Дифференциальное исчисление

∈

Определение производной.

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$ Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

- **Определение. *Производной функции***

$y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

- $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$
- Производная обозначается …
- Нахождение производной называется дифференцированием этой функции

Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью.

- Теорема. *Если функция у =* f(x) *дифференцируема в точке* x_0, *то она в этой точке непрерывна.*

- Производные:

1. Постоянной величины
2. Аргумента;
3. Суммы;
4. Произведения;
5. Частного;
6. Сложной функции
7. Таблица производных.
8. Производные высших порядков.

Основные теоремы дифференциального исчисления

- Теорема Ферма. *Если дифференцируемая на промежутке X функция y=f(x) достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке* x_0 *этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е.*

$$f'(x_0) = 0.$$

Теорема Лагранжа. *Пусть функция y* = f(*x*) *удовлетворяет следующим условиям*

1. *непрерывна на отрезке* [*a*, *b*];
2. *дифференцируема на интервале*

(a, b);

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка

ξ (a, b), в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке,

- $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Правило Лопиталя

- **Теорема.** *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных {конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.*

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ =0 то
- $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Возрастание и убывание функций

- **Теорема (достаточное условие возрастания функции).** *Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X, то функция возрастает на этом промежутке.*

- **Теорема (достаточное условие убывания функции).** *Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X, то она убывает на этом промежутке.*

Экстремум функции

- **Определение 1.** *Точка x_0 называется точкой* ***максимума*** *функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) <= f(x_0)$*
- **Определение 2.** *Точка x_1 называется точкой* ***минимума*** *функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) >= f(x_1)$*

Необходимое условие экстремума.

- *Для того, чтобы функция y =f(x) имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ($f'(x_0) = 0$) или не существовала.*

Первое достаточное условие экстремума.

- Теорема. *Если при переходе через точку* x_0 *производная дифференцируемой функции y=f(x) меняет свой знак с плюса на минус, то точка* x_0 *есть точка максимума функции y = f(x), а если с минуса на плюс, то точка минимума.*

Схема исследования функции $y=f(x)$ на экстремум.

- 1°. Найти производную $y'=f'(x)$.

2°. Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x)=0$ или не существует.

3°. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.

4°. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Второе достаточное условие экстремума.

- **Теорема.** *Если первая производная f'(x) дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке* x_0, *а вторая производная в этой точке*

f'' (x_0) *положительна, то* x_0 *есть точка минимума функции f* (x);

если f''(x_0) *отрицательна, то* x_0 - *точка максимума.*

Выпуклость функции. Точки перегиба

- Функция y=f(x) называется выпуклой вниз на промежутке X, если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

- Функция $y=f(x)$ называется выпуклой вверх на промежутке X, если для любых двух значений x_1, $x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

- Теорема. Функция выпукла вниз(вверх) на промежутке X тогда и только тогда, если ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).
- Теорема. Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X, то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

- Определение. Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.
- Теорема. Необходимое условие перегиба. Вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю.
- Теорема. Достаточное условие перегиба. Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через некоторую точку X_0 меняет свой знак, то X_0 точка перегиба.

Схема исследования функции на выпуклость и точки перегиба.

1. Найти вторую производную функции.
2. Найти точки в которых $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследовать знак $f''(x)$ слева и справа от найденных точек.
4. Найти значения функции в точках прегиба.

Асимптоты графика функции

- Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется такая прямая, расстояние от точки $(X, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

- При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую *схему:*
- 1°. Найти область определения функции.
- 2°. Исследовать функцию на четность - нечетность.
- 3°. Найти вертикальные асимптоты.
- 4°. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты.

- 5°. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
- 6°. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
- 7°. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Понятие дифференциала функции

- **Определение.** ***Дифференциалом функции*** *называется главная, линейная относительно* Δx *часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной*

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$