Лекція №3

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

План

1. Розв’язування систем m лінійних рівнянь з n невідомими.

Теорема Кронекера- Капеллі. Метод Гаусса.

2. Розв’язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими. Формули Крамера.

3. Розв’язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими за допомогою оберненої матриці.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Систему алгебраїчних рівнянь називають **лінійною**, якщо вона може бути записана у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **-** невідомі; a_{ij} - коефіцієнти системи; b_k - вільні члени.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- основна матриця С.Л.А.Р

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- стовпець невідомих;

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- стовпець вільних членів

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- розширена матриця С.Л.А.Р..

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розв'язком системи називають множину дійсних чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, підстановка яких у систему замість невідомих перетворює кожне рівняння у тотожність.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (**С. Л.А. Р.)** називають **сумісною**, якщо вона має хоч би один розв'язок. **Несумісною** у протилежному випадку.

системи лінійних рівнянь

сумісні	**несумісні**

Визначені мають єдиний розв'язок	**Невизначені** мають безліч розв'язків

не мають жодного розв'язку

Розв'язування систем *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

Переваги застосування метода Гаусса:

1) дозволяє дослідити систему на сумісність;

2) у випадку сумісності знайти ії розв'язки (єдиний або нескінченну кількість);

3) дослідження на сумісність і знаходження розв'язків, якщо вони існують, можна робити одночасно.

При дослідженні системи на сумісність використовують елементарні перетворення матриці та поняття ранга матриці

.

Елементарні перетворення матриці

(Е.П.) матриці називають перетворення слідуючого вигляду:

- відкидання нульового рядка (стовпця);
- множення всіх елементів рядка (стовпця) на ненульове число;
- перестановка рядків (стовпців);
- додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на довільне ненульове число;
- транспонування матриці.

Мінор матриці

Мінором k-го порядку матриці $A_{m\times n}$ називають визначник порядку k, який отримують викресленням будь-яких рядків і стовпців з матриці A.

Приклад 1

Обчислити всі мінори третього порядку і довільний мінор другого порядку матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок

$$\begin{vmatrix} 7 & 17 & 3 \\ 8 & 18 & 7 \\ 4 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 126 + 476 + 240 -$$

$$- 216 - 136 - 490 = 0.$$

Мінор матриці

Приклад 1 (продовження)

$$\begin{vmatrix} 1 & 17 & 3 \\ 4 & 18 & 7 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 18 + 120 - 68 - 70 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 4 & 8 & 18 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 80 + 272 - 280 - 72 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 48 - 28 - 28 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 28 = -20 \neq 0.$$

Ранг матриці

Рангом матриці А називають найвищий порядок її ненульового мінора.

Позначення: *rang*(A), *r*(A)

Властивості *rang*(A)

- $r(A) \le \min(m;n)$
- $r(A) = 0$, коли $A=0$
- $r(A)$ не змінюється при ***Е.П.***
- у матриці трапецієвидного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}; \text{ де } \quad a_{ii} \neq 0,\ i = 1,2,\dots,r$$

$$r(A) = r$$

Ранг матриці

внаслідок того, що

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \; a_{rr} \neq 0;$$

Приклад 2

Обчислити ранг матриці A за допомогою Е.П.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці

Розв’язок

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad r(A) = 2.$$

<u>Теорема Кронекера-Капеллі</u>

Система m лінійних рівнянь з n невідомими **сумісна** тоді і тільки тоді, коли $r(A) = r(\overline{A})$

Причому система

- сумісна визначена, якщо $r(A) = r(\overline{A}) = n$;
- сумісна невизначена, якщо $r(A) = r(\overline{A}) < n$.
- у випадку $r < n$ невідомі називають **базисними**, якщо минор, утворений з коефіцієнтів при них, не дорівнює нулю.
- усі інші невідомі називають **вільними**.

метод Гаусса

Суть метода Гаусса полягає в тому , що шляхом **елементарних перетворень** С.Л.А.Р. приводять до еквівалентної системи **трикутного** або **трапецієвидного** вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходять усі невідомі.

Перетворення Гаусса зручно проводити, здійснюючи перетворення не з самими рівняннями, а з матрицею їх коефіцієнтів яка є розширеною матрицею С.Л.А.Р.

метод Гаусса

Приклад 3

Дослідити систему рівнянь на сумісність і у випадку сумісності знайти розв’язки

а) $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 12x_2 + 3x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 12x_3 + 25x_4 = -4. \end{cases}$$

Розв’язок

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 12 & 3 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & -12 & 25 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & -9 & -2 & 13 & 2 \\ 0 & -9 & -18 & 33 & -10 \end{array}\right) \sim$$

<u>метод Гаусса</u>

Приклад 3 (продовження)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{0} & \underline{-16} \end{array}\right)$$

$r(\text{A}) = 3$ $r(\bar{\text{A}}) = 4$

$0 = -16$

Отже, початкова **система несумісна**.

б) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

метод Гаусса

Приклад 3 (продовження)

Розв'язок

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ -3 & 1 & 4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 7 & 13 & 46 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & -3 & -4 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array}\right)$$

$$r(\mathrm{A}) = r(\bar{\mathrm{A}}) = 3$$

Система сумісна визначена

$$11x_3 = 33$$

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = 16 - 5x_3 = 16 - 15 = 1$$

$$x_1 = 12 - 2x_2 - 3x_3 = 12 - 2 - 9 = 1$$

Відповідь: $\{1,1,3\}$

метод Гаусса

Приклад 3 (продовження)

в) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Розв'язок

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \end{array}\right) \sim$$

метод Гаусса

Приклад 3 (продовження)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$r(\mathrm{A}) = r(\overline{\mathrm{A}}) = 3$

Система сумісна і невизначена.

Вважаємо $x_4 = a$, тоді

$$x_3 = \frac{2}{3}a, x_2 = \frac{9-a}{15}, x_1 = \frac{2a+7}{5}$$

Відповідь: $x_1 = \frac{2a+7}{5}, x_2 = \frac{9-a}{15}, x_3 = \frac{2}{3}a, x_4 = a$

Системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

Якщо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2k} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

то $r(A) = r(\bar{A}) = n$

(кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих), згідно з теоремою Кронекера-Капеллі така система має єдиний розв’язок.

Знаходження єдиного розв’язку.

<u>Метод Крамера</u>.

Розв’язком С.Л.А.Р. за правилом Крамера буде сукупність значень невідомих обчислених за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} b_1 a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} b_2 a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} b_n a_{2,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = \overline{1,n}$$

Цей визначник отримано шляхом послідовної заміни *j*-го стовпця визначника Δ стовпцем чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Приклад 4

Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 \quad = 6. \end{cases}$$

Розв’язок

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

$\Delta \neq 0$, можемо застосувати правило Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Приклад 4 (продовження)

За формулами Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-6}{-3} = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 3.$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1$$

Відповідь: $\{2, 0, -1\}$

Знаходження єдиного розв’язку.

<u>Метод оберненої матриці</u>.

Якщо позначити $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1к} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2к} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

то С.Л.А. Р., згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць, можна записати у матричній формі

$$A \times X = B$$

Тоді $A^{-1} \cdot A \times X = A^{-1} \cdot B \quad (A^{-1} \cdot A = E)$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

де A^{-1} - матриця обернена до А.

Приклад 5

Розв’язати С.Л.А.Р. методом оберненої матриці

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 \quad = 6. \end{cases}$$

Розв’язок

Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$

Тоді $X = A^{-1} \cdot B$

Приклад 5 (продовження)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Визначник матриці А не дорівнює нулю, тому існує A^{-1} і розвязок можна знайти методом оберненої матриці.

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

Приклад 5 (продовження)

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5.$$

Записуємо обернену матрицю до матриці A

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -3 & -3 & 3\\ -7 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

Приклад 5 (продовження)

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2\cdot 1 + (-2)\cdot 5 + 1\cdot 6 \\ -3\cdot 1 + (-3)\cdot 5 + 3\cdot 6 \\ -7\cdot 1 + (-4)\cdot 5 + 5\cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\{2,0,-1\}$

Недоліки застосування формул Крамера та метода оберненої матриці.

С.Л.Р. не може бути розв’язана за допомогою формул Крамера та методом оберненої матриці у випадках коли:

1) кількість рівнянь ≠ кількості невідомих ($m \neq n$) або
2) $\Delta = 0$.