

Елементи математичної логіки

Тема уроку

“ Висловлювання та операції над ними ”.

Мета:

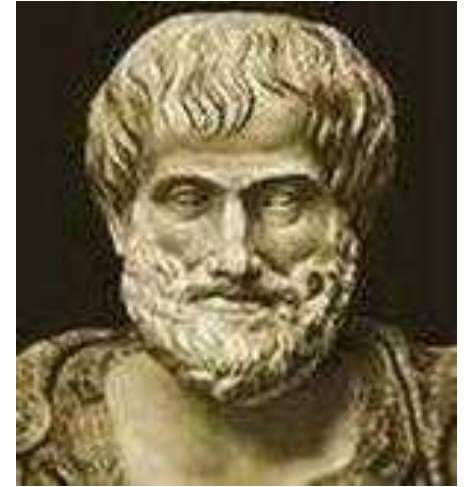
- Познайомити учнів з означенням “ математичної логіки ”;
- Ввести поняття: висловлювання, функція істинності, логічні операції;
- Розглянути логічну структуру теорем;
- Навчати складати таблиці істинності
- Розвивати логічне мислення.

План

1. Вступ.
2. Логічні функції.
3. Логічні операції.
4. Складання таблиці істинності.
5. Підсумок уроку (рефлексія).
6. Повідомлення домашнього завдання.

Логіка - наука о формах і способах мислення.

Основи логіки були закладені роботами вченого і філософа **Аристотеля** (384 -322рр. до н.е.).



Він намагався першим знайти відповідь на питання «Як ми мірнуємо», вивчав правила мислення. Аристотель вперше дав систематичне викладення логіки.

Він проаналізував людське мислення, його **форми - поняття, судження, умовиводи.**

Так виникла **формальна логіка.**

Логічні функції (логічні формули) – складні логічні вирази утворені з простих та пов’язані логічними операціями і, або, НЕ и др.)

Висловлення **“Всі миші та кішки з хвостами”** є складним та складається з двох простих висловлювань

A=“Всі миші з хвостами” та B=“Всі кішки з хвостами”

Його мажна записати у вигляді логічної функції, значення якої істинне :

$$F(A,B)=A \text{ та } B$$

В математичній логіці не розглядається конкретний зміст висловлювання, важливо тільки істинне воно або хибне. Тому висловлення можна представити змінною величиною, значення якої може бути лише **істинне (1)** або **хибне (0)**.

Логічні операції

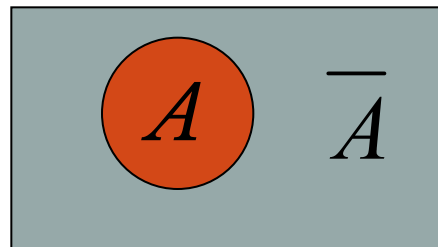
1. заперечення (інверсія).

Позначення : НЕ A , $\neg A$, \overline{A}

Таблиця істинності:

A	\overline{A}
0	1
1	0

Діаграма Ейлера-Венна



$A = \{\text{Діти люблять іграшки}\}$ $\overline{A} = \{\text{Діти **НЕ** люблять іграшки}\}$

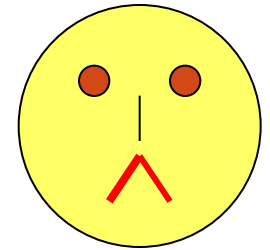
$A = \{\text{множина учнів **ЗЗ** групи}\}$

$\overline{A} = \{\text{множина учнів **НЕ** **ЗЗ** групи}\}$

2. Логічне множення (Кон'юнкція) Позначення:

$\text{И}, \wedge, \&, \bullet$

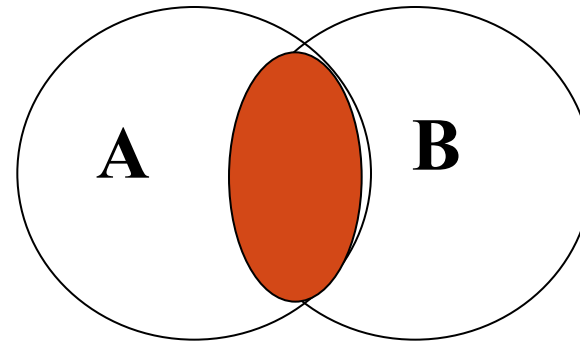
$$F = A \wedge B$$



Таблиця істинності:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Діаграма Ейлера-Венна



$A = \{\text{множина тварин}\}$

$B = \{\text{множина свійських тварин}\}$

$F = A \wedge B = \{\text{коза, корова, поросся}\}$

3. Логічна сума (Диз'юнкція)

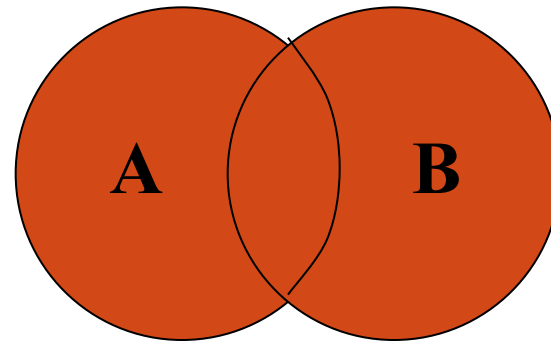
Позначення: або, \vee , +, |

$$F = A \vee B$$

Таблиця істинності:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

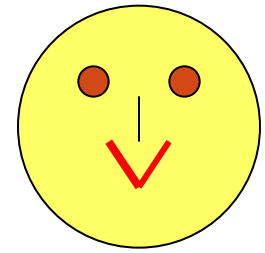
Діаграма Ейлера-Венна



$A = \{\text{множина учнів 33 групи}\}$

$B = \{\text{множина учнів 34 групи}\}$

$F = A \vee B = \{\text{множина учнів 33 і 34 груп}\}$



4. ІМПЛІКАЦІЯ (логічне слідування)

Обозначение: $A \rightarrow B$, $A \Rightarrow B$

Таблиця істинності:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Імплікація – логічна операція, результат якої є **хибним** за умови, **що A – істинне, а B – хибне**, а в усіх інших випадках результат операції є істинним.

умова \Rightarrow наслідок

ЯКЩО, ... **ТО ...**

Якщо буде дощ, то ми не підемо на вулицю.

Якщо я буду лінуватись, то отримаю низьку оцінку.

5. ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ (рівнозначність) -

логічна операція, яка ставить у відповідність кожним двом простим висловлюванням складене висловлення, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення є одночасно істинними або одночасно хибними.

Позначення: $A \sim B$, $A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$, $A = B$

Таблиця істинності:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Чайник нагріває воду тоді і тільки тоді, коли він увімкнений.

Ми дихаємо свіжим повітрям тоді і тільки тоді, коли гуляємо в парку.

Приоритет логічних операцій:

1. $()$
2. НЕ \neg
3. І $\&$
4. АБО \vee
5. \rightarrow
6. \leftrightarrow

Розв'язати задачі:

Визначте, в якому порядку необхідно обчислювати значення логічного виразу:

$$1) \neg^1 A \&^3 \neg^2 B$$

$$2) A^2 \& (B^1 \& C)$$

$$3) (A^1 \& B)^4 \vee (C^3 \&^2 \neg D)$$

$$4) A^2 \vee^1 \neg^3 D \vee B$$

$$5) A \rightarrow^3 (B \leftrightarrow^2 \neg^1 A)$$



Побудова таблиці істинності для логічного виразу

*Таблицю, яка показує яких значень приймають складені висловлювання при всіх сполученнях простих висловлювань, які входять в них називають **таблицею істинності** складеного висловлювання (логічної формули).*

За формулою логічної функції легко розрахувати її таблицю істинності, дотримуючись пріоритету логічних операцій та дій в дужках.

Побудуємо таблицю істинності для наступної функції:

$$F(A, B, C) = A \vee (\bar{C} \wedge B)$$

A	B	C	\bar{C}	$\bar{C} \wedge B$	$A \vee (\bar{C} \wedge B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Завдання. Побудувати таблицю істинності для наступних функцій:

$$1) F = \bar{A} \vee B$$

A	B	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

$$3) F = \overline{(A \vee B)}$$

$$2) F = \bar{A} \wedge B$$

A	B	\bar{A}	$\bar{A} \wedge B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

A	B	$A \vee B$	$\overline{(A \vee B)}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Рівносильні логічні вирази

Логічні вирази, в яких останні стовбці в таблиці істинності співпадають називаються *рівносильними*.

Знак « $=$ » - рівносильність.

Приклад 1. Довести рівносильність логічних виразів:

и

$$\overline{A \wedge B} \quad \overline{A \vee B}$$

Таблиця істинності

$$\overline{A \wedge B}$$

Таблиця істинності

$$\overline{A \vee B}$$

A	B	\overline{A}	\overline{B}	$A \wedge B$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Следовательно, $\overline{A \wedge B} = \overline{A \vee B}$

В алгебрі висловлювань всі логічні операції можуть бути зведені до трьох базових :
логічному множенню, логічному додаванню, логічному запереченню.

Приклад. Довести методом порівняння ТІ, що

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

A	B	A => B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	\bar{A}	$\bar{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Завдання: Довести, користуючись ТТ, що операція еквівалентності рівносильна виразу



$$A \sim B = (A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B)$$

A	B	$A \sim B$	\bar{A}	\bar{B}	$A \vee \bar{B}$	$\bar{A} \vee B$	$(A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1

Підсумок уроку

Питання для роздуму

1. Яка кількість логічних операцій двох аргументів існує і чому?

Відповідь: $N = 2^4 = 16$, так як кожна логічна функція двох аргументів має чотири можливих набори значень.

2. Які логічні функції двох аргументів мають свої назви?

Відповідь : Інверсія, кон'юнкція, диз'юнкція

3. Яка кількість логічних операцій трьох аргументів існує?

Відповідь : $N = 2^8 = 256$, так як кожна логічна функція двох аргументів має 8 можливих наборів значень.

Домашнє завдання

- Вивчити означення логічних операцій
- Переглянути розібрані приклади
- Розв'язати № 2.3, 2.10, 2.13(6,8)