Лекция 4. Формула Грина. Поверхностные интегралы.

4.1. Формула Грина.

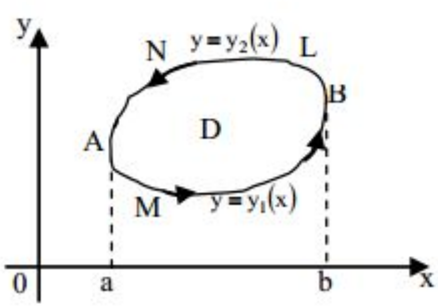
Пусть D - плоская область, ограниченная линией L. В замкнутой области $\bar{D}$ заданы функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$, непрерывные вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial X(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$. Тогда справедлива формула, называемая формулой Грина:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy, \tag{1}$$

где замкнутый контур L проходит в положительном направлении, т.е. при движении по контуру область D остается слева.

Выведем формулу (1).

Пусть отнесенная к плоскости xOy область D правильна как в направлении оси Ox, так и в направлении оси Oy. Для определенности предположим, что граница L состоит из двух дуг AMB и ANB, заданных соответственно уравнениями $y = y_1(x)$, $y=y_2(x)$, причем $a <= x <= b$.



Рассмотрим сначала двойной интеграл

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy.$$

Так как $X = X(x,y)$ при постоянном x есть одна из первообразных для $\dfrac{\partial X}{\partial y}$, то

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy = X(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))$$

4.1. Формула Грина. Продолжение

Поэтому

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))] dx =$$

$$= \int_a^b X(x, y_2(x)) dx - \int_a^b X(x, y_1(x)) dx.$$

Каждый из этих двух определенных интегралов можно рассматривать как криволинейный интеграл, взятый по соответствующей дуге

$$\int_a^b X(x, y_2(x)) dx = \int_{ANB} X(x, y) dx, \quad \int_a^b X(x, y_1(x)) dx = \int_{AMB} X(x, y) dx.$$

Следовательно,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int_{ANB} X(x, y) dx - \int_{AMB} X(x, y) dx.$$

Но

$$\int_{ANB} X(x, y) dx = - \int_{BNA} X(x, y) dx,$$

поэтому

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = - \int_{BNA} X(x, y) dx - \int_{AMB} X(x, y) dx.$$

4.1. Формула Грина. Продолжение

Так как дуги BNA и AMB дают в совокупности границу L, проходимую в положительном направлении, то, воспользовавшись свойством аддитивности, получаем

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_L X(x, y)dx. \qquad (2)$$

Аналогично устанавливается формула

$$\iint\limits_D \frac{\partial Y}{\partial x} dxdy = -\oint\limits_L Y(x, y)dy. \qquad (3)$$

Вычитаем (3) из (2)

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Xdx + Ydy.$$

Формула Грина справедлива для любой области, которую можно разбить на правильные области.

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования.

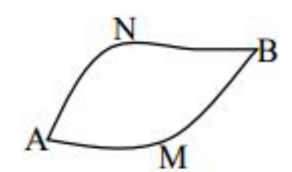
ЛЕММА. Пусть функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial X(x,y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D. Для того чтобы криволинейный интеграл не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю.

Напомним, что область D (открытая или замкнутая) называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области D.

Доказательство. Необходимость. Пусть интеграл

$$\oint_L X(x,y)dx + Y(x.y)dy$$

не зависит от пути интегрирования. Покажем, что он равен нулю по любому замкнутому контуру. Рассмотрим две произвольные линии AMB и ANB, лежащие в области D и соединяющие данные точки A и B.Так как по условию интеграл по линии AMB равен интегралу по линии ANB:



$$\int_{AMB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_{ANB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy, \qquad (4)$$

то имеем

$$\int_{AMB} Xdx + Ydy - \int_{ANB} Xdx + Ydy = 0.$$

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

На основании свойств криволинейного интеграла имеем

$$\int_{AMB} Xdx + Ydy + \int_{BNA} Xdx + Ydy = 0.$$

Следовательно,

$$\oint_{L} Xdx + Ydy = 0, \qquad (5)$$

где $L \equiv AMBNA$.

Действительно, если криволинейный интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей точки A и B, а зависит только от положения этих точек, то интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Достаточность. Пусть интеграл по любому замкнутому контуру $L \equiv AMBNA$ равен нулю, т.е.

$$\oint_{L} Xdx + Ydy = 0.$$

Но

$$\oint_{L} Xdx + Ydy = \int_{AMB} Xdx + Ydy + \int_{BNA} Xdx + Ydy =$$

$$= \int_{AMB} Xdx + Ydy - \int_{ANB} Xdx + Ydy.$$

Следовательно,

$$\int_{AMB} Xdx + Ydy = \int_{ANB} Xdx + Ydy.$$

Таким образом, если криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то этот интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей две любые точки A и B, а зависит только от положения этих точек.

Итак, из равенства (4) следует выполнимость равенства (5) и, наоборот, из (5) следует (4).

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Теорема. Пусть в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области D функции $X(x,y)$, $Y(x,y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$; $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл по замкнутому контуру L, лежащему в этой области, был равен нулю, т.е. выполнялось равенство (1.63)

$$\oint_L Xdx + Ydy = 0,$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad (6)$$

во всех точках области D.

Доказательство. Достаточность. Возьмем произвольный замкнутый контур $L \subset D$ и к интегралу по этому контуру применим формулу Грина

$$\oint_L Xdx + Ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy.$$

Так как по условию $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, то двойной интеграл обращается в ноль и, следовательно, $\oint_L Xdx + Ydy = 0$.

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Необходимость. Следует доказать, что выполнение (5) влечет выполнение (6). Предположим противное: условие (6) не выполняется,

т.е. $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq \frac{\partial X}{\partial y}$ хотя бы в одной точке $M(x_0, y_0)$ из области D. Пусть, например,

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)_M > 0.$$

В силу непрерывности частных производных их разность, как функция непрерывная, будет положительной и в некоторой достаточно малой области D^* окрестности точки M, т.е. выполняется $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0$.

Двойной интеграл по области D^* от положительной функции в силу известного свойства интеграла также будет иметь положительное значение

$$\iint_{D^*}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy > 0.$$

Но по формуле Грина $\iint_{D^*}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{L^*} Xdx + Ydy$,

где L^* - граница области D^*. По предположению криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, значит, $\oint_{L^*} Xdx + Ydy = 0$.

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Последнее же неравенство противоречит этому условию. А это значит, что предположение $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$ хотя бы в одной точке было неверным. Следовательно $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ во всех точках области D. Теорема доказана.

Напомним: выражение

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

можно рассматривать как полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т.е. $du = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$.

Теорема. При прежних предположениях относительно функций $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ для того, чтобы выражение $Xdx + Ydy$ было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, выполнение условия $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$.

<u>*Следствие.*</u> При сделанных ранее предположениях относительно функций X и Y, для того чтобы интеграл

$$\int_L Xdx + Ydy$$

не зависел от пути интегрирования (а интеграл по замкнутому контуру равнялся нулю), необходимо и достаточно, чтобы <u>подынтегральное выражение было полным дифференциалом.</u>

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Теорема. Пусть функции $X(x,y)$, $Y(x,y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial X}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D. Тогда выполнение одного из следующих четырех утверждений влечет выполнение остальных трех.

1. Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Xdx + Ydy$ не зависит от линии интегрирования, соединяющей две данные точки.

2. Криволинейный интеграл $\oint\limits_{L} Xdx + Ydy$, взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области D, равен нулю.

3. Выражение $Xdx + Ydy$ является полным дифференциалом $du = Xdx + Ydy$ некоторой функции $u(x,y)$.

4. Во всех точках области D выполняется равенство

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Связь равносильных между собой утверждений 1-4 можно изобразить схемой:

$$1. \to 2. \to 3. \to 4. \to 1.$$

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Следствие. Из первых трех высказываний следует, что

$$\int\limits_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} Xdx + Ydy = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} du(x,y) = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1).$$

Эту формулу естественно называть обобщенной формулой Ньютона-Лейбница. Она будет весьма полезной в теории поля, в частности, при вычислении работы потенциальной силы.

ПРИМЕР. Найти $I = \int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} ydx + xdy$.

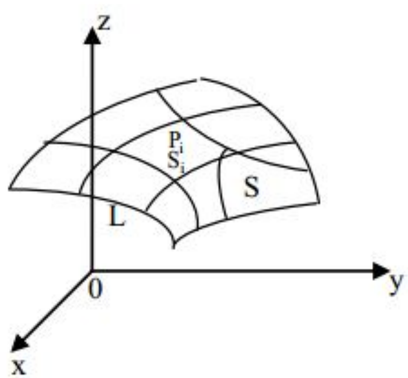
Когда найдена функция $u(x,y)$ - первообразная для подынтегрального выражения $Xdx + Ydy$, значение криволинейного интеграла между любыми двумя точками легко вычисляется по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Легко видеть, что $u(x,y) = x \cdot y$, т.к. $ydx + xdy = d(xy)$, поэтому

$$I = \int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} d(xy) = xy\Big|_{(1;2)}^{(3;4)} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$$

4.3. Определение поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой обобщение двойного интеграла, каким криволинейный интеграл первого рода является по отношению к определенному интегралу.



Это обобщение строится так. Пусть в точках гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности S, ограниченной кусочно-гладким контуром L, определена функция $f(P) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность S произвольно проведенными кривыми на части $S_1, S_2, ..., S_n$, площадь каждой из которых обозначим $\Delta S_i \left(i = \overline{1, n}\right)$. Выбрав в каждой из площадок произвольную точку P_i, вычислим в этой точке значение функции $f(P_i)$ и умножим его на площадь ΔS_i элементарной части S_i. Составим сумму произведений $f(P_i)\Delta S_i$

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i , \tag{7}$$

которую будем называть интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по поверхности S. Наибольший из диаметров ячеек S_i обозначим $\max \Delta S_i$.

Перейдем в равенстве (7) к пределу при условии стремлении к нулю $\max \Delta S_i$, что влечет увеличение числа n ячеек S_i и стягивание каждой из них в точку.

4.3. Определение поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Если при стремлении $\max \Delta S_i$ к нулю, существует конечный предел интегральных сумм (7), который не зависит от способа разбиения поверхности S на части S_i и от выбора точек $P_i \in S_i$, то его называют поверхностным интегралом первого рода от функции $f(P) = f(x, y, z)$ по поверхности S или интегралом по площади поверхности S и обозначают

$$\iint_S f(P)dS \quad \text{или} \quad \iint_S f(x, y, z)dS.$$

Итак, по определению

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \lim_{\substack{\max \Delta S_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \qquad (8)$$

(dS - дифференциал площади поверхности).

Теорема. существования поверхностного интеграла первого рода: если функция $f(x, y, z)$ непрерывна вдоль кусочно-гладкой поверхности S, то интеграл по площади поверхности существует.

Поверхностный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл. В частности, выполняется свойство аддитивности: если поверхность S разбита на части S_1 и S_2, то

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} .$$

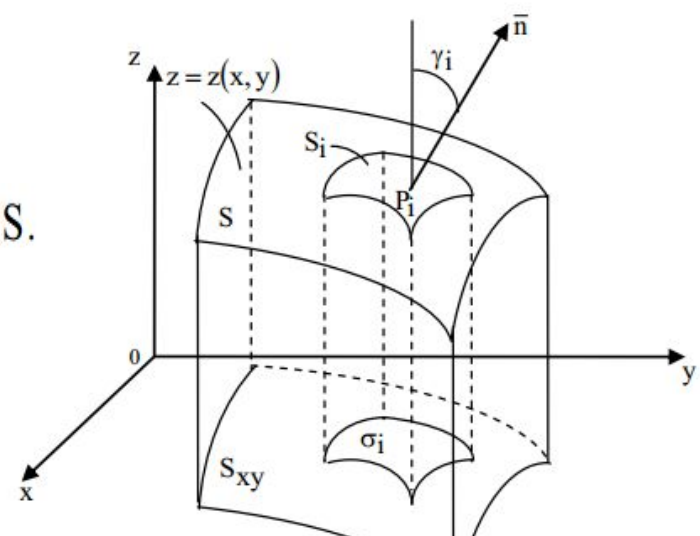
4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

Пусть задана гладкая поверхность S уравнением $z = z(x, y)$. Так как поверхность гладкая, то следовательно $z(x, y)$ - непрерывная функция вместе со своими частными производными. И пусть на поверхности S определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Требуется вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S f(x, y, z)dS.$$

Предварительно займемся выводом формулы для вычисления площади ΔS_i элементарной части S_i поверхности S.

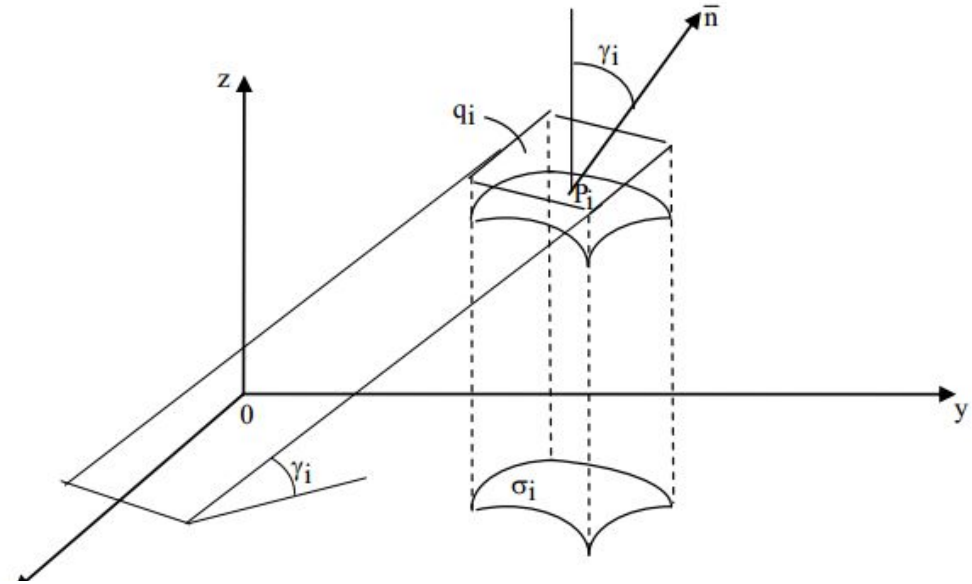
выделен участок S_i разбиения области S на элементарные части с выбранной на нем точкой P_i, которая имеет координаты x_i, y_i, $z_i = z(x_i, y_i)$.



Через точку $P_i \in S_i$ проведем касательную плоскость к поверхности S. Уравнение касательной плоскости, как известно, имеет вид

$$z - z_i = z'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + z'_y(x_i, y_i)(y - y_i).$$

4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).



На этой плоскости выделим элемент q_i с площадью Δq_i , который проектируется на плоскость xOy в ту же элементарную область σ_i, что и элемент S_i . Заменим криволинейный элемент S_i плоским элементом q_i, тогда

$$\Delta S_i \approx \Delta q_i . \tag{9}$$

Обозначим через γ_i двугранный угол между касательной плоскостью и плоскость xOy.

4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

Воспользуемся соотношением из аналитической геометрии: площадь S_1 проекции плоской фигуры равна площади S самой этой фигуры, умноженной на абсолютную величину косинуса двугранного угла φ между плоскостями, т.е.

$$S_1 = S \cdot |\cos\varphi|.$$

В наших обозначениях имеем

$$\Delta\sigma_i = \Delta q_i \cdot |\cos\gamma_i|,$$

откуда в силу формулы (9) получаем

$$\Delta S_i \approx \frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}.$$

Линейный угол двугранного угла γ_i есть в то же время угол между осью Oz и перпендикуляром $\bar{n}$ к касательной плоскости. И поэтому

$$|\cos\gamma_i| = \left|\cos\left(\bar{n}, \hat{O}z\right)\right|. \qquad (10)$$

Это позволяет нам найти косинус угла между векторами $\bar{n}$ и $\bar{k}$ ($\bar{k}$ - орт оси Oz), по известной формуле

$$\cos\left(\widehat{\bar{n}, \bar{k}}\right) = \frac{\bar{n} \cdot \bar{k}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{k}|}.$$

4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

Нормальный вектор $\bar{n}$ касательной плоскости, как видно из ее уравнения, имеет координаты $z'_x(x_i, y_i)$, $z'_y(x_i, y_i)$, -1, а вектор $\bar{k} = \{0,0,1\}$. Тогда

$$\cos\left(\bar{n}, \hat{O}z\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}}. \qquad (11)$$

Таким образом, с учетом (10) и (11) получаем

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)} \cdot \Delta\sigma_i. \qquad (12)$$

А теперь, для решения поставленной задачи о вычислении поверхностного интеграла, вернемся к интегральной сумме (7), соответствующей данному разбиению поверхности S на части $\Delta S_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ и выбору точек P_i. Принимая во внимание полученное выражение для ΔS_i (12), запишем

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)} \cdot \Delta\sigma_i. \qquad (13)$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $n \to \infty$, считая, что каждая из элементарных областей стягивается в точку. Сумма, стоящая в правой части равенства , является интегральной суммой для непрерывной функции $f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}$ по области S_{xy} - проекции поверхности S на плоскость xOy. Поэтому ее предел есть двойной интеграл от указанной функции двух переменных по области S_{xy}.

4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предел суммы, стоящей в левой части равенства (13), есть поверхностный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S (т.е. 1-го рода).

Следовательно,

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}d\sigma,$$

иначе

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}dxdy. \qquad (14)$$

где S_{xy} - проекции поверхности S на плоскость xOy.

Если вместо плоскости xOy поверхность S можно спроектировать на плоскости xOz или yOz, тогда переменив роли координат x, y и z, из равенства (14), можно получить следующие формулы:

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2(y,z)+x_z'^2(y,z)}dydz,$$

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2(x,z)+y_z'^2(x,z)}dxdz,$$

где $x = x(y,z)$ $y = y(x,z)$ - уравнения поверхности S, разрешенные относительно x и y соответственно, а S_{yz}, S_{xz} - проекции поверхности S на координатные плоскости yOz и xOz.

4.5. Поверхностный интеграл второго рода или по координатам

Пусть в прямоугольной системе координат OXYZ задана некоторая область V. Пусть в этой области задана поверхность σ, ограниченная замкнутым контуром L. Относительно поверхности σ будем предполагать, что она гладкая или кусочно-гладкая, то есть в каждой ее точке P определяется положительное направление нормали единичным вектором $\overline{n}(P)$, направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точек поверхности σ.

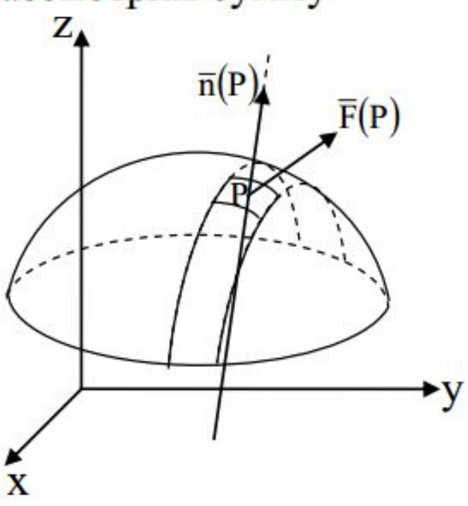
Пусть в каждой точке поверхности σ определен вектор

$$\overline{F} = \overline{X}(x,y,z)\overline{i} + Y(x,y,z)\overline{j} + Z(x,y,z)\overline{k} \tag{15}$$

или $\overline{F} = \{\overline{X}(x,y,z);\ Y(x,y,z);\ Z(x,y,z)\}$,

где $X = X(x,y,z);\ Y = Y(x,y,z);\ Z = Z(x,y,z)$ - непрерывные функции.

Разобьем поверхность σ произвольным образом на n элементарных площадок $\Delta\sigma_i\ (i = \overline{1,n})$. На каждой площадке возьмем произвольно точку P_i и рассмотрим сумму



$$\sum_{i=1}(\overline{F}(P_i)\cdot\overline{n}(P_i))\cdot\Delta\sigma_i\ , \tag{16}$$

где $\overline{F}(P_i)$ - значение вектора (15) в точке P_i; $\overline{n}(P_i)$ - единичный вектор нормали в этой точке; $\overline{F}(P_i)\cdot\overline{n}(P_i)$ - скалярное произведение этих векторов. Сумма (16) называется интегральной суммой. При различных разбиениях поверхности σ на элементарные площадки получаем различные значения интегральной суммы (16) .

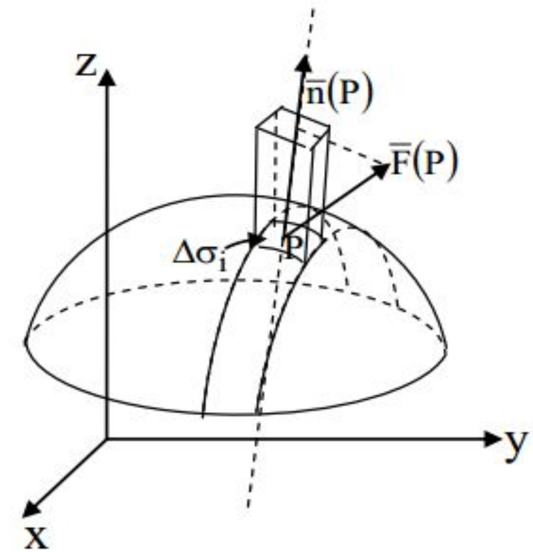
4.5. Поверхностный интеграл второго рода или по координатам

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Предел суммы (16) при $n \to \infty$ (таким образом, чтобы наибольшая из $\Delta\sigma_i \to 0$) называется поверхностным интегралом второго рода:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta\sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{F}(P_i)\cdot \overline{n}(P_i)\right)\cdot \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} \left(\overline{F}\cdot \overline{n}\right)\cdot d\sigma. \qquad (17)$$

Каждое i-е слагаемое суммы (17) можно рассматривать как объем призмы с основанием $\Delta\sigma_i$ и с высотой $\overline{F}(P_i)\cdot \overline{n}(P_i)$.

<u>Физический смысл поверхностного интеграла второго рода.</u> Вектор $\overline{F}$ может определять направление скоростей: потока жидкости, потока воздуха, потока частиц газа, магнитных полей и т.д. Если вектор $\overline{F}$ определяет скорость жидкости, протекающей через поверхность σ, то произведение $\left(\overline{F}(P_i)\cdot \overline{n}(P_i)\right)\cdot \Delta\sigma_i$ равно количеству жидкости, протекающей через площадку $\Delta\sigma_i$ за единицу времени в направлении вектора $\overline{n}(P_i)$.



Тогда выражение $\iint_{\sigma} \left(\overline{F}\cdot \overline{n}\right)\cdot d\sigma$ из формулы (17) есть общее количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ в положительном направлении. Поэтому поверхностный интеграл (17) называется <u>потоком</u> векторного поля $\overline{F}$ через поверхность σ.

4.5. Поверхностный интеграл второго рода или по координатам

Выразим единичный вектор $\overline{n}$ через его проекции на оси координат:

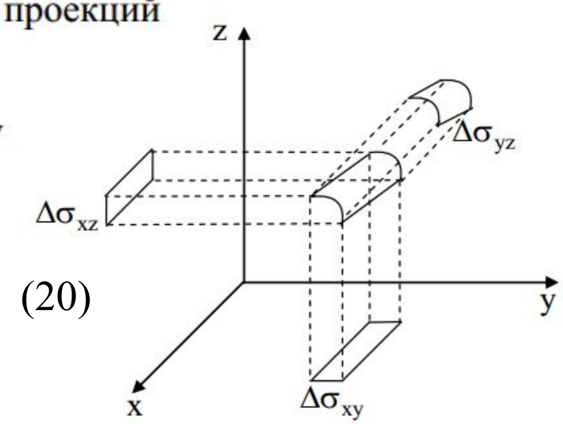
$$\overline{n} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}, \qquad (18)$$

где α, β, γ - углы между вектором $\overline{n}$ и положительными направлениями осей Ox. Ov. Oz соответственно. Подставляя в интеграл (17) проекции вектора $\overline{F}$ из (15) и проекции вектора $\overline{n}$ из (18) , получим:

$$\iint_\sigma (\overline{F}\cdot\overline{n})\cdot d\sigma = \iint_\sigma (X(x,y,z)\cos\alpha + Y(x,y,z)\cos\beta + Z(x,y,z)\cos\gamma)d\sigma =$$
$$= \iint_\sigma X(x,y,z)(\cos\alpha\cdot d\sigma) + Y(x,y,z)(\cos\beta\cdot d\sigma) + Z(x,y,z)(\cos\gamma\cdot d\sigma). \qquad (19)$$

Произведение $d\sigma\cdot\cos\alpha$ есть проекция площадки $\Delta\sigma_i$ на координатную плоскость yOz. Произведения $d\sigma\cdot\cos\beta$ и $d\sigma\cdot\cos\gamma$ есть проекции площадки $\Delta\sigma$ на координатные плоскости, соответственно, xOz и xOy. Поскольку разбиение поверхности σ производится произвольным образом, то можно произвести разбиения плоскостями параллельными координатным плоскостям и тогда при предельном переходе (при $n\to\infty$) площади проекций элементарной площадки $\Delta\sigma$ равны:

$$d\sigma\cdot\cos\alpha = dy\cdot dz; \qquad d\sigma\cdot\cos\beta = dx\cdot dz; \qquad d\sigma\cdot\cos\gamma = dx\cdot dy$$



и интеграл (19) принимает вид:

$$\iint_\sigma (\overline{F}\cdot\overline{n})\cdot d\sigma = \iint_\sigma X(x,y,z)dydz + Y(x,y,z)dxdz + Z(x,y,z)dxdy. \qquad (20)$$

4.5. Поверхностный интеграл второго рода или по координатам

Из свойств поверхностного интеграла второго рода выделим два

1. $$\iint\limits_{\sigma_+} \left(\overline{F} \cdot \overline{n}\right) \cdot d\sigma = -\iint\limits_{\sigma_-} \left(\overline{F} \cdot \overline{n}\right) d\sigma, \qquad (20)$$

где σ_+ - это сторона поверхности σ, соответствующая положительному направлению нормального вектора $\overline{n}$; σ_- - противоположная сторона поверхности σ.

2. Если поверхность σ состоит их нескольких частей $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k$, тогда интеграл (19) есть сумма интегралов по этим частям поверхности:

$$\iint\limits_{\sigma} \left(\overline{F} \cdot \overline{n}\right) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} \left(\overline{F} \cdot \overline{n}\right) d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} \left(\overline{F} \cdot \overline{n}\right) d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\sigma_k} \left(\overline{F} \cdot \overline{n}\right) d\sigma \qquad (21)$$

4.6. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Вычисление интеграла (20) можно свести к вычислению двойных интегралов, если правую часть разложить в сумму трех интегралов:

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z)dydz + \iint_{\sigma} Y(x, y, z)dxdz + \iint_{\sigma} Z(x, y, z)dxdy \qquad (22)$$

и далее вычислять отдельно каждый из них (путем сведения подынтегральной функции к двум переменным).

Например, для первого интеграла из (21) $I_1 = \iint_{\sigma} X(x, y, z)dydz$. Если область интегрирования, то есть поверхность σ, задана таким уравнением, что его можно преобразовать к виду $x = x(y, z)$, то данный интеграл I_1 вычисляем так:

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z)dydz = \pm \iint_{\sigma_{yz}} X(x(y, z), y, z)dydz,$$

где знак $\pm$ в силу формулы (20) будет определяться в зависимости от стороны поверхности σ (плюс, если $\cos\alpha = \cos(\overline{n}, \overline{Ox}) > 0$; минус, если $\cos\alpha < 0$); σ_{yz} - это проекция поверхности σ на координатную плоскость yOz

4.6. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Формула Остроградского-Гаусса

Если поверхность σ - замкнутая, V – тело, которое ограничивается поверхностью σ. Тогда имеет место формула

$$\oint\!\!\oint_{\sigma} X(x,y,z)dydz + Y(x,y,z)dxdz + Z(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint_{V} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dxdydz, \tag{23}$$

где функции $X = X(x,y,z)$, $Y = Y(x,y,z)$, $Z = Z(x,y,z)$ и их частные производные $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial z}$ должны быть непрерывными в области V и на границе, то есть на поверхности σ.

4.6. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Формула Стокса

Если поверхность σ - незамкнута и ограничена замкнутым контуром L, то имеет место формула

$$\oint_L X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz =$$
$$= \iint_\sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy, \quad (24)$$

где функции $X = X(x,y,z)$, $Y = Y(x,y,z)$, $Z = Z(x,y,z)$ и их частные производные должны быть непрерывными функциями на поверхности σ и на ее границе, то есть на контуре L.