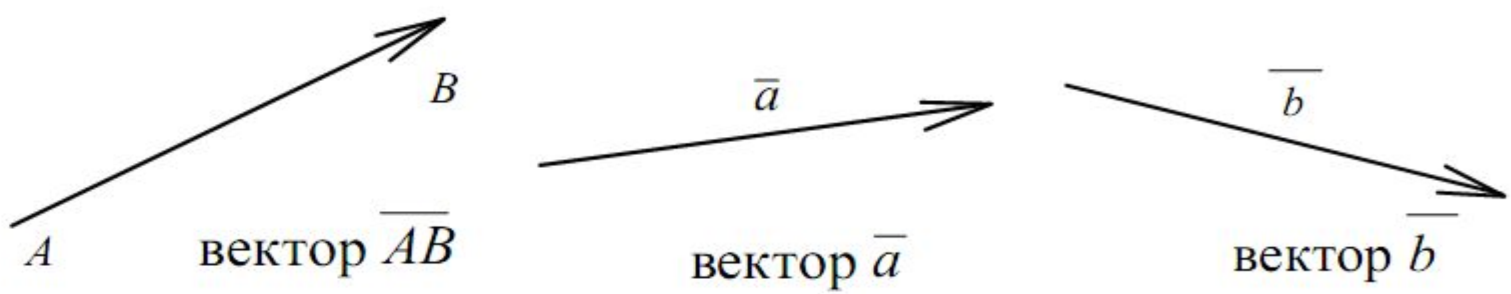
Векторная алгебра.
(1 часть)

1. Векторы на плоскости и в пространстве

Вектор (в пространстве, на плоскости, на прямой) – это направленный отрезок, т.е. отрезок ***AB***, у которого одна из ограничивающих его точек ***A*** принимается за начало, а вторая ***B*** – за конец.



Модулем вектора (длиной вектора) называется длина отрезка :

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

$$\left|\vec{0}\right| = 0$$

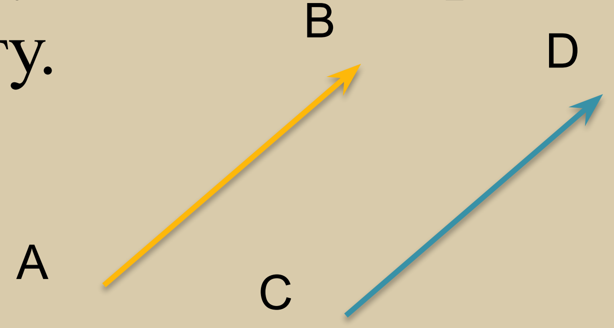
! Направление нулевого вектора не определено.

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***равными***: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если:

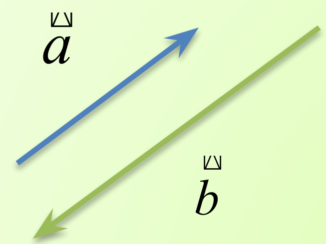
1) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых;

2) имеют одинаковые длины ($\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$) и одинаково направлены.

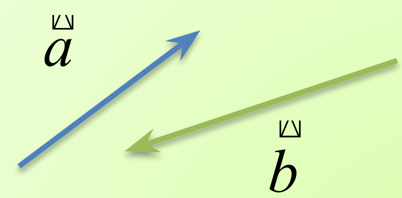
! Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.



Два вектора $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В противном случае, они называются ***неколлинеарными***.



Коллинеарные векторы

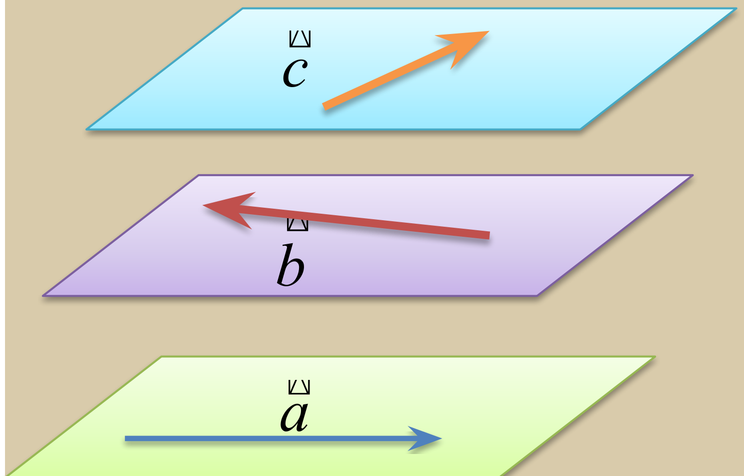


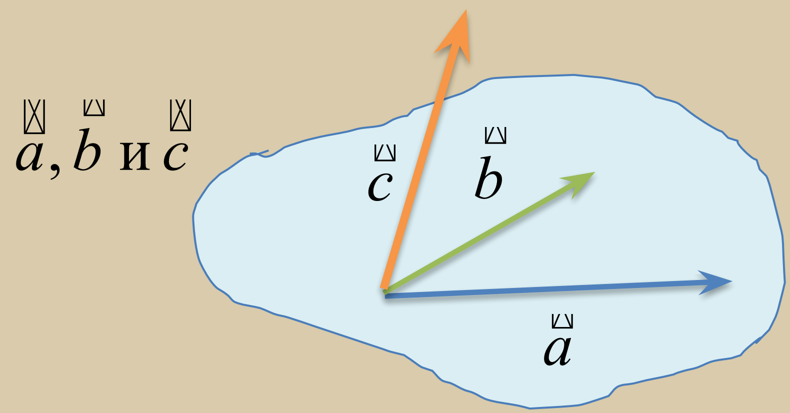
Неколлинеарные векторы

! Нулевой вектор коллинеарен всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.

! Вектор называется ***коллинеарным*** прямой ***l***, если этот вектор лежит либо на прямой ***l***, либо прямой, параллельной ***l***.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях. В противном случае, они называются ***некомпланарными***.





Компланарные векторы

Некомпланарные векторы

! Если хоть один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ нулевой вектор, то эти векторы компланарны.

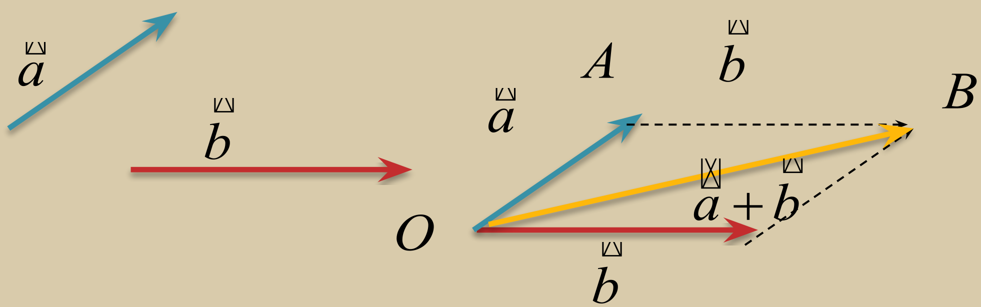
! Множество всех свободных векторов на прямой будем обозначать R^1, на плоскости - R^2, в пространстве - R^3.

! Вектор равный исходному по длине и имеющий противоположное направление называется ***противоположным вектором.***

$$-\vec{a}$$

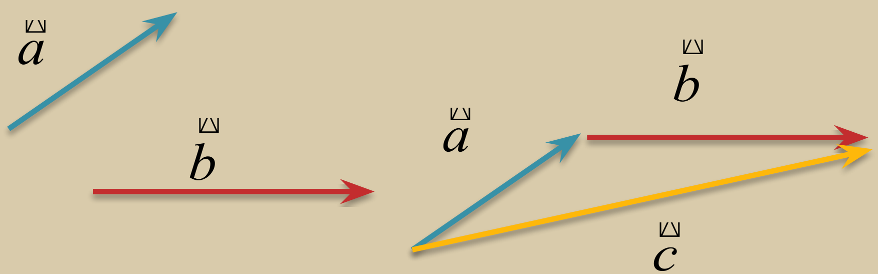
2. Линейные операции над векторами

- Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и приложим вектор к этой точке, получим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.
- Затем отложим от точки A вектор $\vec{b}$, получим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется ***суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



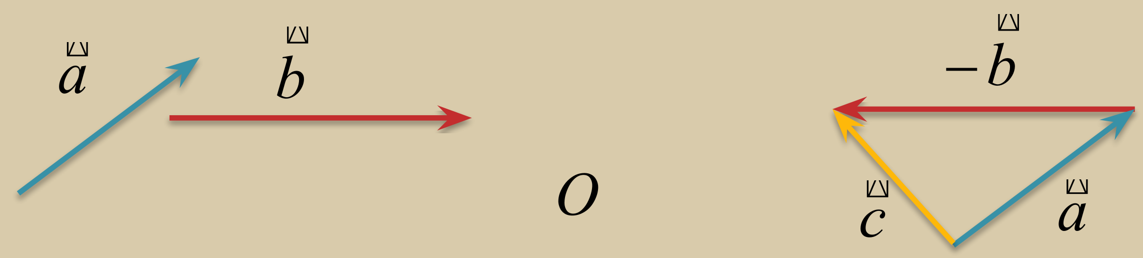
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

Правило параллелограмма



Правило треугольника

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} - \vec{b}$ и определяется как сумма вектора $\vec{a}$ и противоположного вектора $-\vec{b}$.

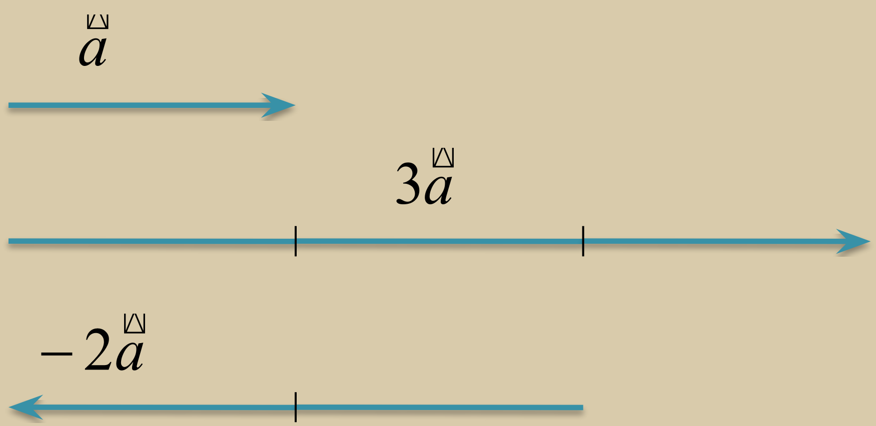


$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, длина которого равна числу $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и который имеет направление вектора $\vec{a}$, если λ>0, и противоположное направление ($-\vec{a}$), если λ < 0.

Обозначается: $\lambda\vec{a}$.

Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.



3. Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
4. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$
5. $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$
6. $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1(\lambda_2\vec{a})$
7. $a+0=a+0=a$
8. $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$
9. $|\vec{a}+\vec{b}|\ge|\vec{a}|-|\vec{b}|$

4. Разложение векторов на плоскости

Теорема: Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ –

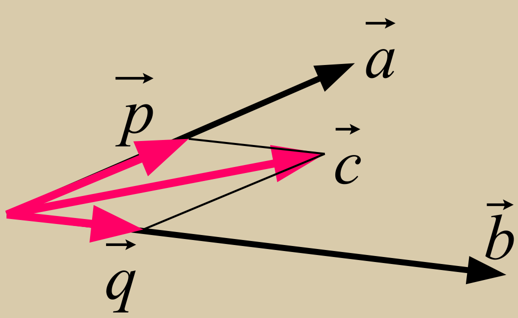
неколлинеарные, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарные.

Тогда найдутся такие постоянные λ и μ ,что

$$\boxed{\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}}$$

Такое разложение единственное.

Доказательство:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{c} = \vec{p} + \vec{q} \\ \vec{p} = \lambda\vec{a} \\ \vec{q} = \mu\vec{b} \end{array}\right| \Rightarrow \vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

Докажем единственность.

Предположим, что разложение не единственно, тогда:

$$- \begin{array}{l} \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \\ \vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} \end{array}$$

(хотя бы одно из неравенств $\lambda \neq \lambda_1$ и $\mu \neq \mu_1$ выполнено)

$$\vec{0} = (\lambda - \lambda_1)\vec{a} + (\mu - \mu_1)\vec{b}$$

$\mu \neq \mu_1$

$$\Downarrow$$

$$\vec{b} = -\frac{(\lambda - \lambda_1)}{(\mu - \mu_1)}\vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$$

(противоречие)

5. Разложение векторов в пространстве

Теорема: Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарные.

Тогда найдутся такие постоянные $\lambda, \mu, \gamma,$

что любой вектор $\vec{d}$ можно записать в виде

$$\boxed{\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}}$$

(разложить по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).

Такое разложение единственное.

6. Базис и линейная комбинация векторов

Базисом в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\vec{e_1} + \beta\,\vec{e_2} + \gamma\,\vec{e_3}$, то числа α, β и γ - называются ***компонентами*** или ***координатами*** вектора в этом базисе.

Свойства:

1. Равные векторы имеют одинаковые координаты.

2. При умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\vec{e_1} + \beta\,\vec{e_2} + \gamma\,\vec{e_3}) = (\lambda\alpha)\vec{e_1} + (\lambda\beta)\,\vec{e_2} + (\lambda\gamma)\,\vec{e_3}$$

3. При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3} \qquad \vec{b} = \beta_1\vec{e_1} + \beta_2\vec{e_2} + \beta_3\vec{e_3}$$

$$(\alpha_1 + \beta_1)\vec{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e_3}$$

Если $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$- некоторая система векторов пространства R (R^1, R^2 или R^3), тогда любой вектор вида $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$ называется ***линейной комбинацией векторов***

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, *где* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ –

некоторые действительные числа, называемые ***коэффициентами линейной комбинации***.

! Если какой-либо вектор представляется в виде линейной комбинации некоторых векторов, то говорят, что он ***разложен*** по этим векторам.

Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется равенство $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, то векторы называются ***линейно независимыми***.

Свойства:

1. Если среди векторов есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

6. Любые 4 вектора линейно зависимы.