

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ



ЛЕКЦИЯ 8

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Формальная классификация моделей

Формальная классификация моделей основывается на классификации используемых математических средств.

Детерминированные ↔ стохастические

Сосредоточенные ↔ распределённые системы

Дискретные ↔ непрерывные

Статические ↔ динамические

Линейные ↔ нелинейные модели

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

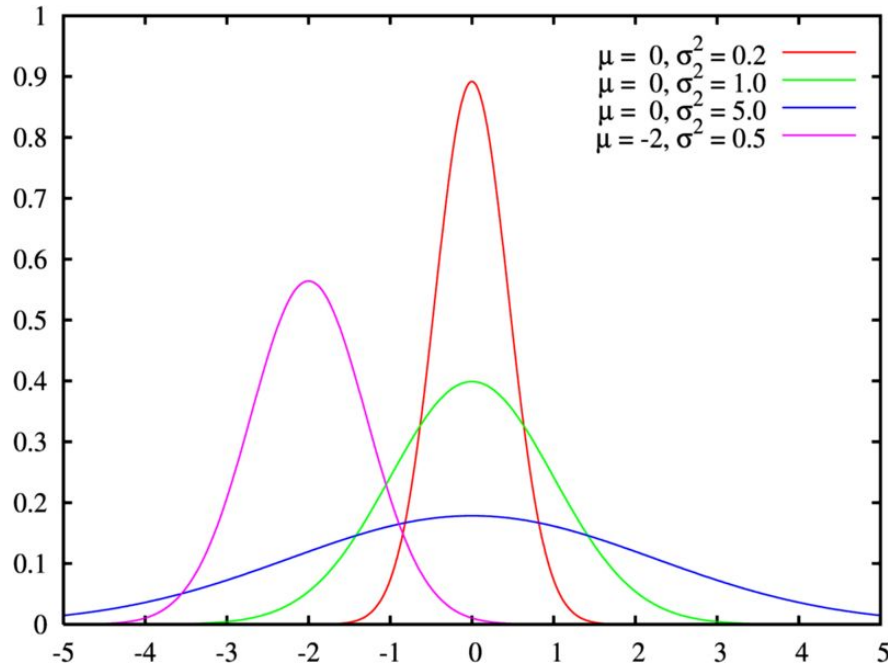


СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

□ При построении **параметрической модели** распределение случайных величин **аппроксимируется известным** вероятными законами распределения (чаще всего нормальным законом), которые описываются определёнными характеристиками - **параметрами, называемыми моментами**

✓ Пример: когда в справочнике указано, что у здорового человека в состоянии покоя объем вдыхаемого воздуха составляет 400-800 мл, это значит, что распределение величины объема моделируются равномерным законом.

□ Измеренный пульс – это Математическое ожидание распределения кардиоинтервалов



МОМЕНТЫ

μ - коэффициент сдвига (вещественное число)
 $\sigma > 0$ - коэффициент масштаба (вещественный, строго положительный)

Носитель

Плотность вероятности

Функция распределения

Математическое ожидание

Медиана

Мода

Дисперсия

Коэффициент асимметрии

Коэффициент эксцесса

Информационная энтропия

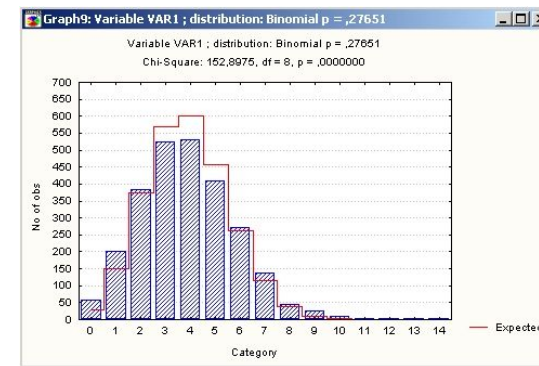
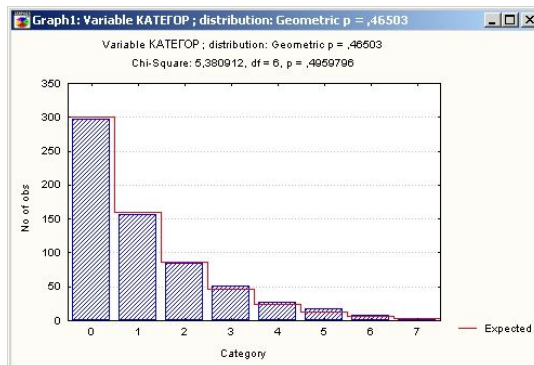
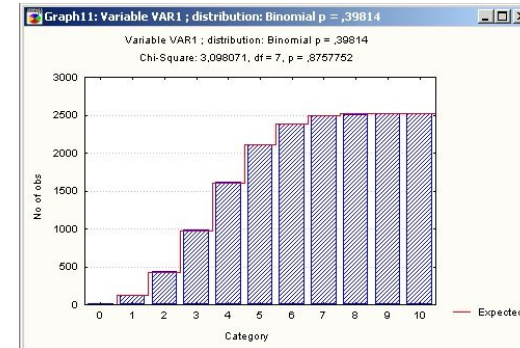
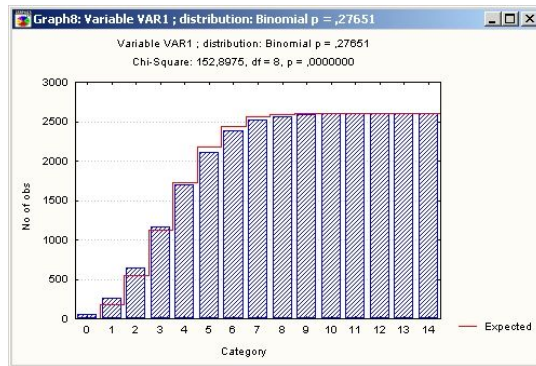
Производящая функция моментов

Характеристическая функция



СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

- Непараметрическими моделями называются те, у которых закон распределения случайных величин неизвестен

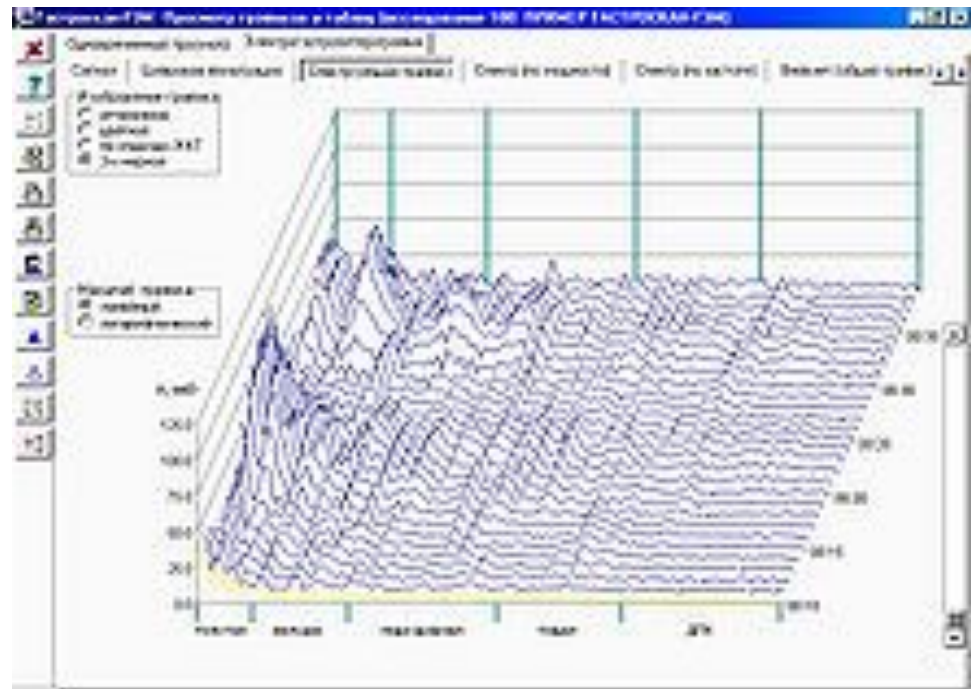


Пример: Результаты социологического опроса населения по поводу необходимости повышения цен на алкоголь

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Многомерные вероятностные модели

- Представляют собой многомерные описания состояния биотехнических систем и процессов в них протекающих, к признакам этих систем относят существенные параметры, характеризующие определенные единицы наблюдения.
- Двухмерное пространство признаков, образованное двумя переменными, содержит скопление точек на плоскости.



Пример: трёхмерной
электрогастроэнтерограммы
человека

(от лат. factor — действующий, производящий и греч. analysis — разложение, расчленение) — совокупность методов, которые на основе объективно существующих корреляционных взаимосвязей признаков (или объектов) позволяют выявлять латентные (или скрытые) обобщающие характеристики структуры изучаемых объектов и их свойств.

Что он даёт исследователю?

Когда количество контролируемых переменных на входе в систему велико и влияющих на них факторов очень велико, либо нет необходимости изучать воздействие каждого фактора в отдельности, можно воспользоваться **методами снижения размерности многомерных данных**. Эти методы позволяют выявить взаимосвязанные факторы и сформировать на их основе **объединенный показатель**, учитывающий эту взаимосвязь. В результате число анализируемых параметров снижается, а процедура анализа ускоряется и упрощается.

Основное предположение Ф. а. заключается в том, что корреляционные связи между большим числом наблюдаемых переменных определяются существованием меньшего числа гипотетических ненаблюдаемых переменных или факторов. В терминах случайных величин — результатов наблюдений $X_1, \dots, X_n$ общей моделью Ф. а. служит следующая линейная модель:

$$X_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} f_j + b_i U_i + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n$$

где случайные величины f_j суть общие факторы, случайные величины U_i суть факторы, специфические для величин X_i и не коррелированные с f_j , а ε_i — случайные ошибки.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Факторный анализ

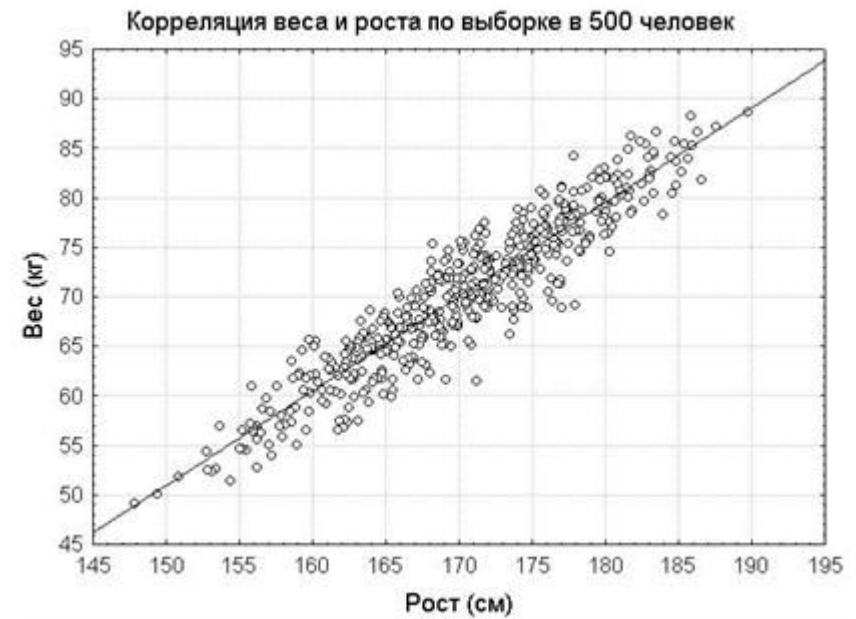
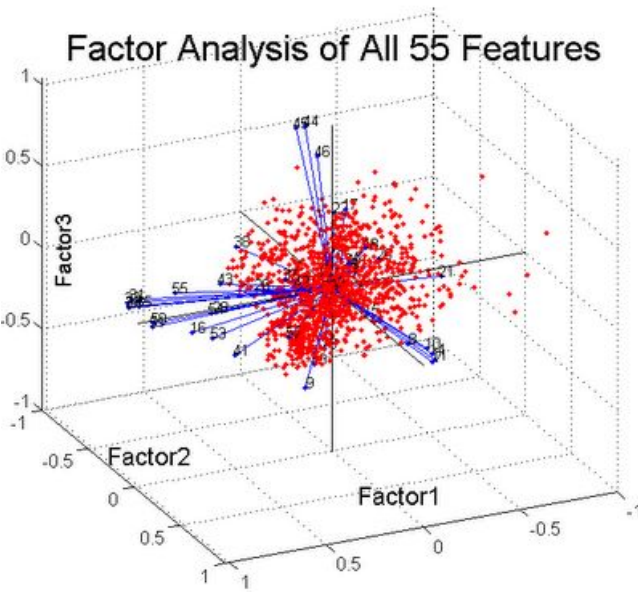
Многомерные вероятностные модели

2 цели Факторного анализа:

1. определение взаимосвязей между переменными, их классификация, т. е. «объективная R-классификация»[1][2];
2. сокращение числа переменных.

□ Трехмерное пространство, образованное тремя переменными содержит облака точек - наблюдений.

✓ Пример: геометрические размеры и биохимические характеристики клетки, интервалы между зубцами ЭКГ и т. д.



Ковариация $\text{cov}_{XY} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = M(XY) - M(X)M(Y)$

где M — математическое
ожидание.

**Линейный коэффициент корреляции ((или коэффициент корреляции
Пирсона))**

$$r_{XY} = \frac{\text{cov}_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}}.$$

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла Применяется для выявления
взаимосвязи между количественными или качественными показателями, если
их можно ранжировать.

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)}$$

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена, где каждому показателю X и Y
присваивается ранг. На основе полученных рангов рассчитываются их разности d
и вычисляется коэффициент корреляции по формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Дискриминантный анализ

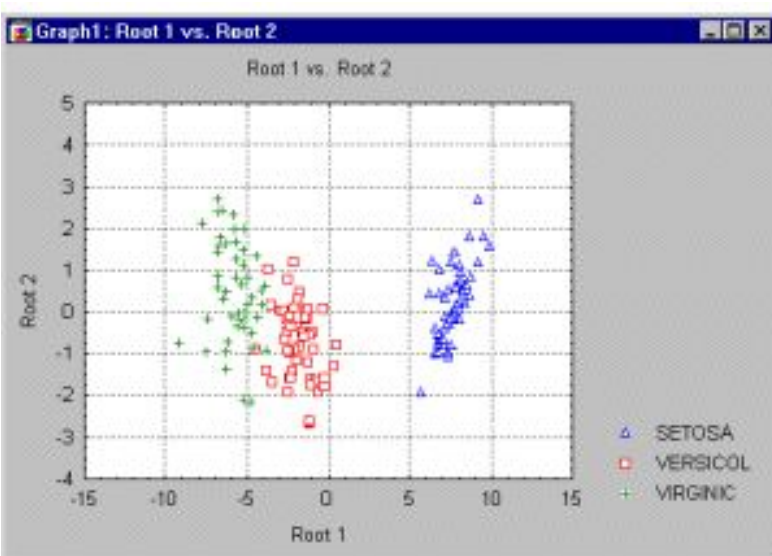
Многомерные вероятностные модели

раздел вычислительной математики, представляющий основное средство решения задач **Распознавания образов**, инструмент статистики.

Цель: принятия решения о том, какие переменные разделяют (т.е. «дискриминируют») возникающие наборы данных (так называемые «группы»)

Задачи .

1. Определение дискриминанты* функций (discriminant functions) или линейных комбинаций независимых переменных, которые наилучшим образом различают (дискриминируют) категории (группы) зависимой переменной.
2. Проверка существования между группами значимых различий с точки зрения независимых переменных.
3. Определение предикторов, вносящих наибольший вклад в межгрупповые различия,
4. Отнесение случаев к одной из групп (классификация), исходя из значений предикторов.
5. Оценка точности классификации данных на группы.



Канонической дискриминантной функцией называется линейная функция:

$$d_{km} = \beta_0 + \beta_1 * x_{1km} + \dots + \beta_p * x_{pkm}$$

d_{km} - значение канонической дискриминантной функции для m -го объекта в группе k ($m = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, g$);

x_{pkm} - значение дискриминантной переменной X_i для m -го объекта в группе k ;

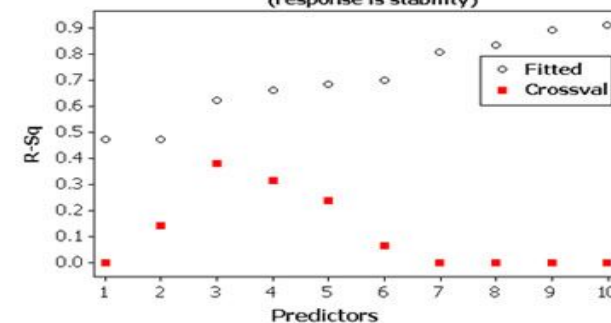
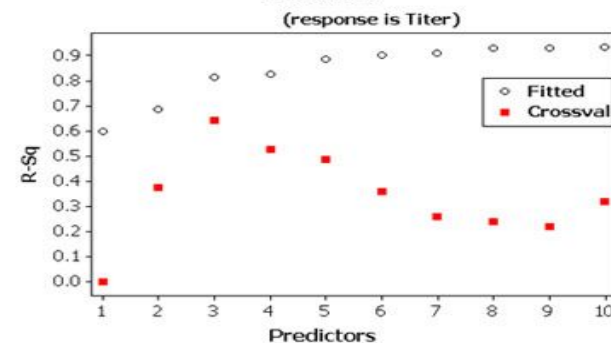
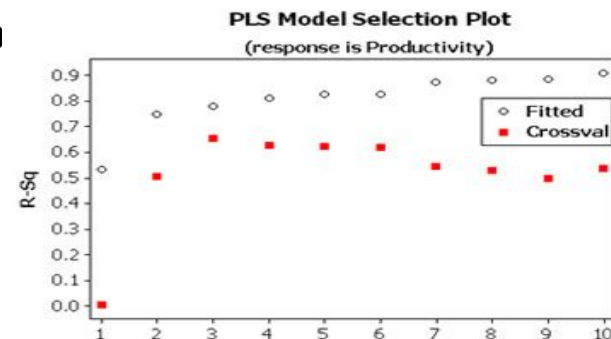
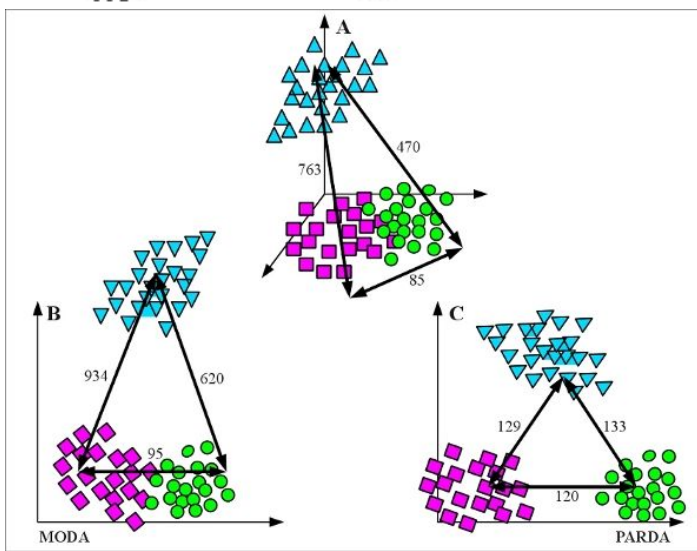
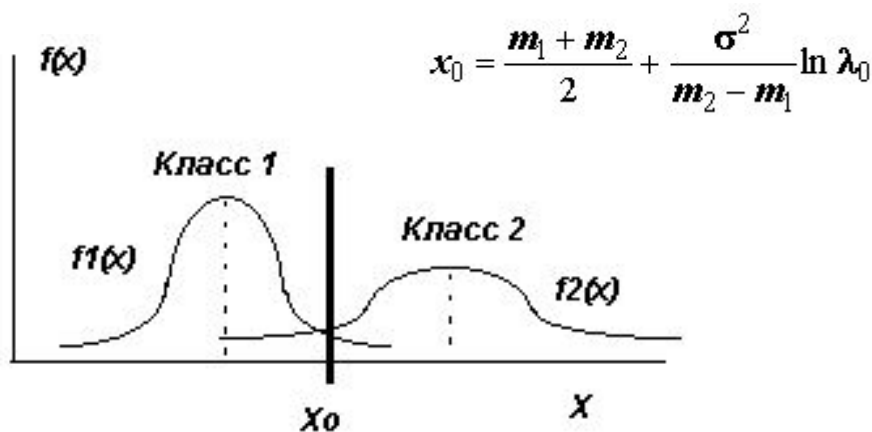
$\beta_0, \dots, \beta_p$ - коэффициенты дискриминантной функции.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Дискриминантный анализ

Многомерные вероятностные модели

Основная идея дискриминантного анализа заключается в том, чтобы определить, отличаются ли совокупности по среднему какой-либо переменной (или линейной комбинации переменных), и затем использовать эту переменную, чтобы предсказать для новых членов их принадлежность к то



СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Кластерный анализ

Многомерные вероятностные модели

- это совокупность методов, позволяющих классифицировать многомерные наблюдения, каждое из которых описывается набором признаков

Цель: образование групп схожих между собой объектов, которые называются **кластерами**

Задачи:

1. проведение классификации объектов с учетом признаков, отражающих сущность, природу объектов;
2. проверка выдвигаемых предположений о наличии некоторой структурной связи совокупности изучаемых объектов;
3. построение новых классификаций для слабоизученных объектов.

Пусть X — множество объектов, Y — множество номеров (имён, меток) кластеров. Задана функция расстояния между объектами $\rho(x, x')$. Имеется конечная обучающая выборка объектов $X^m = \{x_1 \dots x_m\} \subset X$. Требуется разбить выборку на непересекающиеся подмножества, (кластеры), так, чтобы каждый кластер состоял из объектов, близких по метрике ρ , а объекты разных кластеров существенно отличались. При этом каждому объекту $x_i \in X$ приписывается номер кластера y_i .



ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

Параметрическое представление — используемая в математическом анализе разновидность представления переменных, когда их зависимость выражается через дополнительную величину — **параметр**

Предположим, что функциональная зависимость y от x не задана непосредственно $y = f(x)$, а через промежуточную величину — t .

Тогда формулы $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ задают параметрическое представление функции одной переменной

Пример: уравнение спирали: $y = \psi(\theta(x)) = f(x)$

$$y(t) = t \cdot \cos(t) \quad x(t) = t \cdot \sin(t)$$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

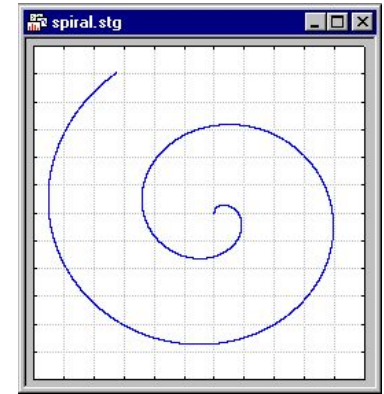
Уравнение тора:

$$\begin{cases} x(\varphi, \psi) = (R + r \cos \varphi) \cos \psi \\ y(\varphi, \psi) = (R + r \cos \varphi) \sin \psi \\ z(\varphi, \psi) = r \sin \varphi \end{cases} \quad \varphi, \psi \in [0, 2\pi)$$

Непараметрическое представление — используемая в математическом анализе разновидность представления переменных, когда их зависимость выражается прямой функциональной зависимостью

Уравнение тора:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$



ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

❑ а) С непрерывным пространством и временем представляют собой функциональные или аналитические зависимости. Эти модели чаще всего отображают процессы, а не состояния.

✓ Пример: в фармакологии при описании зависимости "доза-эффект" при описании физиологических процессов: обмена веществ, роста и развития и т. п.

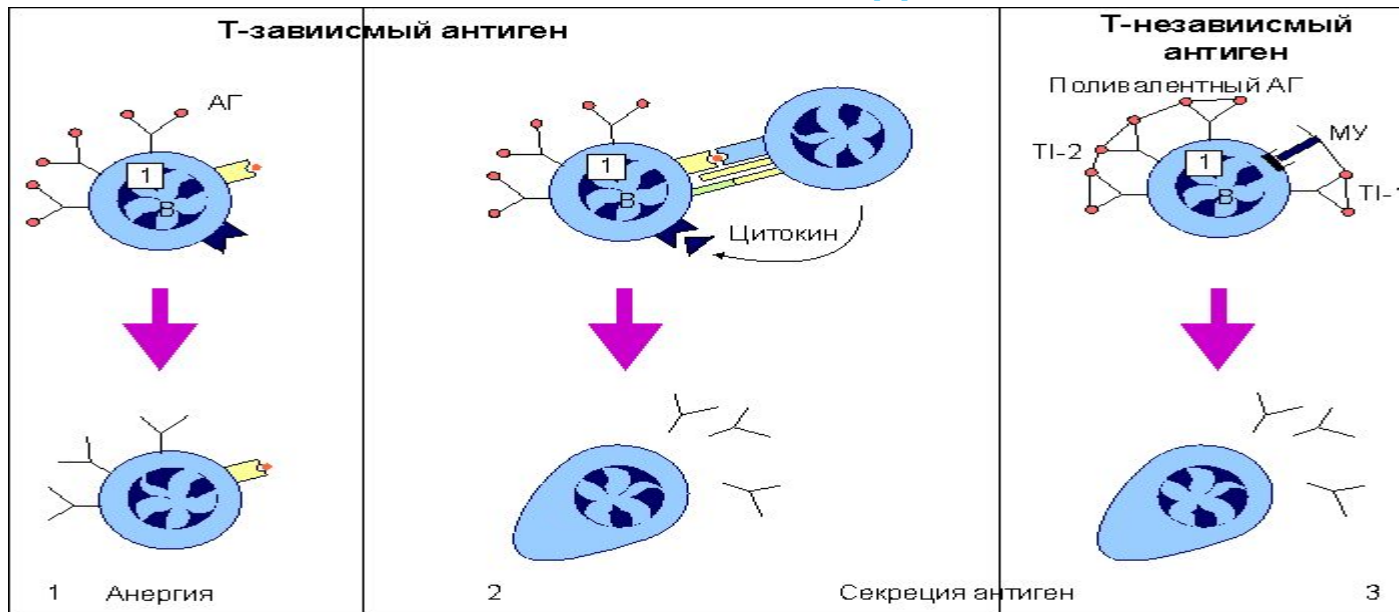
✓ Пример: индекс напряженности функциональных систем. Р. М. Баевского

$$ИН = \frac{AMo}{2Mo \times \Delta X}$$

❑ б) С дискретным пространством и временем (так называется логические). Используются при решении ряда комбинаторных задач

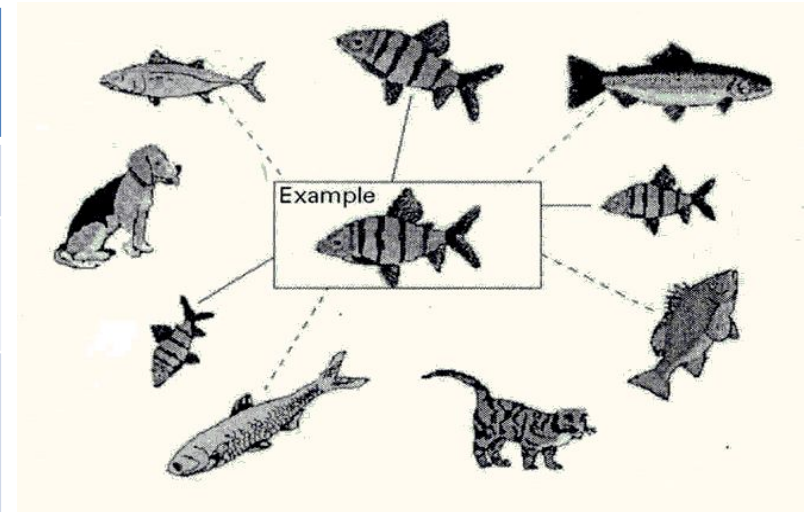
Вам надо решить задачу о наследственности. Вы, используя знания из области комбинаторики, можете просчитать различные варианты распределения хромосом, количество таких вариантов и другую нужную Вам информацию. Если, например, Вам необходимо сделать программу, которая в полуавтоматическом режиме, исходя из симптомов болезни, помогает выбрать подходящий способ лечения

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ



Пример: задача многомерного параметрического распознавания биологического вида:

Физ.пар-р	М.пар.	Знач
Длина к Ширина	$P=L/W$	2.42
Радиус жабер. контура без шир.глаза	$S=r-d$	20.5
Кол-во точек перегиба контура больше заданного	$\sum N(x)$ $\forall x < 30^\circ$	17



КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

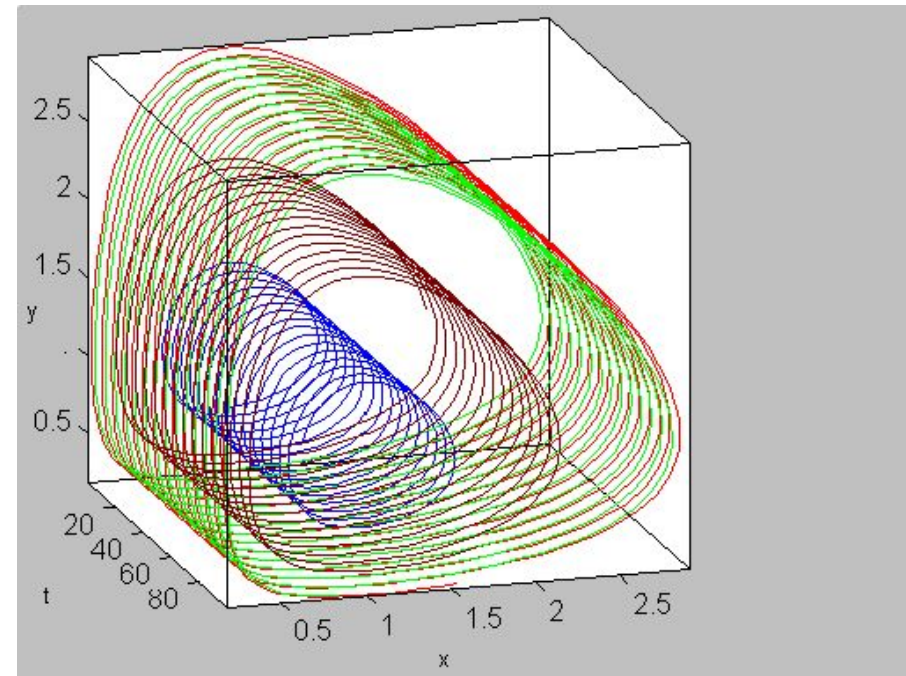
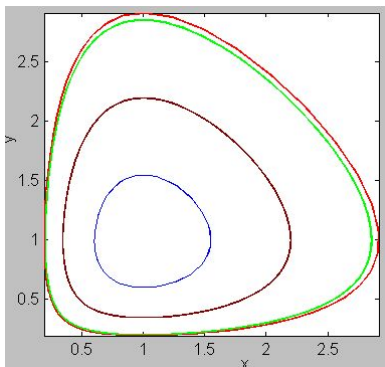
Линейная модель — математическая модель системы, оператор которой обладает свойством линейности

Свойства и характеристики линейных систем не зависят от их состояния.

Пример: модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа "хищник - жертва", называемую моделью Вольтерра - Лотки

$$dx/dt = a_1 x - b_1 yx$$

$$dy/dt = -a_2 y + b_2 yx$$



КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Нелинейная модель — это модель динамической системы, в которой протекают процессы, описываемые **нелинейными дифференциальными уравнениями**. Свойства и характеристики нелинейных систем зависят от их состояния.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x),$$

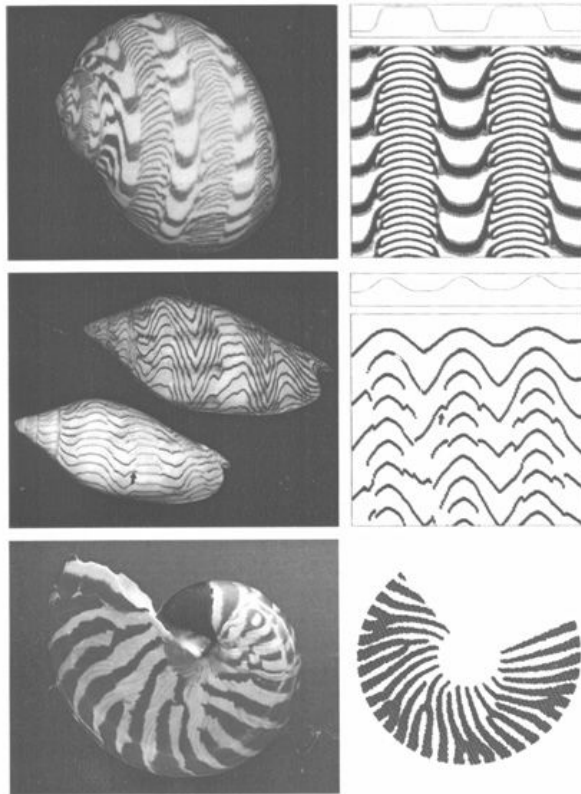


Рис. 36. Имитационные модели Х. Майнхардта (справа),

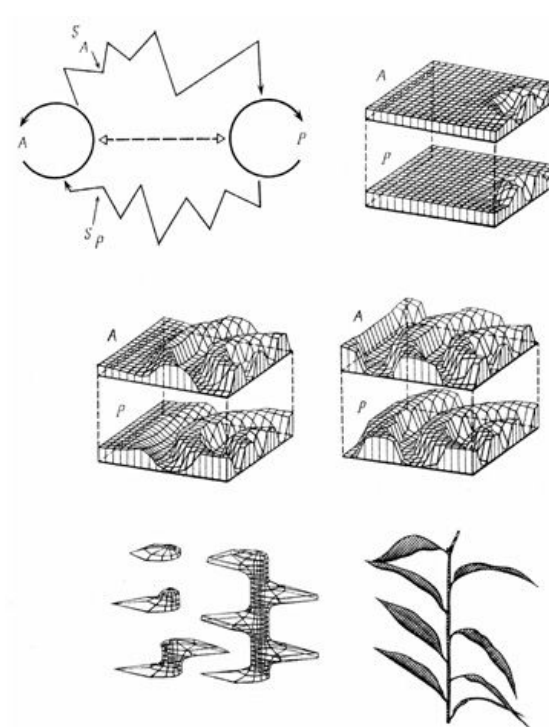


Рис. 35. Компьютерные модели Х. Майнхардта
(Meinhardt, 1984; по: Исаева, Преснов, 1990)

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

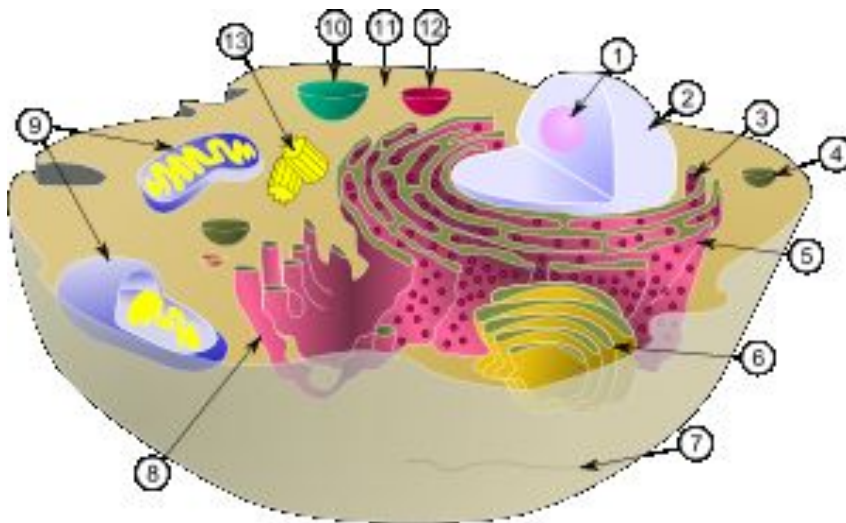
Классификация по способу представления объекта

Структурные и функциональные модели

Структурные модели представляют объект как систему со своим устройством и механизмом функционирования.

Функциональные модели не используют таких представлений и отражают только внешне воспринимаемое поведение (функционирование) объекта. В их предельном выражении они называются также моделями «чёрного ящика»

Возможны также комбинированные типы моделей, которые иногда называют моделями «серого ящика».



цитоплазма вместе с её компонентами (органеллами), в типичной животной клетке:

- (1) Ядрышко
- (2) Ядро
- (3) Рибосома (маленькие точки)
- (4) Везикула
- (5) Шероховатый эндоплазматический ретикулум (ER)
- (6) Аппарат Гольджи
- (7) Цитоскелет
- (8) Гладкий эндоплазматический ретикулум
- (9) Митохондрия
- (10) Вакуоль
- (11) Цитоплазма
- (12) Лизосома
- (13) Центриоль и Центросома

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Классификация по способу представления объекта

Содержательные и формальные модели

Гипотеза (такое могло бы быть) - пробное описание явления, причем автор либо верит в его возможность, либо считает даже его истинным

Пример: Происхождение человека от обезьяны.

Пример: Перцептрон МакКалока-Питса

Эвристическая модель (количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела) - сохраняет лишь качественное подобие реальности и даёт предсказания только «по порядку величины».

Пример: Формула Перепада давления на газообменной части каналов мембраны клетки

$$\Delta p = \xi \rho v^2 \frac{1}{2D_e}, \quad \xi = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$$