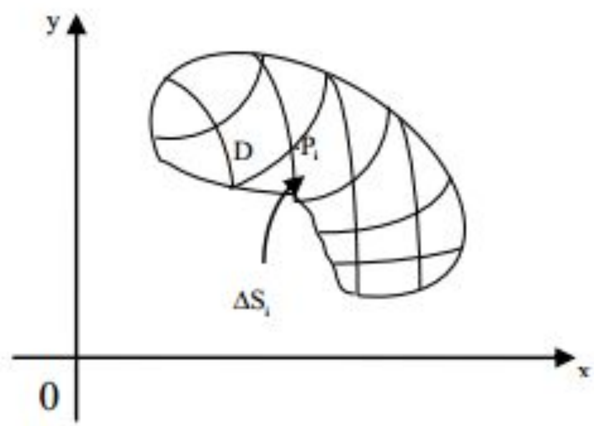
Лекция 1. Двойной интеграл

1.1. Определение двойного интеграла. Его геометрический смысл

Пусть в некоторой замкнутой области D на плоскости xOy задана ограниченная функция двух переменных z = f(x, y).

1. Область D (рис. 1.1) разобьем произвольным образом на n частей $\Delta S_1,\ \Delta S_2, \ldots \Delta S_n$.
$\Delta S_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ - площади этих подобластей.
d_i - диаметры подобластей (расстояния между наиболее удаленными точками границы области ΔS_i
$\max d_i$ - наибольший диаметр подобластей.



2. В каждой из областей ΔS_i возьмем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ внутри или на границе ΔS_i . И вычислим значение функции в этой точке $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$

3. Значение $f(P_i)$ умножим на площадь ΔS_i - меру элементарной области ΔS_i (В случае функции одной переменной y = f (x) мерой элементарной области была длина Δx_i отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, в случае функции двух переменных за меру области ΔS_i принимается ее площадь).

1.1. Определение двойного интеграла. Его геометрический смысл. Продоложение

4. Составим сумму произведений вида $f(P_i)\Delta S_i$:

$$S_n = f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \ldots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

(1) - интегральная сумма для функции $z = f(x, y)$ по области D.

5. Измельчая разбиение, находим предел I интегральной суммы S_n при условии, что $\max d_i \to 0$, следовательно, $n \to \infty$

$$I = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} S_n = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\max d_i \to 0$и этом $n \to \infty$) и если этот предел не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные площадки , ни от выбс S_i точки , то он $P_i \in \Delta S_i$тся *двойным интегралом* от функции по области D и обознача $z = f(x, y)$ юм

$$\iint_D f(P)dS \quad \text{или} \quad \iint_D f(x, y)dxdy.$$

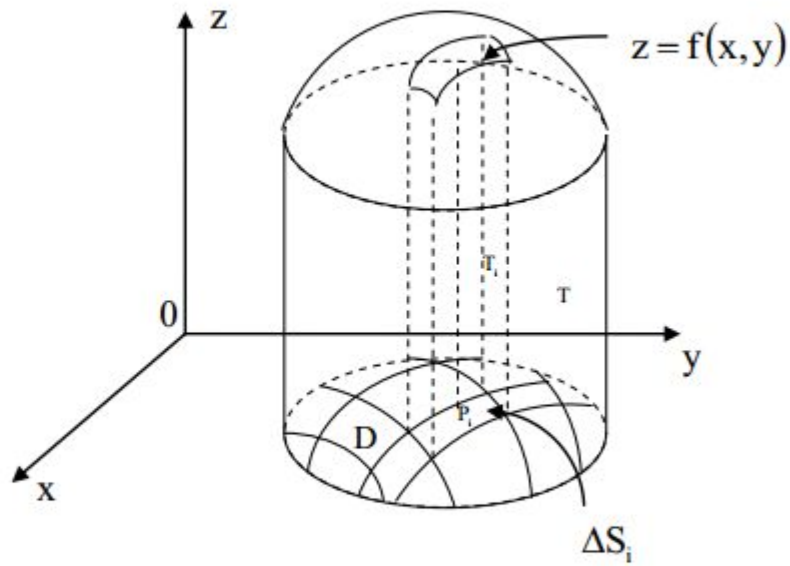
$f(x, y)dxdy$ - *подынтегральное выражение*;
$f(x, y)$ – *подынтегральная функция*;
$dS = dxdy$ – *элемент площади*;
D – *область интегрирования*;
x и y – *переменные интегрирования.*

$$\iint_D f(P)dS = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i . \qquad (2)$$

Теорема существования двойного интеграла. Всякая функция $z = f(x, y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области D, интегрируема в этой области.

1.1. Определение двойного интеграла. Его геометрический смысл. Продоложение

Рассмотрим в пространстве тело T, ограниченное снизу областью D, сверху поверхностью $z = f(x, y)$ такой, что функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D, с боков – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, и направляющей – границей области D . Такое тело будем называть цилиндрическим.



При разбиении основания ΔS_i цилиндрического тела – области D – на n частей $T_1, T_2, \ldots, T_n$ тело T окажется разбитым на n элементарных цилиндрических тел – столбиков с основаниями $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

. Объем T_i приближенно равен объему прямого цилиндра с тем же основанием и высотой $f(P_i)$: $\Delta V_i \approx f(P_i)\Delta S_i$.

Принимая объем V данного цилиндрического тела T приближенно равным объему V_n n – ступенчатого тела, получаем приближенное равенство

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i, \qquad (3)$$

$$V = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} V_n = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i .$$

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy . \qquad (4)$$

Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл $\iint_D f(x, y)\,dxdy$ от неотрицательной функции $f(x, y)$ дает объем соответствующего цилиндрического тела, верхней поверхностью которого служит поверхность $z = f(x, y)$.

1.2. Свойства двойного интеграла

1^0. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций $\iint\limits_D [f_1(x,y)+f_2(x,y)+\ldots+f_n(x,y)]dS =$

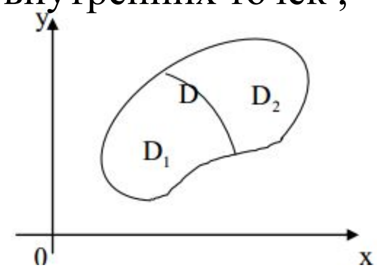
$$= \iint\limits_D f_1(x,y)dS + \iint\limits_D f_2(x,y)dS + \ldots + \iint\limits_D f_n(x,y)dS.$$

2^0. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла

$$\iint\limits_D af(x,y)dS = a\iint\limits_D f(x,y)dS.$$

1^0 и 2^0 - линейность интеграла.

3^0. (Аддитивность). Если область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то $\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS.$



4^0. (Монотонность интеграла). Если $f(x,y) \le \varphi(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dS \le \iint\limits_D \varphi(x,y)dS.$$

5^0. (Оценка интеграла по модулю) $\left|\iint\limits_D f(x,y)dS\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dS.$

6^0. (Теорема об оценке интеграла). Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области D, то двойной интеграл от нее удовлетворяет неравенствам: $m \cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le M \cdot S,$ где S – площадь области D.

7^0. (Теорема о среднем значении). В области D найдется по крайней мере одна точка $P(x,y)$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = f(P)\cdot S.$$

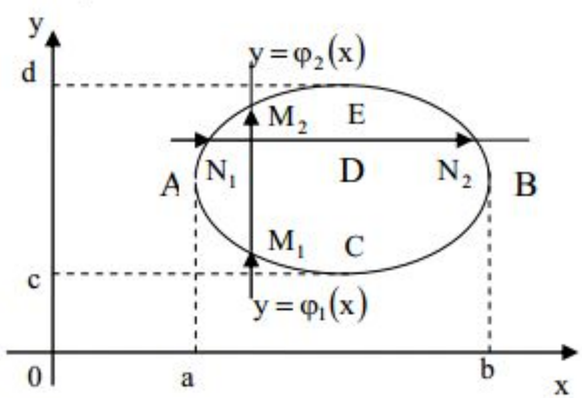
1.3. Вычисление двойного интеграла

Понятие о правильных областях. Двукратный интеграл

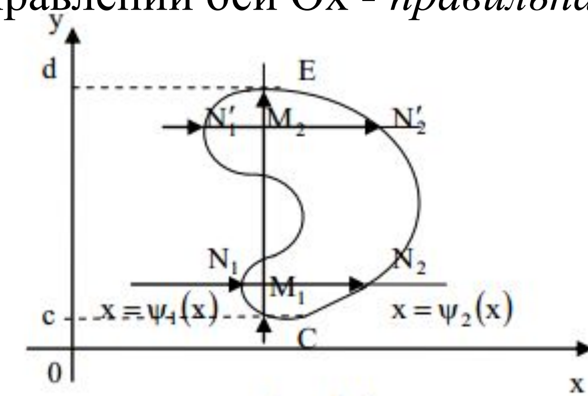
Область D называется *правильной* в направлении оси Oy (Ox), если любая прямая, параллельная оси Oy (Ox), пересекает границу области не более, чем в двух точках.

Для правильной в направлении оси Oy область нижняя из этих точек - *точка входа*, а верхняя – *точка выхода*. Для правильной в направлении оси Ox области *точка входа* – левая точка пересечения прямой с границей области, *точка выхода* – правая.

Область, правильная как в направлении оси Oy, так и в направлении оси Ox - *правильная*.



Область является правильной и в направлении оси Oy (при этом M_1 - точка входа, M_2 - точка выхода) и в направлении оси Ox (N_1 - точка входа, N_2 - точка выхода).



Область правильная только в направлении оси Ox (прямая M_1M_2 , параллельная оси Oy, пересекает границу в четырех точках).

Правильная в направлении оси Oy область D определяется $\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{cases}$ где $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ нижней (ACB) и верхней (AEB) линий границы,

x = a, x = b − уравнения прямых, параллельных оси Oy, касающихся границы в точках A и B (рис.слева).

Правильная в направлении оси Ox область D определяется $\begin{cases} c \le y \le d, \\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), \end{cases}$ где $x=\varphi_1(y)$ и $x=\varphi_2(y)$ - уравнения левой (CAE на рис. слева , $CN_1N_1'E$ на рис.справа) и правой (CBE на рис. слева, $CN_2N_2'E$ на рис.справа) линий границы, y = c и y = d − уравнения прямых, параллельных оси Ox и касающихся границы в точках C и E.

1.3. Вычисление двойного интеграла

Понятие о правильных областях. Двукратный интеграл

Продолжение

Двукратный или повторный интеграл от функции $f(x,y)$ по области D.

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx;$$

Вычисление: 1) Вычисляется интеграл в скобках: интегрирование ведется по y, а x считается постоянным. Получается некоторая функция от x

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Затем эта функция интегрируется по x в пределах от a до b:

Результат – число.

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)dx.$$

Двукратный интеграл обычно записывают в виде $I_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$

ПРИМЕР. Вычислить двукратный интеграл $I_D = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} (x-y)dy \right) dx.$

$$I_D = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{x^2} dx = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^2 = 0{,}8.$$

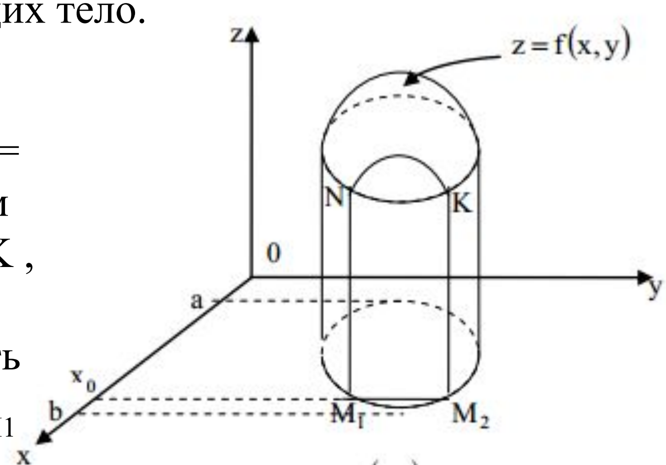
1.3. Вычисление двойного интеграла

Сведение двойного интеграла к двукратному

Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ - объем цилиндрического тела T, ограниченного снизу областью D,

сверху поверхностью $z=f(x,y)$

Объем тела равен $V=\int\limits_a^b S(x)dx$ где S(x) – площадь произвольного поперечного сечения тела, перпендикулярного к оси Ox, а x = a и x = b − уравнения плоскостей, ограничивающих тело.



Пусть D – правильная область.

Рассечем цилиндрическое тело T произвольной плоскостью $x = x_0$ ($a < x_0 < b$), параллельной плоскости yOz. В сечении имеем криволинейную трапецию M_1NKM_2, ограниченную кривой NK , уравнение которой $z = f(x_0, y)$, где y изменяется от ординаты т. M_1 до ординаты т. M_2 . M_1 - точка входа прямой $x = x_0$ в область D, а M_2 - точка выхода. M_1 лежит на линии $y = \phi_1(x)$, значит $y_{M1} = \phi_1(x_0)$; M_2 лежит на линии $y = \phi_2(x)$, значит, $y_{M2} = \phi_2(x_0)$.

Следовательно, площадь сечения - площадь криволинейной трапеции: $S(x_0)=\int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy$.

Так как x произвольно, то это выражение для площади S(x) любого сечения, перпендикулярного к оси Ox. Подставляя найденное S(x) в формулу для V получим

$$V=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (A)$$

(A) – выражение двойного интеграла через двукратный

1.3. Вычисление двойного интеграла

Сведение двойного интеграла к двукратному. Продолжение

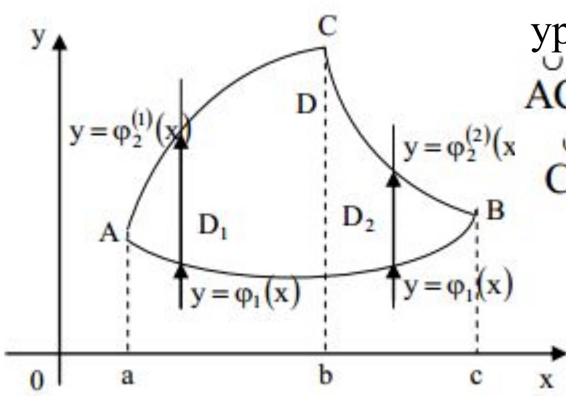
Аналогично, рассекая тело T плоскостями y = const (c ≤ y ≤ d), площадь S(y) любого сечения, перпендикулярного к оси Oy определяется $S(y)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$,

Тогда
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (Б)$$

В формуле (А) интегрирование выполняется вначале по y – в пределах $y_1=\varphi_1(x)$ до $y_2=\varphi_2(x)$,
при постоянном, но произвольном значении x, а затем по x – в пределах
интегрирование выполняется: внутренний интеграл берется по x (при фиксированном y), пределы интегрирования указывают границы изменения x, в общем случае зависящие от y; внешний интеграл берется по y, пределы интегрирования постоянны и указывают границы изменения переменной.

Если область интегрирования D является правильной в направлении оси Oy и в направлении оси Ox, то вычисление двойного интеграла можно производить по (А) или по (Б).

Если нижняя или верхняя (левая или правая) линии границы области D представлены различными выражениями, область следует разбить прямыми, параллельными Oy (или Ox). Затем воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла.



Верхняя граница имеет уравнение дуги:

$\overset{\smile}{AC}$: $y=\varphi_2^{(1)}(x)$ при $a\le x\le c$,

$\overset{\smile}{CB}$: $y=\varphi_2^{(2)}(x)$ при $c\le x\le b$,

Инт. представить в виде суммы двух интегралов по областям D_1 и D_2 (каждый по (А)):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$
$$=\left| D_1\begin{cases} a\le x\le c; \\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2^{(1)}(x);\end{cases} \quad D_2\begin{cases} c\le x\le b \\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2^{(2)}(x)\end{cases}\right. =$$
$$=\int\limits_a^c dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2^{(1)}(x)} f(x,y)dy+\int\limits_c^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2^{(2)}(x)} f(x,y)dy.$$

1.3. Вычисление двойного интеграла

Сведение двойного интеграла к двукратному. Продолжение

Аналогично, рассекая тело T плоскостями y = const (c ≤ y ≤ d), площадь S(y) любого сечения, перпендикулярного к оси Oy определяется $S(y)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (Б)$$

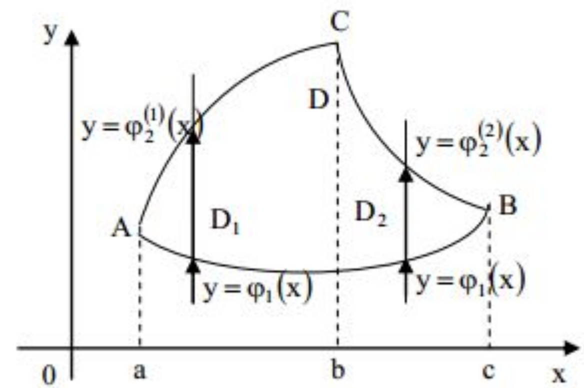
В формуле (А) интегрирование выполняется вначале по y – в пределах $y_1=\varphi_1(x)$ до $y_2=\varphi_2(x)$, при постоянном, но произвольном значении x, а затем по x – в пределах от x_1=a до x_2=b. В (Б) интегрирование выполняется: внутренний интеграл берется по x (при фиксированном y), пределы интегрирования указывают границы изменения x, в общем случае зависящие от y; внешний интеграл берется по y, пределы интегрирования постоянны и указывают границы изменения переменной.

<u>Если область интегрирования D является правильной</u> в направлении оси Oy и в направлении оси Ox, то вычисление двойного интеграла можно производить по (А) или по (Б).
Если нижняя или верхняя (левая или правая) линии границы области D представлены различными выражениями, область следует разбить прямыми, параллельными Oy (или Ox). Затем воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла.

1.3. Вычисление двойного интеграла

Сведение двойного интеграла к двукратному. Продолжение

Если область интегрирования D имеет вид:



Верхняя граница имеет уравнение дуги:

$$\overset{\cup}{AC}:\ y=\varphi_2^{(1)}(x)\ \text{ при }\ a\le x\le c,$$

$$\overset{\cup}{CB}:\ y=\varphi_2^{(2)}(x)\ \text{ при }\ c\le x\le b,$$

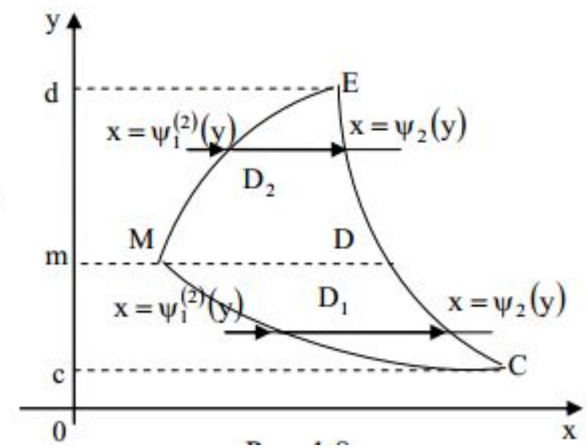
Инт. представить в виде суммы двух интегралов по областям D_1 и D_2 (каждый по (A)):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$

$$=\left|D_1\begin{cases}a\le x\le c;\\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2^{(1)}(x);\end{cases}\ D_2\begin{cases}c\le x\le b\\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2^{(2)}(x)\end{cases}\right.=$$

$$=\int\limits_a^c dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2^{(1)}(x)} f(x,y)dy+\int\limits_c^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2^{(2)}(x)} f(x,y)dy.$$

Если область интегрирования D имеет вид:



Область D разбить на подобласти D_1 и D_2 прямой y = m. Левая граница ее имеет уравнение дуги:

$$\overset{\cup}{MC}:\ x=\psi_1^{(1)}(y)\ \text{ при }\ c\le y\le m,$$

$$\overset{\cup}{MB}:\ x=\psi_1^{(2)}(y)\ \text{ при }\ m\le y\le d,$$

Тогда, аналогично:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=$$

(*)

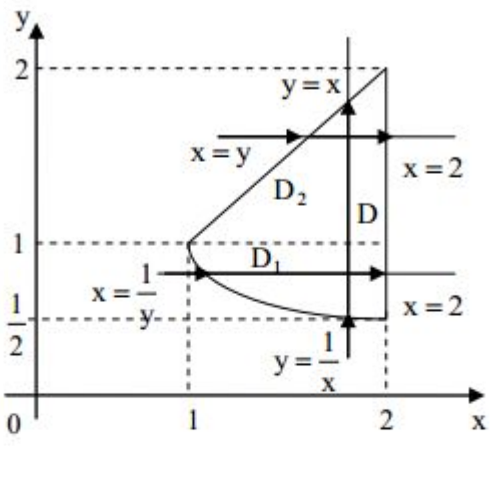
$$=\int\limits_c^m dy\int\limits_{\psi_1^{(1)}(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx+\int\limits_m^d dy\int\limits_{\psi_1^{(2)}(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Если область D не является правильной, то ее разбивают на конечное число правильных в направлении какой-либо оси областей D_1, D_2 , … , D_n .

1.3. Вычисление двойного интеграла

Сведение двойного интеграла к двукратному. Пример

Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить двойной интеграл $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 2$, $y = x$ и $xy = 1$.



Область является правильной в направлении оси Oy: произвольная прямая, проведенная параллельно этой оси, пересекает ее границу в двух точках.

Область снизу ограничена линией $y = \varphi_1(x) = \frac{1}{x}$, сверху – линией $y = \varphi_2(x) = x$, слева и справа – прямыми $x = a = 1$, $x = b = 2$.

Интеграл можно вычислить по формуле (A), представив область D в виде:

$$D: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x} \le y \le x. \end{cases}$$

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy = \int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2} = \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx = \int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{9}{4}.$$

Область D является правильной и в направлении оси Ox, но при этом левая граница ее $x = \psi_1(y)$ состоит из двух участков, имеющих уравнения $x = \frac{1}{y}$, когда $\frac{1}{2} \le y \le 1$, и $x = y$, когда $1 \le y \le 2$.

Тогда разбив область прямой $y = 1$ на две подобласти D_1, D_2 и положив в (*)

$\varphi_1^{(1)}(y) = \frac{1}{y}$, $\varphi_1^{(2)}(y) = y$, $\varphi_2(y) = 2$, $c = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $d = 2$. Получим

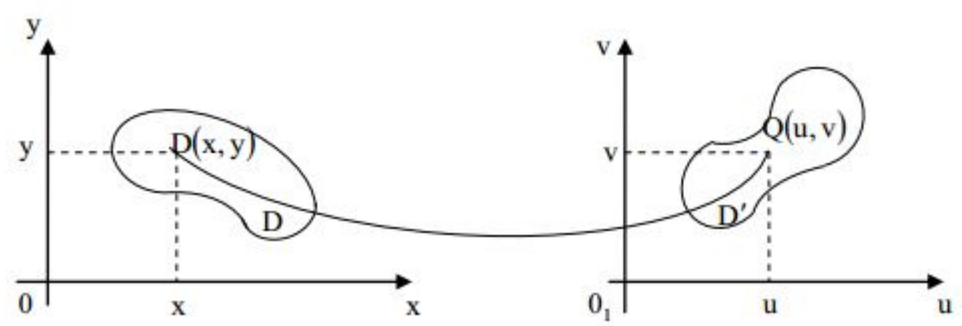
$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \iint_{D_1}\frac{x^2}{y^2}dxdy + \iint_{D_2}\frac{x^2}{y^2}dxdy = \left| D_1\begin{cases}\frac{1}{2} \le y \le 1, \\ \frac{1}{y} \le x \le 2,\end{cases} \quad D_2\begin{cases}1 \le y \le 2 \\ y \le x \le 2\end{cases}\right| =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}\int_{\frac{1}{y}}^{2}x^2dx + \int_1^2\frac{dy}{y^2}\int_y^2 x^2dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{y}}^{2}\right)dy + \int_1^2\frac{1}{y^2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{y}^{2}\right)dy = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}\left(8-\frac{1}{y^3}\right)dy + \frac{1}{3}\int_1^2\frac{1}{y^2}\left(8-y^3\right)dy = \frac{9}{4}.$$

1.3. Вычисление двойного интеграла

Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Рассмотрим две плоскости с декартовыми координатами (x, y) и (u, v), где выделены замкнутые ограниченные области D и D′. Будем предполагать, что функции x(u, v), y(u, v) определены в области D′ плоскости (u, v). Пусть, формулы (*) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками областей D и D′: $x=x(u, v), y=y(u, v)$ (*)



Для любых чисел x и y (таких, что точка P(x, y) находится в D) система уравнений (*) имеет единственное решение

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \qquad (**)$$

такое, что точка Q(u, v) лежит в D′.

Точка P(x, y) в D определяется заданием соответствующей ей точки Q(u, v) в D′, означает что числа u и v - координаты точки; их называют *криволинейными координатами* этой точки (для точки же Q они служат прямоугольными декартовыми координатами).

Формулы (*) отображают область D′ на область D. Точка P∈ D, соответствующая некоторой точке Q∈ D′, называется *образом* последней, которая, в свою очередь, называется *прообразом* точки P. Образом любой непрерывной линии, лежащей в области D, служит непрерывная же линия в D′.

1.3. Вычисление двойного интеграла

Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Продолжение

Если $z = f(x, y)$ – непрерывная в замкнутой ограниченной области D функция и если формулы

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками области D и точками некоторой области D′ в плоскости (u, v), удовлетворяющее условиям:

1) функции $x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в областях D и D′;

2) функциональный определитель Якоби

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

отличен от нуля всюду в области D′, то имеет место следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(u, v),\ y(u, v))\,|I(u, v)|\,dudv\,.$$

Наиболее используемыми из криволинейных координат являются *полярные*. Полярные координаты ϕ и ρ любой точки связаны с ее декартовыми координатами x и y формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \quad (u = \varphi,\ v = \rho) \qquad (1)$$

Отображение плоскости (ϕ , ρ) на плоскость (x и y) будет взаимно однозначным, если потребовать выполнения неравенств $0 \le \rho \le \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad (\text{либо} \ -\pi \le \varphi \le \pi).$

Функции (1) и частные производные $x'_\varphi = -\rho\sin\varphi, \quad x'_\rho = \cos\varphi, \quad y'_\varphi = \rho\cos\varphi, \quad y'_\rho = \sin\varphi$ ны в указанной области D′. Тогда якобиан (1):

$$I(\varphi, \rho) = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho, \qquad |I(\varphi, \rho)| = \rho.$$

Обычно не изображают область D′ плоскости (u, v), а пределы изменения переменных ϕ и ρ устанавливают непосредственно по области D. Тогда

Тогда $\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\varphi\,d\rho.$

1.3. Вычисление двойного интеграла

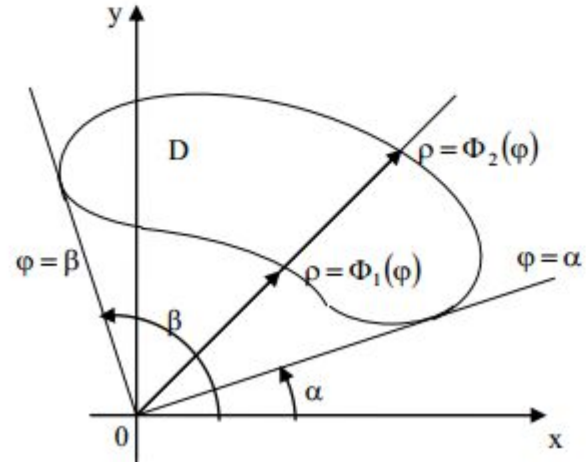
Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Продолжение

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho \qquad (2)$$

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, как и в декартовой, сводится к двукратному интегрированию по переменным ϕ и ρ . Правила расстановки пределов.

1. Пусть полюс не содержится внутри области D. Область D ограничена кривыми $\rho = \Phi_1(\phi)$, $\rho = \Phi_2(\phi)$ и лучами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$, где $\Phi_1(\phi) \le \Phi_2(\phi)$ и $\alpha < \beta$. Если луч $\phi = const$, проходящий через внутреннюю точку области, пересекает ее границу не более чем в двух точках, то такую область так же будем называть *правильной*. Тогда $D\{\alpha \le \varphi \le \beta,\ \Phi_1(\varphi) \le \rho \le \Phi_2(\varphi)\}$

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\Phi_1(\varphi)}^{\Phi_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (3)$$



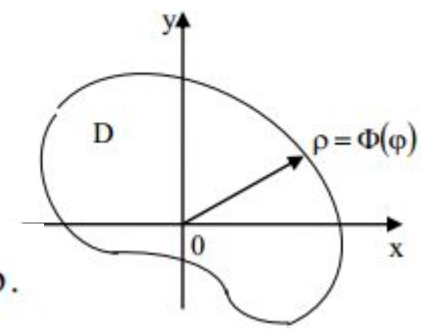
Если область D есть часть кругового кольца $R_1 \le \rho \le R_2$, $\alpha \le \phi \le \beta$, пределы внутреннего интеграла постоянны:

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{R_1}^{R_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

2. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования и любой луч $\phi = const$ пересекает границу в одной точке. Здесь область D описывается системой неравенств $0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \Phi(\varphi)$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\Phi(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$



В частности, если $\rho = R = const$, т.е. когда область интегрирования D есть круг с центром в начале координат, то пределы внутреннего интеграла постоянны и имеет место равенство

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

1.3. Вычисление двойного интеграла

Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Продолжение

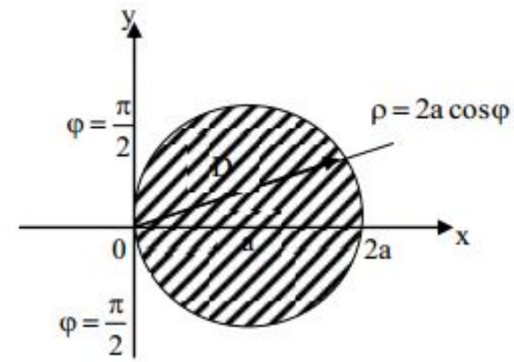
Переход к полярным координатам в двойном интеграле целесообразен в следующих случаях:

1 . Подынтегральная функция f(x, y) содержит в своем выражении $(x^2 + y^2)$;

2 . Уравнение границы области D содержит $(x^2 + y^2)$;

3 . Наличие условий 1 и 2.

ПРИМЕР. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, бласть D ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.



Уравнение границы области D в каноническом виде $(x-a)^2+y^2=a^2$
Видно, что область интегрирования есть круг радиуса a с центром в точке (a,0)

Введем полярные координаты, положив $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$.
Тогда уравнение окружности $x^2+y^2=2ax$ бразуется к виду

$\rho=2a\cos\varphi$

$$D\left\{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\rho\le 2a\cos\varphi\right\}.$$

В соответствии с формулами (2), (3) получаем

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_D\rho\cdot\rho\,d\varphi\,d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}\rho^2d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^{2a\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{8a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=\frac{8a^3}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{9}\pi a^3.$$