

# §4. Системы линейных уравнений

## П. 4.1 Основные понятия

**Определение.** В общем случае линейное уравнение имеет вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad , \text{ где}$$

$a_1, a_2, \dots, a_n, b$  – постоянные величины,  
 $x_1, x_2, \dots, x_n$  – переменные.

Любой  $n$ -мерный вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется *решением* уравнения, если при подстановке его координат уравнение обращается в тождество.

Два линейных уравнения называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

**Замечание.** Равносильные системы получаются при элементарных преобразованиях, проводимых над строками системы.

Рассмотрим случаи, при которых возможны решения линейного уравнения:

- $a_1 = a_2 = \dots = a_n = b = 0$  В этом случае уравнение имеет вид

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$$

и называется *тривиальным*. Данное уравнение имеет бесконечное множество решений; ему удовлетворяет любой  $n$ -мерный вектор.

- $a_1 = a_2 = \dots = a_n, b \neq 0$  В этом случае уравнение имеет вид

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$$

и называется *противоречивым*. Данное уравнение не имеет решений; ему не удовлетворяет ни какой  $n$ -мерный вектор.

- Хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Пусть  $a_1 \neq 0$ .

В этом случае можно разрешить уравнение относительно, например,  $x_1$

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} x_n;$$

при этом  $x_1$  называется *разрешенной переменной*, а  $x_2, x_3, \dots, x_n$  называются свободными переменными если им придать любые конкретные значения  $x_2 = k_2, x_3 = k_3, \dots, x_n = k_n$ , то вектор  $K = (k_2, k_3, \dots, k_n)$  является решением исходного уравнения. При подстановки его в уравнение, получим

$$a_1 \left( \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} k_2 - \frac{a_3}{a_1} k_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1} k_n \right) + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b - a_2 k_2 - a_3 k_3 \dots - a_n k_n + a_2 k_2 + a_3 k_3 \dots + a_n k_n = b \Leftrightarrow b = b.$$

Уравнение обращается в тождество. Поскольку свободные переменные выбраны произвольно, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

**Определение.** Системой линейных алгебраических уравнений, содержащих  $m$  уравнений и  $n$  переменных, называется система

вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) называются **коэффициентами**

системы, а числа  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – **свободными членами**.

Такую систему лучше записывать в **матричной форме**  $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

– столбец переменных ,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

– столбец свободных членов.



**Определение.** *Расширенной матрицей* системы называется матрица  $\overline{A}$  коэффициентов, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

**Определение.** *Решением системы линейных алгебраических уравнений* называется  $n$ -мерный вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , который является решением каждого уравнения системы.

# Классификация систем линейных уравнений по количеству решений

- **Определение.** Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.
- **Определение.** Система уравнений называется *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.
- **Определение.** Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение.
- **Определение.** Совместная система называется *неопределенной*, если она имеет бесконечное множество решений.

## П.4.2 Разрешенная система уравнений. Общее, частное и базисное решение.

- **Определение.** Переменная  $x_j$  называется *разрешенной* для системы уравнений, если она входит в одно из уравнений системы с коэффициентом  $+1$ , а в остальные уравнения не входит, (т.е. входит с коэффициентом, равным  $0$  )
- **Определение.** Система уравнений называется *разрешенной*, если каждое уравнение системы содержит разрешенную переменную, среди которых нет совпадающих.
- **Определение.** Разрешенные переменные, взятые по одному из каждого уравнения системы, образуют *полный набор* разрешенных переменных системы
- **Определение.** Разрешенные переменные, входящие в полный набор, называются *базисными*, а переменные, не входящие в этот набор – *свободными*.



В общем случае разрешенная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 & + a_{1(m+1)}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 & + a_{2(m+1)}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots & \dots \\ x_m & + a_{m(m+1)}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- **Определение.** *Общим решением* разрешенной системы уравнений называется совокупность выражений разрешенных переменных через свободные члены или свободные переменные, т.е.

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1(m+1)}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 - a_{2(m+1)}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots & \dots \\ x_m = b_m - a_{m(m+1)}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n. \end{cases}$$

- **Определение.** *Частным решением* системы уравнений называется решение, полученное из общего при конкретно заданных значениях свободных переменных.
- **Определение.** *Базисным решением* системы уравнений называется частное решение, полученное из общего при нулевых значениях свободных переменных.
- **Определение.** Базисное решение системы уравнений называется *вырожденным*, если количество его координат, отличных от нуля, меньше количества разрешенных переменных.
- **Определение.** Базисное решение системы уравнений называется *невырожденным*, если количество его координат, отличных от нуля, равно количеству разрешенных переменных системы, входящих в полный набор.

**Теорема 4.1.** Разрешенная система уравнений всегда совместна; причем если система не имеет свободных переменных, то она определена; если же имеется хотя бы одна свободная переменная, то система не определена.

## *Пример 4.1*

Найти общее, базисное и какое-либо частное решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 10, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20. \end{cases}$$

## П.4.3. Элементарные преобразования систем линейных уравнений

Системы линейных уравнений приводятся к равносильным разрешенным системам с помощью элементарных преобразований. Рассмотрим две теоремы об элементарных преобразованиях.

**Теорема 4.2.** Если какое-либо уравнение системы умножить на некоторое отличное от нуля число, а остальные уравнения оставить без изменения, то получится система, равносильная данной.

**Теорема 4.3.** Если к какому-либо уравнению системы прибавить другое, а все остальные уравнения оставить без изменения, то получится система равносильная данной

*Следствие из теорем.* Если какому-либо уравнению прибавить другое, умноженное на некоторое число, а все остальные уравнения оставить без изменения, то получится система равносильная данной.



## П.4.4. Преобразование Жордана. Формулы перерасчета коэффициентов системы уравнений



### **Жордан**

(Jordan) Мари Эдмон Камиль (05.01.1838, Лион, — 21.01.1922, Париж), французский математик, член Института Франции (1881). Издатель "Journal de mathématiques pures et appliquées" (1885—1921), был член-корреспондентом Петербургской Академии Наук (1895). Работы **Жордана** относятся к алгебре, теории функций, а также топологии и кристаллографии. С именем **Жордана** связаны: теорема Жордана — Гёльдера о композиционных рядах групп, нормальная (жорданова) форма матриц, [Жордана кривая](#); им введено понятие функции с ограниченным изменением **Жордана** принадлежат первый систематический курс теории групп и теории Галуа (1870) и трёхтомный курс анализа (1882—1887).

Преобразования **Жордана** с разрешающим элементом  $a_{lk} \neq 0$  позволяет получить для системы уравнений разрешенную переменную  $x_k$  в уравнении с номером  $l$ .

Типы преобразований **Жордана**:

- Уравнение с разрешающим элементом  $a_{lk}$  делится на этот элемент;
- Уравнение с разрешающим элементом  $a_{lk}$  умножается на подходящие множители и прибавляется ко всем другим уравнениям для того, чтобы исключить переменную  $x_k$  из этих уравнений.

Запишем два уравнения: уравнение с номером  $l$ , содержащее разрешающий элемент  $a_{lk}$ , и любое другое уравнение с номером  $i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + \dots + \textcircled{a_{ij}}x_j + \dots + a_{ik}x_k + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots \\ a_{l1}x_1 + \dots + a_{lj}x_j + \dots + \boxed{a_{lk}}x_k + \dots + a_{ln}x_n = b_l, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \leftarrow \\ \times \left( -\frac{a_{ik}}{a_{lk}} \right) \end{array} \right.$$

При делении уравнения с номером  $l$  на  $a_{lk}$ , его коэффициенты пересчитываются по формулам

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{lk}} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad b'_l = \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

Чтобы исключить  $x_k$  из уравнения с номером  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m; i \neq l$ ), нужно уравнение с номером  $l$  умножить на  $\left(-\frac{a_{lk}}{a_{lk}}\right)$  и прибавить к этому уравнению. При этом коэффициенты уравнения с номером  $i$  пересчитываются по формулам

$$a'_{ij} = a_{ij} + a_{lj} \left(-\frac{a_{lk}}{a_{lk}}\right) = \frac{a_{ij}a_{lk} - a_{lk}a_{lj}}{a_{lk}}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; i \neq l; j = 1, 2, \dots, n);$$

$$b'_i = b_i + b_l \left(-\frac{a_{lk}}{a_{lk}}\right) = \frac{b_i a_{lk} - b_l a_{lk}}{a_{lk}}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; i \neq l).$$

Для того чтобы составить алгоритм решения системы уравнений методом **Жордана-Гаусса**, необходимо использовать две следующие теоремы.

**Теорема 4.4.** (о сокращении числа уравнений системы) Если система уравнений содержит тривиальное уравнение, то его можно исключить из системы; при этом получится система равносильная исходной.

**Теорема 4.5.** (о несовместности системы уравнений) Если система уравнений содержит противоречивое уравнение, то она несовместна.



## П.4.5. Алгоритм Жордана-Гаусса



ГАУСС, КАРЛ ФРИДРИХ (Gauss, Carl Friedrich) (1777-1855), немецкий математик, астроном и физик. Родился 30 апреля 1777 в Брауншвейге. В 1788 при поддержке герцога Брауншвейгского Гаусс поступил в закрытую школу Коллегиум Каролиnum, а затем в Гёттингенский университет, где обучался с 1795 по 1798. В 1796 Гауссу удалось решить задачу, не поддававшуюся усилиям геометров со времен Евклида: он нашел способ, позволяющий построить с помощью циркуля и линейки правильный 17-угольник. На самого Гаусса этот результат произвел столь сильное впечатление, что он решил посвятить себя изучению математики, а не классических языков, как предполагал вначале. В 1799 защитил докторскую диссертацию в университете Хельмштадта, в которой впервые дал строгое доказательство т. н. основной теоремы алгебры, а в 1801 опубликовал знаменитые *Арифметические исследования (Disquisitiones arithmeticae)*, считающиеся началом современной теории чисел и т.д.

## *Алгоритм Жордана-Гаусса.*

1. Проверяется, не является ли система несовместной. Если система содержит *противоречивое* уравнение, то она ***несовместна***.
2. Проверяется возможность сокращения числа уравнений. Если система содержит *тривиальное* уравнение, то ***его вычеркивают***.
3. Если система уравнений является *разрешенной*, то записываются общее решение системы и если необходимо частные решения.
4. Если система уравнений *не является разрешенной*, то в уравнении, не содержащем разрешенной переменной, выбирают разрешающий элемент и производят ***преобразование Жордана с этим элементом***.

Далее переходят к пункту 1.



## Пример 4.2

Решить систему методом Жордана-Гаусса. Найти общее и базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$$

## Пример 4.3

Решить систему методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

## П.4.5. Экономические приложения.

*Применение систем линейных уравнений при решении экономических задач.*

*Задача №1.* Фирмой было выделено 236 тыс. руб. для покупки 29 предметов для оборудования офиса: несколько компьютеров по цене 20 тыс. руб. за компьютер, офисных столов по 8,5 тыс. руб. за стол, стульев по 1,5 тыс. руб. за стул. Позже выяснилось, что в другом месте компьютеры можно приобрести по 19,5 тыс. руб., а столы – по 8 тыс. руб. (стулья по той же цене), благодаря чему на ту же сумму было куплено на 1 стол больше. Выяснить, какое количество единиц каждого единиц каждого вида оборудования было приобретено.

- Решение задачи №1: Пусть

$$x_1, x_2 \text{ и } x_3$$

– количества купленных компьютеров, столов и стульев. Тогда условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 29, \\ 20x_1 + 8,5x_2 + 1,5x_3 = 236, \\ 19,5x_1 + 8(x_2 + 1) + 1,5x_3 = 236. \end{cases}$$

## О т в е т задачи №1.

При экономичной  
закупке было  
приобретено

- 7 компьютеров,
- 10 столов,
- 13 стульев.

## Задача №2.

Малое предприятие по пошиву мужской одежды для свадебных торжеств при дизайнерской мастерской Татьяны Мухи в течение трех дней производила рубашки, костюмы и нижнее белье. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти дни:

День	Объем выпуска продукции(единиц)			Затраты (в тыс. руб.)
	Нижнее белье	Костюмы	Рубашки	
Первый	50	10	30	176
Второй	35	25	20	168
Третий	40	20	30	184

Найти себестоимость единицы продукции каждого вида



# Р е ш е н и е задачи №2.

Пусть  $x_1, x_2$  и  $x_3$  – количества сшитых комплектов нижнего

белья, костюмов и рубашек. Тогда условие задачи можно записать в виде

системы:

$$\begin{cases} 50x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 176, \\ 35x_1 + 25x_2 + 20x_3 = 168, \\ 40x_1 + 20x_2 + 30x_3 = 184. \end{cases}$$

О т в е т. Себестоимости: комплекта нижнего белья – 1,8 тыс. руб., костюма – 2,6 тыс. руб., рубашки – 2 тыс. руб.

# Задача №3. (Линейная модель обмена или международной торговли)

Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  вектор доходов регионов страны (национальных доходов стран)  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ,  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  – структурная матрица торговли, где  $a_{ij}$  – доля дохода региона (национального дохода), которую регион (страна)  $S_j$  тратит на покупку товаров у региона (страны)  $S_i$ , причем

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1.$$

Для сбалансированной торговли необходимо найти такой равновесный вектор доходов (национальных доходов)  $x$ , чтобы  $Ax = x$ .

Задача свелась к отысканию собственного вектора, отвечающего собственному значению  $\lambda = 1$ .

Структурная матрица торговли четырех регионов (Ростовской области, Краснодарского края, Ставропольского края, Московской области) имеет

вид: 
$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix},$$
 где значения приведены в

млрд. руб.

# Решение задачи №3:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim E \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & -0.6 \end{bmatrix}$$

# Решение задачи №3:

Необходимо найти собственный вектор  $x$ , отвечающий

собственному значению  $\lambda = 1$ , решив матричное уравнение  $(A - E)x = 0$ , или

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1.157024793 \\ 0 & 1 & 0 & -1.20661157 \\ 0 & 0 & 1 & -1.818181818 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

методом Гаусса. Найден вектор  $x = (1,16; 1,21; 1,82; 1)$ . Полученный

результат означает, что сбалансированность торговли четырех регионов

достигается примерным соотношением их доходов  $1,16 : 1,21 : 1,82 : 1$ .





- *Пример № 4.4.* Найти фундаментальные решения однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 4x_5 + 8x_6 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 4x_5 + 12x_6 = 0, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 + x_5 - 7x_6 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 5x_5 - 7x_6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 3x_5 + x_6 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 9x_6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$$



*КРОНЕКЕР, ЛЕОПОЛЬД (Kronecker, Leopold) (1823-1891), немецкий математик, известный своими работами по высшей алгебре и теории линейных уравнений, один из приверженцев "арифметизации математики". Родился 7 декабря 1823 в прусском городе Лигниц (ныне Легница, Польша). По окончании гимназии поступил в Берлинский университет, где в 1845 получил докторскую степень за работу по теории чисел. Интерес к этой науке пробудился у Кронекера под влиянием его гимназического учителя, впоследствии известного математика Э.Куммера.*

*До 30 лет Кронекер занимался семейным бизнесом, связанным с сельским хозяйством, а математике посвящал лишь свободное время. Удачно устроив свои дела и став зажиточным человеком, он в 1855 поселился в Берлине. Там в течение многих лет преподавал в университете.*

- Главные результаты, полученные Кронекером, относятся к теории эллиптических функций, теории алгебраических уравнений и теории чисел.



**Алоизий Капелли** — итальянец, доктор прав и философии, занимал кафедру права гражданского и канонического в Пизанском университете (1797—1801 гг.); по оставлении кафедры служил чиновником во Флоренции и Вольтерре; в 1804 г. занял в Виленском университете кафедру гражданского и уголовного права; с 1808 г. преподавал в нем итальянский язык; 1815 г. читал в университете и главной при нем духовной семинарии каноническое право в очень либеральном духе (по отзыву его учеников — Иосифа Семашки и Антония Зубки); два раза был деканом факультета словесных наук и изящных искусств (1811—1817 и 1827—1832); по закрытии университета, преподавал (и 1833—1838 гг.) каноническое право в Виленской римско-католической академии; издал несколько книг и брошюр по гражданскому, уголовному и каноническому праву и по истории итальянской литературы на латинском и итальянском языках; пользовался особенными симпатиями студентов.

# П.4.7. Общая теория систем линейных уравнений.

- **Теорема 4.7.** (Кронекера - Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.
- **Теорема 4.8.** Если ранг расширенной матрицы совместной системы линейных уравнений равен количеству переменных, то система имеет единственное решение.
- **Теорема 4.9.** Если ранг расширенной матрицы совместной системы линейных уравнений меньше количества переменных, то система имеет бесконечное множество решений.

- *Пример № 4.5.* Найти общее, базисное и фундаментальные решения системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 12, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 10x_5 = 11, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 11x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$