

***Частные производные.***

- Пусть  $D(x, y)$  - некоторое множество точек плоскости  $Oxy$ . Если каждой упорядоченной паре чисел  $(x, y)$  из области  $D$  соответствует определенное число  $z \in Z \subset \mathbf{R}$ , то говорят, что  $z$  есть *функция двух независимых переменных  $x$  и  $y$* .

- Переменные  $x$  и  $y$  называются *независимыми переменными*, или *аргументами*,  $D$  - *областью определения*, или *существования*, *функции*, а множество  $Z$  всех значений функции - *областью ее значений*.  
Функциональную зависимость  $z$  от  $x$  и  $y$  записывают в виде  $z = f(x, y)$ ,  $z = z(x, y)$ ,

- Аналогично определяется функция  $n$  независимых переменных  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .
- Областью определения такой функции будет множество  $D \subset \mathbf{R}^n$ . Примером функций многих переменных в экономике являются производственные функции. При рассмотрении любого производственного комплекса как открытой системы (входами которой служат затраты ресурсов - людских и материальных, а выходами - продукция) *производственная функция выражает устойчивое количественное соотношение между входами и выходами.*

- *Частной производной* функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется производная, взятая по этой переменной при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Для функции двух переменных  $z = f(x, y)$  *частной производной по переменной  $x$*  называется производная этой функции по  $x$  при постоянном  $y$ .

- Обозначается частная производная по  $x$  следующим образом:

$$z'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

- Аналогично *частной производной функции*  $z = f(x, y)$  по аргументу  $y$  называется производная этой функции по  $y$  при постоянном  $x$ . Обозначения:

$$z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, f'_y(x_0, y_0), \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

- *Частными производными второго порядка функции  $z = f(x, y)$  называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Если первая производная была взята, например, по аргументу  $x$ , то вторые производные обозначаются символами*

$$z''_{xx}, z''_{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z''_{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

- Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которой все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существует хотя бы одна из них. Такие точки называются *критическими*.

# Достаточные условия экстремума для функции двух переменных.

Пусть точка  $M_0(x_0, y_0)$  - критическая точка  
функции  $z = f(x, y)$ , т.е.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

и функция  $z = f(x, y)$  имеет непрерывные  
вторые частные производные в  
некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$ .

Обозначим

$$z''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad z''_{xy}(x_0, y_0) = B,$$

$$z''_{yy}(x_0, y_0) = C, \quad \Delta = AC - B^2$$

Тогда:

- 1) если  $\Delta > 0$ , то функция  $z$  имеет экстремум в точке  $M_0$ : максимум при  $A < 0$ , минимум при  $A > 0$ ;
- 2) если  $\Delta < 0$ , то экстремума в точке  $M_0$  нет;
- 3) если  $\Delta = 0$ , то требуется дополнительное исследование.



