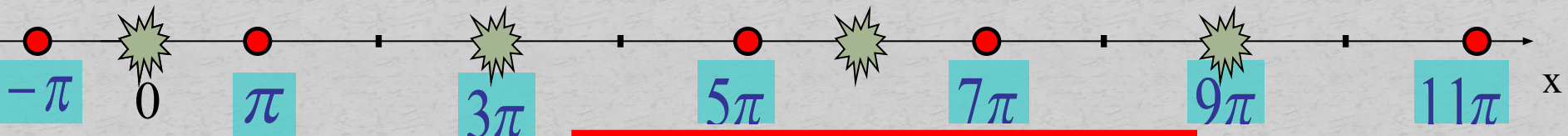
$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{3} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ x \neq 3\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

$$T\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 4\pi,$$

$$T\left(\sin \frac{x}{3}\right) = 6\pi.$$

Наим. общий период :

$$T_{\text{общ}} = 12\pi.$$



Ответ :

$$-\pi + 6\pi t, \pi + 6\pi t, t \in Z.$$

# Функционально-графический способ

*выбор корней с использованием графика простейшей тригонометрической функции.*

# Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x - \sqrt{2} \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

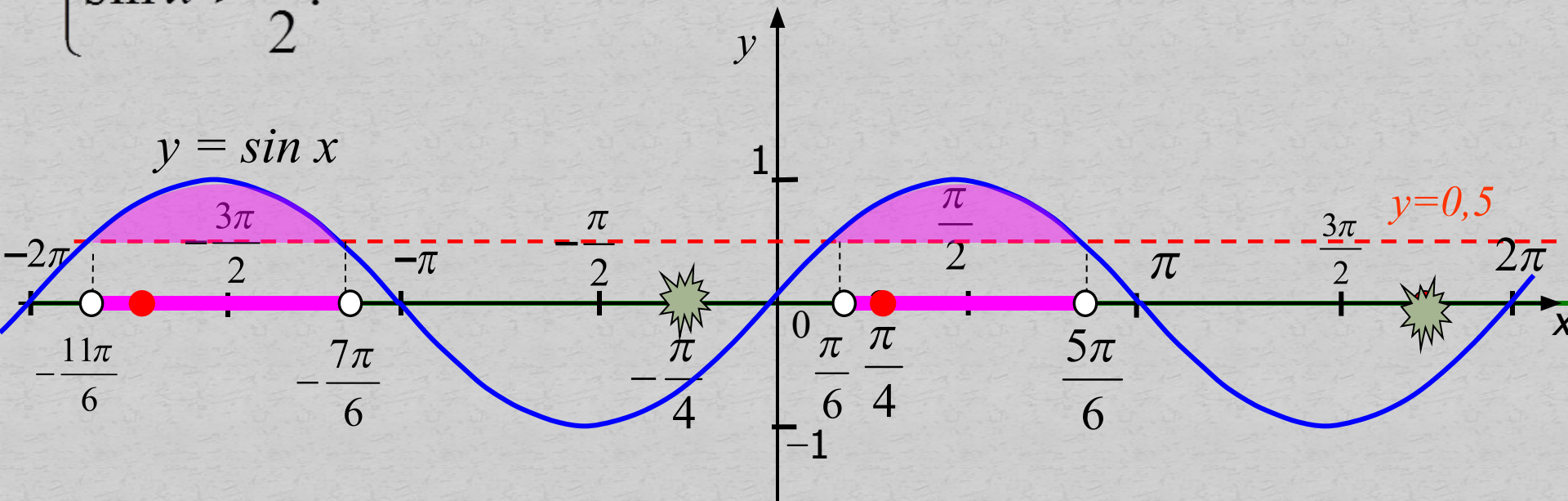
$$\frac{2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{2} \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

$$\frac{(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (2 \sin x - 1)}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \\ \sin x > \frac{1}{2}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Ответ:  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Дано уравнение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

Решение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$$

$$\sin 2x = \cos x$$

$$2\sin x \cos x = \cos x$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2\sin x - 1) = 0$$

Тогда  **$\cos x = 0$**  или  **$\sin x = 0,5$**

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

имеет решение при  $-1 \leq a \leq 1$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Таким образом:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

Итак, первый корень:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{2} &\leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq 4\pi \\ \frac{5\pi}{2} &\leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq 4\pi \quad \Big| -\frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} &\leq \pi k \leq 4\pi - \frac{\pi}{2} \\ 2\pi &\leq \pi k \leq 3,5\pi \quad \Big| \cdot \frac{1}{\pi} \\ 2 &\leq k \leq 3,5 \end{aligned}$$

Так число **k** целое, то **k<sub>1</sub> = 2** **k<sub>2</sub> = 3**

Находим корни, принадлежащие интервалу:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$$

Следующий корень:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi \quad | -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi k \leq 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{14\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{23\pi}{6} \quad | \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{23}{12}$$

$$1\frac{2}{12} \leq k \leq 1\frac{11}{12}$$

Для полученного неравенства целого числа **k** не существует.

Следующий корень:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:



$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi \quad \left| -\frac{5\pi}{6} \right.$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi k \leq 4\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{10\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{19\pi}{6} \quad \left| \cdot \frac{1}{2\pi} \right.$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{19}{12}$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq 1\frac{7}{12}$$

Так как число **k** целое, то **k = 1**.

Находим корень принадлежащий интервалу:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$$

Ответ:

$$\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$$

ресурсы:

- **<http://alexlarin.net/ege/2012/C12012.pdf>**
- **2. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов/ под ред. А.Л. Семёнова, И.В. Ященко.-М.: Национальное образование, 2011. (ЕГЭ -2012. ФИПИ – школе).**