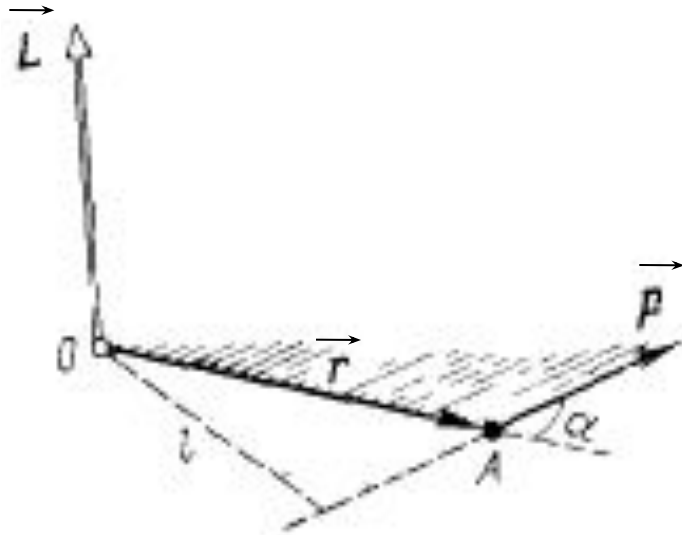


Лекция 7. Динамика вращения твердого тела. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела.



Момент импульса



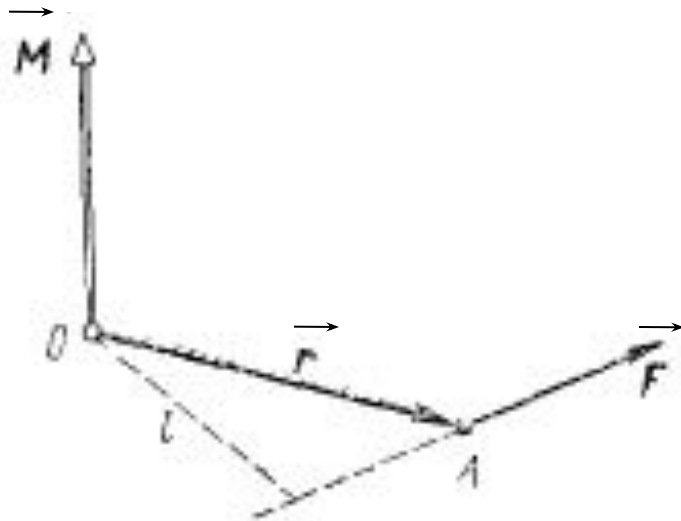
\vec{r} – радиус-вектор,
определяющий положение
точки A
 l – плечо импульса \vec{p}

Момент импульса – векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора и импульса.

$$L = [rp] = r \cdot p \cdot \sin \alpha = p \cdot l$$

$$[L] = \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$$

Момент силы



\vec{r} – радиус-вектор,
определяющий положение
точки A
 l – плечо импульса \vec{F}

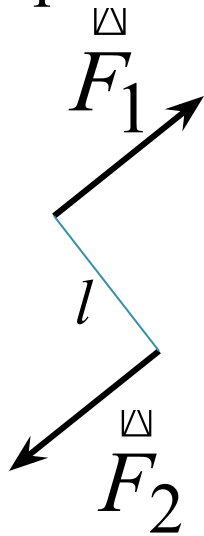
Момент силы – векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора и силы.

$$M = [\vec{r} \vec{F}] = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot l$$

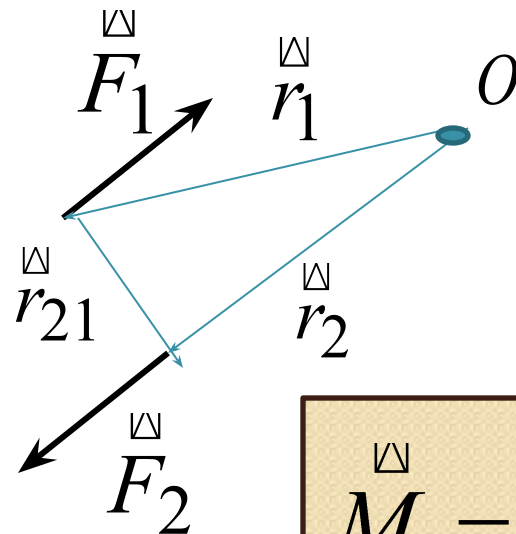
$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Момент пары сил

Пара сил – две равные по величине противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой.



l – плечо пары, расстояние между прямыми, вдоль которых действуют силы.



$$M = [r_1 \times F_1] + [r_2 \times F_2] = \dots$$

Момент пары сил

Момент пары сил относительно любой точки O одинаков:

$$\overset{\Delta}{M} = \left[\overset{\Delta}{r}_{12} \overset{\Delta}{F}_1 \right] = \left[\overset{\Delta}{r}_{21} \overset{\Delta}{F}_2 \right]$$

Момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой.

Момент пары сил перпендикулярен плоскости, в которой лежат силы, численно равен произведению модуля одной из сил на плечо пары сил.

Момент двух сил, действующих вдоль одной прямой равен нулю!

Уравнение моментов

Продифференцируем момент импульса \vec{L} по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = \left[\vec{r} \times \vec{F} \right]$$

Уравнение моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_1^2 \vec{M} dt$$

Если $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = const$

Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим произвольную систему частиц:

$$\frac{dL}{dt} = M = M_{\text{внутр}} + M_{\text{внешн}}$$

Суммарный момент внутренних сил $M_{\text{внутр}}$ равен нулю (согласно III закону Ньютона и определению момента пары сил), следовательно

$$\frac{dL}{dt} = M_{\text{внешн}}$$

Момент импульса системы может меняться только под действием суммарного момента внешних сил.

Закон сохранения момента импульса

Момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным

$$\nabla \bar{L} = \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса выполняется в замкнутых инерциальных системах.

В неинерциальных системах отсчета момент импульса может оставаться постоянным при условии равенства нулю суммарного момента сил инерции.

Момент инерции

- мера инертности тела при вращательном движении, аналог массы тела.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$

Плотности распределения массы

Линейная плотность

$$\tau = \frac{dm}{dl} = \frac{m}{l}$$

Поверхностная плотность

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{m}{S}$$

Объемная плотность

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{V}$$

Момент инерции однородных твердых тел, относительно оси, проходящей через ц.м.

1. Тонкий однородный стержень массой m и длиной l .
2. Тонкий однородный диск (сплошной цилиндр) массой m и радиусом R .
3. Тонкое однородное кольцо (полый цилиндр) массой m и радиусом R .
4. Тонкостенная однородная сфера массой m и радиусом R .
5. Однородный шар массой m и радиусом R .

Теорема Штейнера

Позволяет находить момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс.

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon = \frac{dL}{dt}$$

Закон сохранения момента импульса

$$L = I\omega = \text{const}$$