Основы линейной алгебры

Матрица

- **Матрицей** размера mxn, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **<u>Определение.</u>** Если число столбцов матрицы равно числу строк то матрица называется квадратной.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

- **<u>Определение.</u>** Если *amn* = *anm* , то матрица называется **симметрической**.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- симметрическая матрица
- Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц

- Сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они <u>определены только для матриц одинакового размера</u>.

Операция умножения матриц

- **Произведением** матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:
-
- Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Транспонированная матрица

- Матрицу В называют **транспонированной** матрицей А, а переход от А к В **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы В.

Определители

- Определителем матрицы А размерностью mxn называется число вычисляемое по формуле:

- det A = $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}$

- *M1к* – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.
- Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

- **<u>Определение.</u> Дополнительный минор** произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

- **<u>Определение</u>. Алгебраическим дополнением** минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.
- В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Элементарные преобразования матрицы

- **Элементарными преобразованиями** матрицы называются следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5) транспонирование;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

- Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

- Минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.
- В матрице порядка mxn минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Ранг матрицы

- Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.
- Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

- Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\
a_{21}x_2+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n
\end{cases}
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \; a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \ldots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$A \times X = B.$$

$$\mathbf{X = A^{-1} \times B}$$

Метод Крамера

- Если определитель матрицы системы линейных алгебраических уравнений не равен нулю, то система имеет решение и оно находится по формулам:
  - $X_i = \Delta_i / \Delta$, *где*

*Δ=det A, а Δ*i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы, путем замены столбца I столбцом свободных членов b_i.

- Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Совместные, определенные и однородная системы

- **<u>Определение.</u>** Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.
- **<u>Определение.</u>** Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.
-

- **<u>Определение.</u>** Для системы линейных уравнений матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей системы,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

расширенной

Теорема Кронекера – Капелли

- **Теорема:** *Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

$$RgA = RgA^*.$$

Метод Гаусса

- В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований