Теория автоматического управления

Лекция 2. Переходная характеристика. Импульсная характеристика. ЛЧХ.

Основные термины и определения

- Передаточная функция (ПФ) – отношение изображений по Лапласу выходной переменной к входной при нулевых начальных условиях (ННУ).

$$W(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

- Годограф корней – совокупность траекторий корней ПФ.
- Временная характеристика – реакция системы на типовое воздействие при ННУ.
- Переходная характеристика (h(t)) – реакция системы на единичное ступенчатое воздействие (1(t)).
- Импульсная характеристика (w(t)) – реакция системы на единичное импульсное воздействие (δ(t)).
- Нули ПФ (0) – корни числителя ПФ.
- Полюса ПФ (x) – корни знаменателя ПФ.

Переходная характеристика

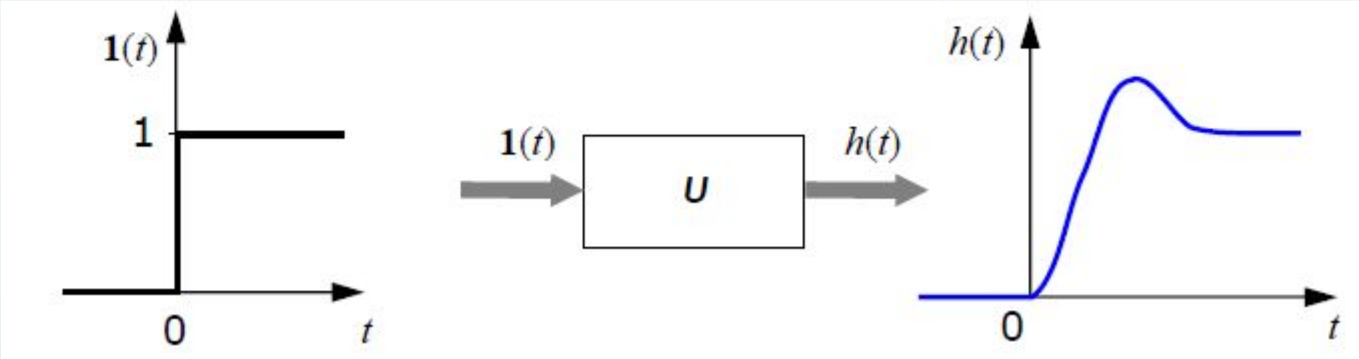
Переходная функция – реакция на 1(t) при ННУ.

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$h(s) = W(s)Z\{1(t)\} = \frac{W(s)}{s} = W_h(s) = \frac{G_h}{D'_h};$$

$$h(t) = Z^{-1}\{W_h(s)\} = Z^{-1}\{W(s)/s\} \rightarrow h(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t}, \text{где } C_i = \frac{G_h(s_i)}{D'_h(s_i)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dh(t)}{dt} = w(t) \\ &h(t) = \int_0^{\tau} w(\tau)\, d\tau \end{aligned}}$$



Импульсная характеристика

- Импульсная характеристика (весовая функция) – реакция системы на единичное импульсное воздействие (дельта-функцию) при ННУ.

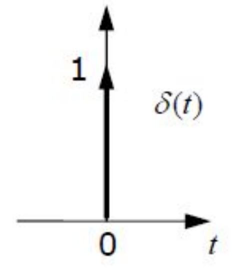
Свойства:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1;$

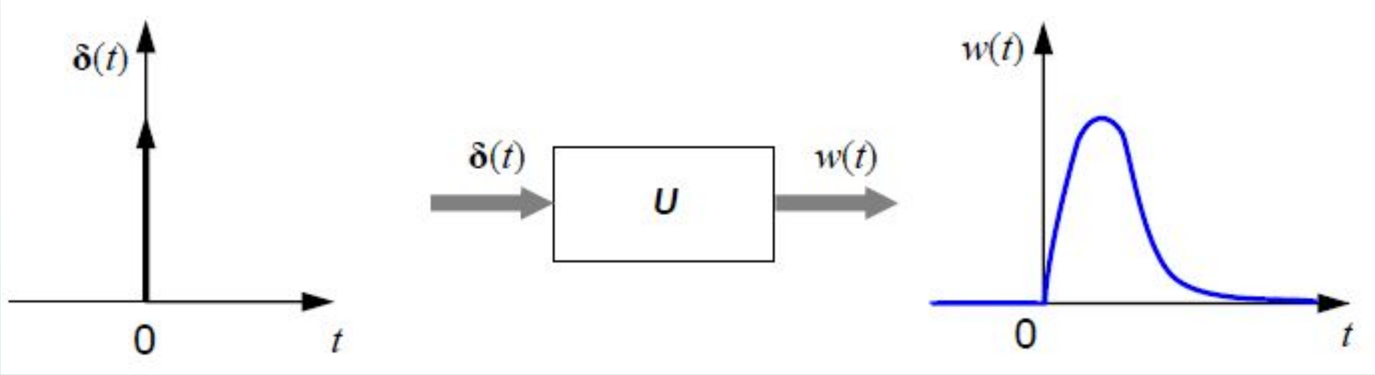
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-\tau)dt = \varphi(\tau);$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt = \varphi(0);$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)w(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)w(\tau)d\tau .$$



Связь между характеристиками и воздействиями

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t);$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = w(t);$$

$$h(t) = \int_0^t w(t)dt\,;$$

Построение временных характеристик

Реакция системы на воздействие общего вида

$Z\{f(t)\} = F(s) = \frac{G_f(s)}{D_f(s)} \xrightarrow{\text{Лаплас}} D(s)Y(s) = G(s)F(s) + D_{\text{н}}(s); D_{\text{н}}(s)$ - полином, отвечающий предначальным условиям, т. к. $\bar{y}(0^-) \neq 0$.

$$y(t) = Z^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{st}dt$$

$Y(s) = \frac{G_y(s)}{D_y(s)} = \frac{G(s)}{D(s)}F(s) + \frac{D_{\text{н}}(s)}{D(s)}$ $\quad y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} Res\, Y(S_i)e^{s_i t}$ - для простых полюсов

Изображение вынужденного движения

Свободная составляющая

Вычет функции

$Res\, Y(S_i) = C_i = \frac{G_y(s_i)}{D'_y(s_i)}$ - значение точки полюса. $D'_y(s_i) = \frac{dDy(s)}{ds}$. $y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} C_i e^{s_i t}$

$y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} \frac{C_i}{s-s_i}$ - для простых полюсов

Реакция системы на воздействие общего вида

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{G(s_i)}{D'(s_i)} \frac{G_f(s_i)}{D_f(s_i)} e^{s_i t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{G(s_j)}{D'(s_j)} \frac{G_f(s_j)}{D_f(s_j)} e^{s_j t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{D_n(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i t} =$$

$$= y_c(t) + y_{\text{уст}}(t) + y_{\text{св}}(t)$$

$Re(s) < 0, \quad C_i e^{s_i t}{}_{t\to\infty} \to 0$, то $y(t) \to y_{\text{уст}}(t)$; s_i - простые полюсы ПФ;

s_j - простые полюсы изображения воздействия F.

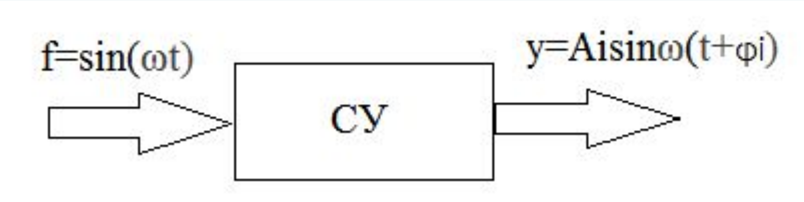
$y_c(t)$ - собственная сопровождающая или переходная составляющая вынужденного движения, происходящая из-за ненулевых посленачальных условий, вызванных воздействием. Зависит от полюсов ПФ.

$y_{\text{уст}}(t)$ - установившаяся составляющая вынужденного движения, которая зависит от полюсов изображения воздействия.

$y_{\text{уст}}(t)$ - свободная составляющая, которая зависит от полюсов ПФ.

Частотные характеристики.

- ***Частотная характеристика*** – зависимость параметрических установившихся реакций на гармонические воздействия всех частот.



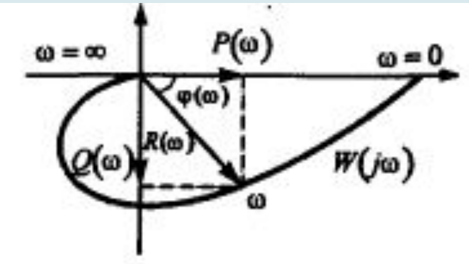
- ***Комплексная частотная характеристика - W(jω).***

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = R(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega)[cos\varphi(\omega) + jsin\varphi(\omega)]$$

$$P(\omega) = Re\,W(j\omega); Q(\omega) = Jm\,W(j\omega) = R(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

$$R(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$



Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) - Зависимость и фазы выходного сигнала от частоты входного;

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ $R(\omega)$) – амплитуды выходного сигнала от частоты входного;

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ $\varphi(\omega)$) – зависимость фазы выходного сигнала от частоты выходного.

Логарифмические частотные характеристики

- Пусть АЧХ изменяется от 0,001 Гц до 100 МГц, так что амплитуда лежит в диапазоне от 10^6 до 0. Единицей отсчета на логарифмической оси частот является декада – диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу).. В таком случае вводят логарифмические частотные характеристики или диаграмма Боде.

а) ЛАЧХ. $L(\omega) = 20lg|W(j\omega)| = 20lgR(\omega)$.

б) ЛФЧХ. $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$