Векторы.

Линейные операции над векторами.

Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов.

Прямая на плоскости.

Векторы и линейные операции над ними.

Определение. Вектором *с началом в точке A и с концом в точке B называется отрезок с выбранным направлением, или направленный отрезок -* $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, у которого начало совпадает с его концом, называется ***нулевым*** вектором - $\vec{0}$.

Длина отрезка, изображающего вектор $\vec{a}$ называется ***модулем*** этого вектора - $|\vec{a}|$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ параллельные одной прямой называются ***коллинеарными***.

Определение. Пусть даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Приложим начало $\bar{a}$ к концу $\bar{b}$. *Суммой* $\bar{a} + \bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец - с концом вектора $\bar{b}$.

Определение. *Разностью* $\bar{a} - \bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, выходящих из одной точки, называется вектор, соединяющий конец вектора $\bar{b}$ с концом вектора $\bar{a}$.

Определение. *Произведением вектора* $\bar{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda\bar{a}$, удовлетворяющий трем условиям: 1) $|\lambda\bar{a}| = |\lambda||\bar{a}|$, 2) $\lambda\bar{a} \,||\, \bar{a}$, 3) вектор $\lambda\bar{a}$ одинаково направлен с вектором $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и направлен в противоположную сторону, если $\lambda<0$.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $1\cdot\bar{a} = \bar{a}$.
2. $0\cdot\bar{a} = \bar{0}$.
3. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
4. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.
5. $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$.
6. $\lambda(\beta\bar{a}) = (\lambda\beta)\bar{a}$.
7. $(\lambda + \beta)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \beta\bar{a}$.
8. $\forall\, \bar{a} : \bar{a} = |\bar{a}|\cdot\bar{a}^0$.
9. Если $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, то $\bar{b} \,||\, \bar{a}$. И обратно, если $\bar{b} \,||\, \bar{a} \Rightarrow \exists\lambda : \bar{b} = \lambda\bar{a}$.

Базис и координаты вектора

Определение. ***Линейной комбинацией*** *векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *с коэффициентами* $C_1, C_2, ..., C_n$ *называется вектор* $C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + ... + C_n\vec{a}_n$.

Векторным пространством называется такое множество векторов, что любая линейная комбинация векторов этого множества также ему принадлежит.

Определение. *Любой ненулевой вектор* $\vec{e}$ *на прямой называется* ***базисным вектором этой прямой***. *Любая пара неколлинеарных векторов* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *плоскости называется* ***базисом этой плоскости***. *Любая тройка некомпланарных векторов* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *называется* ***базисом пространства***.

Теорема о базисе. *Любой вектор* $\vec{a}$ *(на прямой, плоскости или в пространстве) единственным образом записывается в виде линейной комбинации соответствующих базисных векторов. То есть,*

1) *на прямой:* $\vec{a} = x\vec{e}$,

2) *на плоскости:* $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$,

3) *в пространстве:* $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

Определение. *Коэффициенты линейной комбинации базисных векторов выражающих вектор* $\vec{a}$ *на прямой, в плоскости или в пространстве называются* ***координатами вектора*** $\vec{a}$ *в данном базисе.*

Теорема. *При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.*

Пусть в пространстве имеется декартова система координат $OXYZ$.

С ней связан стандартный базис из единичных взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, расположенных вдоль осей Ox, Oy, Oz.

Если (x, y, z) – координаты точки A в системе $OXYZ$, то вектор $\overrightarrow{OA}$ можно записать в виде

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Теорема. *Пусть в декартовой системе координат* $Oxyz$ *заданы две точки* $A(x_A, y_A, z_A)$ *и* $B(x_A, y_A, z_A)$, *тогда в базисе* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *вектор* $\overrightarrow{AB}$ *имеет координаты*

$$((x_B - x_A), (y_B - y_A), (z_B - z_A)).$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. ***Скалярным произведением*** *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т. е.*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\wedge\vec{b}).$$

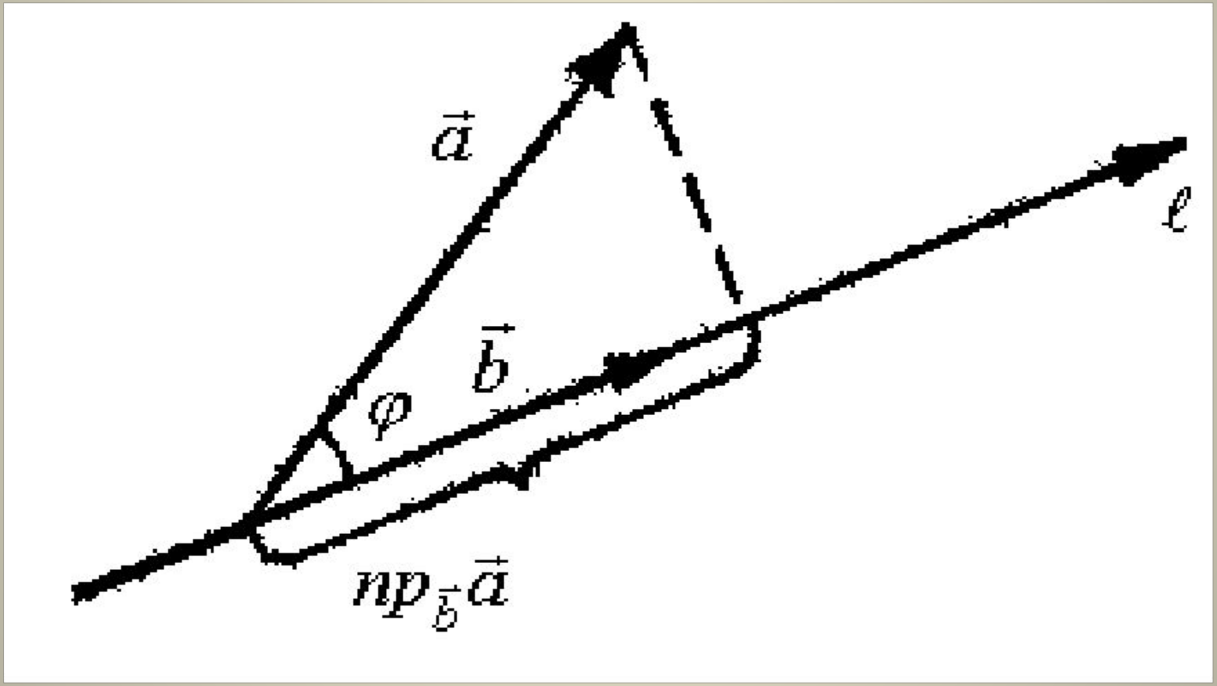
Для любых векторов справедливы следующие ***свойства***.

1) $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$.

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, т. к. $\cos(\vec{a},\wedge\vec{a})=\cos 0=1$.

3) *Скалярное произведение ненулевых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *равно* 0 *только в том случае, когда эти векторы ортогональны (перпендикулярны).*

Проекцией вектора $\vec{a}$ ***на ненулевой вектор*** $\vec{b}$ (обозначение $пр_{\vec{b}}\vec{a}$) называется его проекция на ось l, проведенную через вектор $\vec{b}$.



4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|пр_{\vec{b}}\vec{a}$.

5) *Для любого вектора* $\vec{a}$ *с координатами* (x, y, z) *в базисе* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *верно:*

$$x=\vec{a}\vec{i}\ ,\ y=\vec{a}\vec{j}\ ,\ z=\vec{a}\vec{k}\ .$$

6) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$; λ – *любое число.*

7) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

Теорема. *Пусть в базисе* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *вектор* $\vec{a}$ *имеет координаты* (x_1, y_1, z_1), *а вектор* $\vec{b}$ – (x_2, y_2, z_2). *Тогда*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Из этой теоремы вытекают *следствия:*

1. Длина вектора $\bar{a}=(x, y, z)$ равна $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. Косинус угла φ между векторами $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

3. Условие перпендикулярности векторов $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$:

$$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

4. Проекция вектора $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$ на вектор $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$ равна

$$np_{\bar{b}}\,\bar{a}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Векторным произведением *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется вектор* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, *удовлетворяющий трём условиям:*

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$

в) $\vec{c}$ *перпендикулярен векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *т. е. он перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

с) *Тройка векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – *правая, т.е. при взгляде со стороны конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму происходит против часовой стрелки.*

СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Для любых векторов справедливы следующие ***свойства***.

1°. *Векторное произведение* ***антикоммутативно:***

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

2°. *Ненулевые векторы* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *коллинеарны только в том случае, когда* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

3°. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, λ - *число.*

4°. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$.

Теорема. *Пусть в базисе* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *векторы* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *имеют координаты* (x_1, y_1, z_1) *и* (x_2, y_2, z_2) *соответственно. Тогда в этом базисе*

$$\vec{a} \times \vec{b} = ((y_1 z_2 - z_1 y_2), -(x_1 z_2 - z_1 x_2), (x_1 y_2 - y_1 x_2)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Следствие 1. *Площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, *равна*

$$S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}\ .$$

Площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна:

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}\ .$$

Следствие 2. *Площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a} = (x_1, y_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2, y_2)$, *лежащих в плоскости* Oxy, *равна*

$$S_{пар} = \left|x_1 y_2 - y_1 x_2\right|\ .$$

Площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 - y_1 x_2\right|.$$

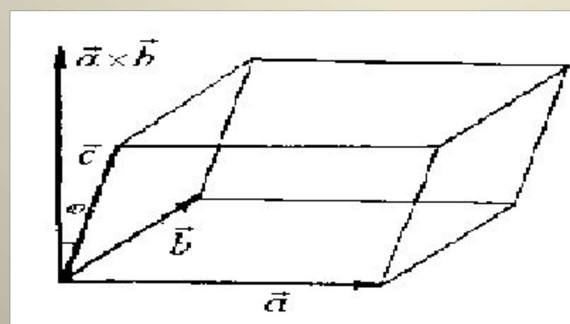
СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Смешанным произведением *трех векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ *называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *с вектором* $\vec{c}$: ($\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$).

1. Теорема. *Смешанное произведение векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ *равно* $\pm$ *объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V_{пар}.$$

Здесь знак “+” берется, в случае, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая, “–” если она левая.



Теорема. *Смешанное произведение векторов* $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *и* $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, *заданных своими декартовыми координатами, вычисляется по формуле:*

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие 1. *Объём параллелепипеда, построенного на векторах* $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *и* $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, *равен:*

$$V_{пар} = |\,\overline{a}\overline{b}\overline{c}\,| = \left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right|.$$

Объём треугольной пирамиды (тетраэдра), построенной на этих же векторах, равен:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right|.$$

Следствие 2. *Если* $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *и* $\overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, *то:*

$$\text{векторы } \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c} \text{ - компланарны} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется *общим уравнением прямой.*

Уравнение вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ называется *уравнением прямой в "отрезках"*.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ записывается в виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом записывается в виде: $y=kx+b$.

Здесь $k=tg\alpha$ - тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется *угловым коэффициентом прямой*

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ с данным угловым коэффициентом:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $L: Ax+By+C=0$ определяется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Угол между двумя прямыми.
Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Тангенс угла между двумя прямыми $L_1 : y = k_1 x + b_1$ и $L_2 : y = k_2 x + b_2$:

$$tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Условие параллельности прямых $L_1 : y = k_1 x + b_1$ и $L_2 : y = k_2 x + b_2$:

$$L_1 \| L_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности прямых $L_1 : y = k_1 x + b_1$ и $L_2 : y = k_2 x + b_2$:

$$k_1 k_2 = -1.$$

Косинус угла φ между прямыми $L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых $L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Эти прямые параллельны только в том случае, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.