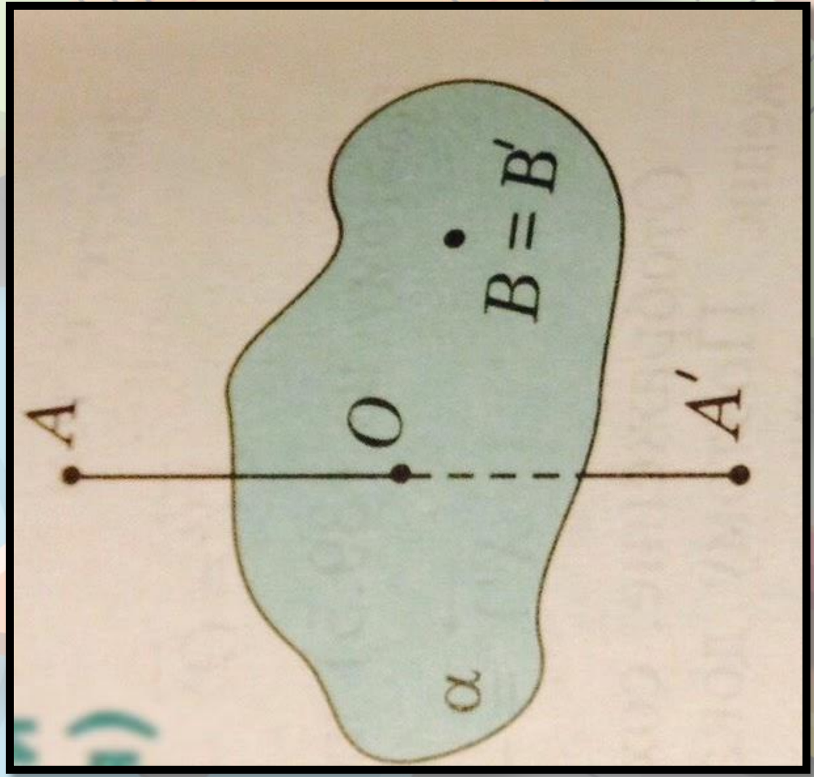
Отражение в плоскости (зеркальная симметрия)

Презентация подготовлена учеником 11 класса «Б»
Ефимовым Денисом

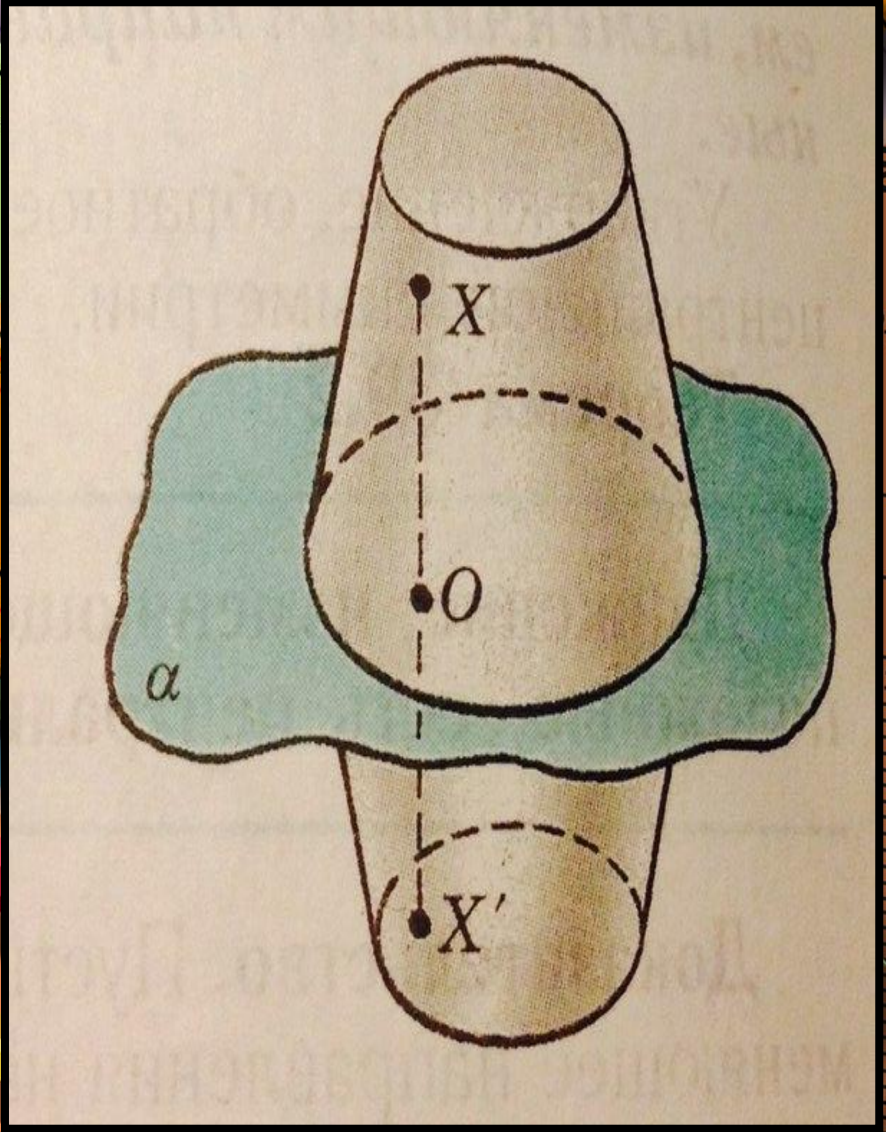
Определение

- Точки А и A' называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок АA' перпендикулярен этой плоскости и делится ею пополам. Любая точка плоскости α считается симметричной самой себе относительно этой плоскости.



- Две фигуры F и F' называются симметричными относительно данной плоскости, если они состоят из точек, попарно симметричных относительно этой плоскости, т.е. если для каждой точки одной фигуры есть симметричная ей точка в другой фигуре.

Возможно, что $F = F'$, то есть фигуры F и F' - это одна фигура. В этом случае говорят, что фигура симметрична относительно данной плоскости и что эта плоскость является ее плоскостью симметрии.

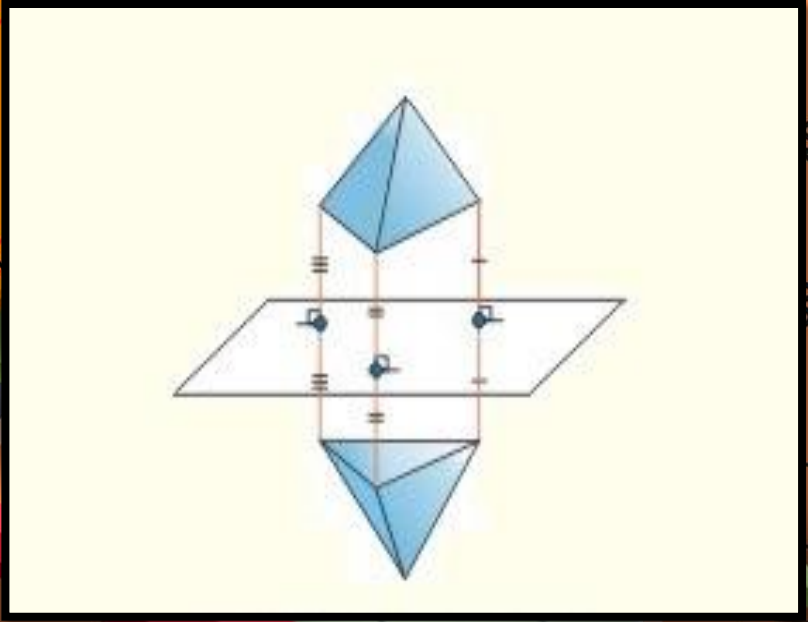


Определение

- Отображение фигуры, при котором каждой ее точке соответствует точка, симметричная ей относительно данной плоскости, называется отражением фигуры в этой плоскости (или симметричной этой плоскости)

Отношение между симметричными точками, взаимно: если A' симметричная А относительно плоскости α, то А симметрична A' относительно той же плоскости α. Поэтому отображение, обратное отражению в плоскости всего пространства, есть оно само.

При отражении в плоскости фигура отображается на симметричную ей фигуру относительно этой плоскости.



Теорема: Зеркальная симметрия является движением.

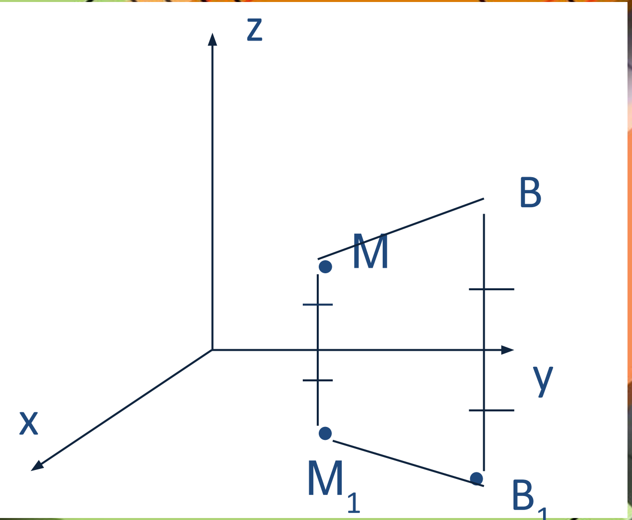
Дано: $M(x, y, z)=A(x, y, z)$

$M_1(x_1,y_1,z_1)=A_1(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$.

M симметрична M_1

точка M не лежит в плоскости Oxy

Доказать: $MB=M_1B_1$



Доказательство: по формуле координат середины отрезка $(z+z_1)/2=0$, $z_1= - z$.

$MM_1 \parallel Oz \Rightarrow x_1=x,\ y_1=y$.

Рассмотрим 2 точки: $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$

По формуле расстояния между точками: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$A_1B_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}$, $\Rightarrow AB=A_1B_1$

и Z прямые АВ и АС (рис. 26.7). Поскольку Y и Z — неподвижные точки движения то и все точки прямой I (в том числе и точка X) — неподвижные для

Полученная классификация множества неподвижных точек движений позволяет дать следующие признаки зеркальной симметрии и повороту.

Лемма о неподвижности плоскости

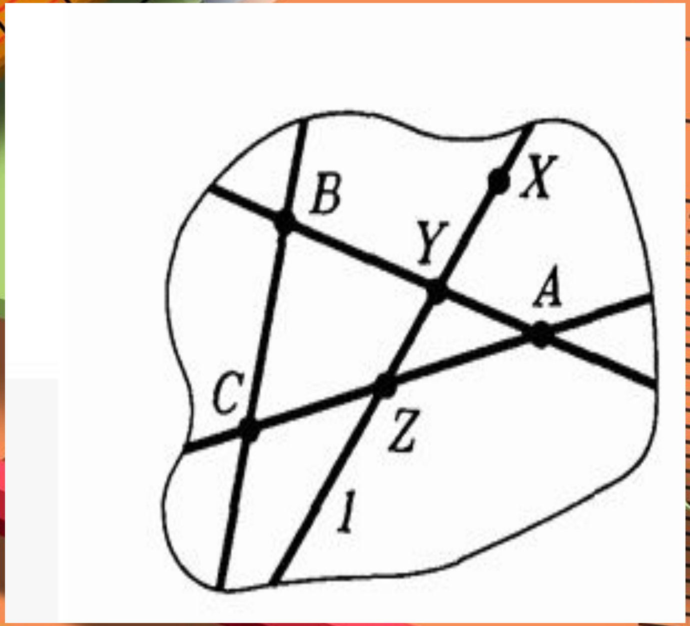
Если три точки А, В, С, не лежащие на одной прямой, являются неподвижными точками движения f, то любая точка X плоскости АВС является неподвижной точкой движения f.

Вспомогательная Лемма

Лемма (о неподвижной прямой). Если две точки А и В являются неподвижными точками движения *f*, то любая точка *X* прямой АВ также является неподвижной точкой движения *f*.

Действительно, точка *X'=f(X)*, во-первых, лежит на прямой АВ, и во-вторых, она удалена от точек А и В на расстояния *X'A = XA* и *X'B = XB*. Поэтому *X'=X* .

Действительно, все точки прямых АВ, АС, ВС неподвижны для движения *f* (по предыдущей лемме). Проведем через точку X любую прямую *l* , пересекающую в точках Y и Z прямые АВ и АС. Поскольку Y и Z — неподвижные точки движения то и все точки прямой *l* (в том числе и точка X) — неподвижные для *f*.



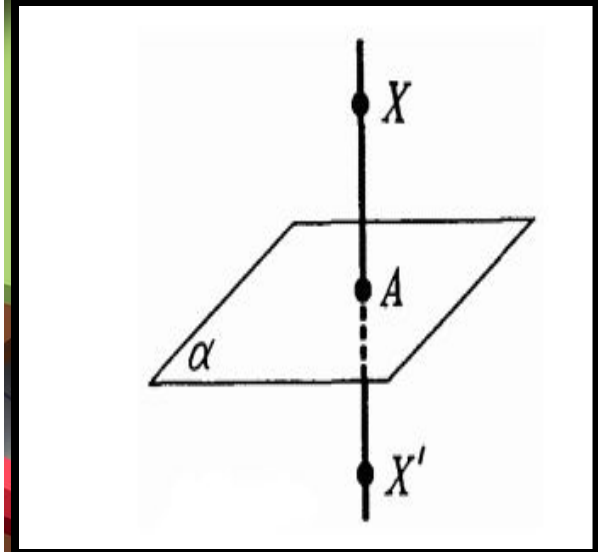
Х на расстояние ХА. Поэтому либо , либо Х' — точка, симметричная точке Х относительно а. В первом случае f имело бы неподвижные точки, не лежащие в одной плоскости, что противоречит условию теоремы. Поэтому , т. е. .
Доказывая эту теорему, мы установили и такое предложение: если движение имеет неподвижную плоскость, то оно или тождественное, или симметрия относительно этой плоскости.

Признак зеркальной симметрии

Если множеством неподвижных точек движения является плоскость, то это движение есть симметрия относительно этой плоскости.

Пусть множеством неподвижных точек движения f является плоскость a. Возьмем любую точку X вне этой плоскости и опустим из нее перпендикуляр XA на эту плоскость. Так как движения сохраняют перпендикулярность и точка A — неподвижная точка движения f, то f переведет прямую XA в эту же прямую. Точка $X'=f(X)$ лежит на прямой XA и удалена от точки A на расстояние XA. Поэтому либо $X'=X$, либо X' - точка, симметричная точке X относительно a. В первом случае f имело бы неподвижные точки, не лежащие в одной плоскости, что противоречит условию теоремы. Поэтому $X'=S_a(X)$, т. е. $f=S_a$.

Доказывая эту теорему, мы установили и такое предложение: *если движение имеет неподвижную плоскость, то оно или тождественное, или симметрия относительно этой плоскости.*

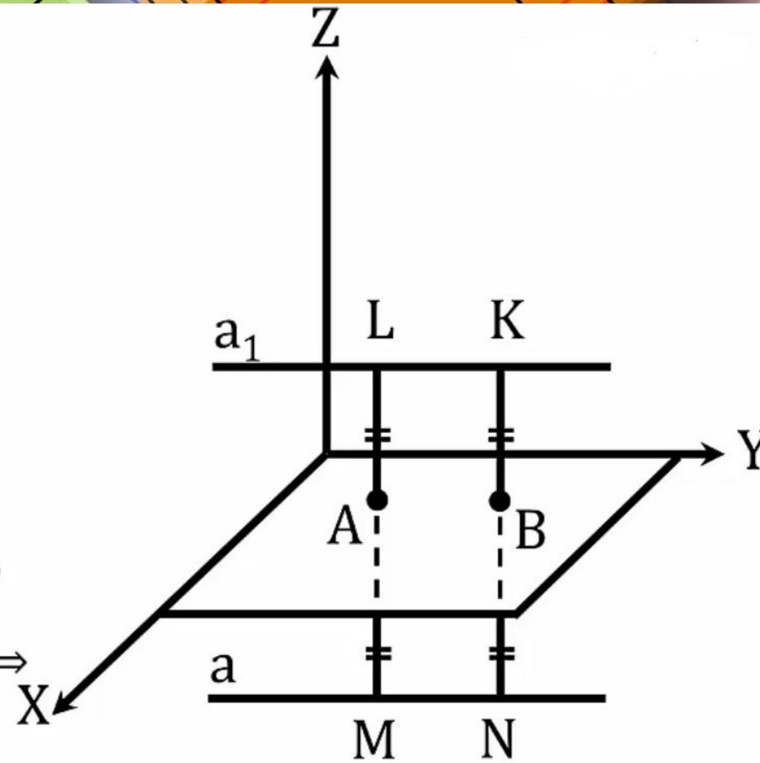


Задача 1

Доказать: что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости, если при зеркальной симметрии прямая a отображается в прямую a_1

Решение:

1) $a \parallel O_{xy}$, a и a_1 — симметричны → M и L, N и K симметричны
$MA = AL = NB = BK$,
$ML \perp O_{xy}$, $NK \perp O_{xy} \Rightarrow ML \parallel NK$
(две прямые, перпендикулярные плоскости, параллельны между собой)
MLKN — прямоугольник $\Rightarrow LK \parallel MN \Rightarrow a \parallel a_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \subset (MNL)$, $a_1 \subset (MNL)$



Что и требовалось доказать

Продолжение

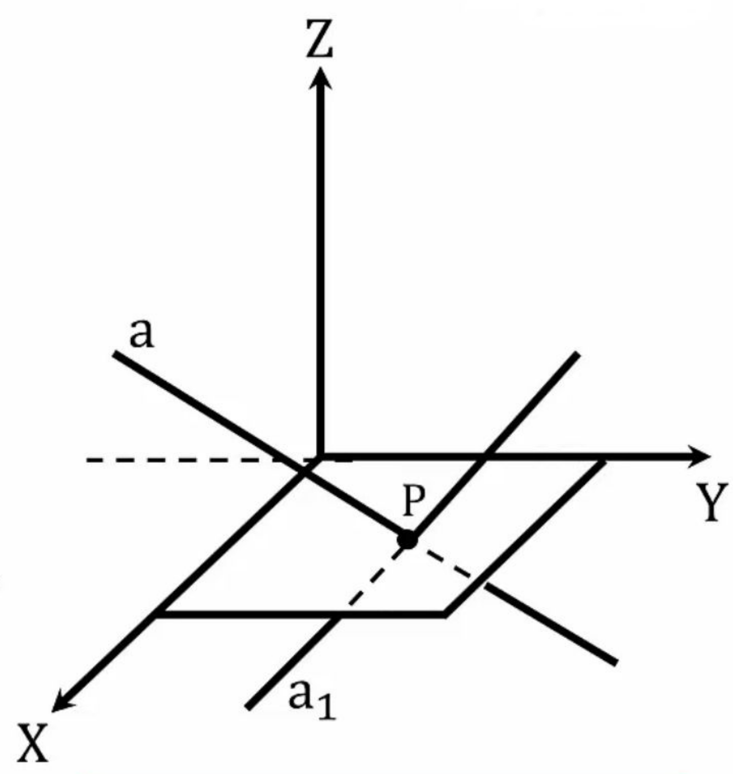
Задача 1

Доказать: что прямые a и a_1 лежат в одной плоскости, если при зеркальной симметрии прямая a отображается в прямую a_1

Решение:

1) $a \parallel O_{xy}$, a и a_1 — симметричны $\to$ M и L, N и K симметричны
$MA = AL = NB = BK$,
$ML \perp O_{xy}$, $NK \perp O_{xy} \Rightarrow ML \parallel NK$
(две прямые, перпендикулярные плоскости, параллельны между собой)
MLKN — прямоугольник $\Rightarrow LK \parallel MN \Rightarrow a \parallel a_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \subset (MNL)$, $a_1 \subset (MNL)$

2) $a \nparallel O_{xy}$, $a \cap O_{xy} = P$
$P \subset O_{xy} \Rightarrow P \to P$
$P \subset a_1$
$a \cap a_1 = P \Rightarrow a \subset (MNP)$, $a_1 \subset (MNP)$



Что и требовалось доказать

Задача 2

Дано:

α — плоскость симметрии

$\beta \to \beta_1$ при зеркальной симметрии, $\beta \parallel \alpha$

Доказать: $\beta_1 \parallel \alpha$

Доказательство:

1) $A, B, C \subset \beta$

2) Д.П. $AA_2 \perp \alpha$, $BB_2 \perp \alpha$, $CC_2 \perp \alpha$

$A_2A_1 = AA_2$, $B_2B_1 = BB_2$, $C_2C_1 = CC_2 \Rightarrow$

AA_1B_1B — прямоугольник

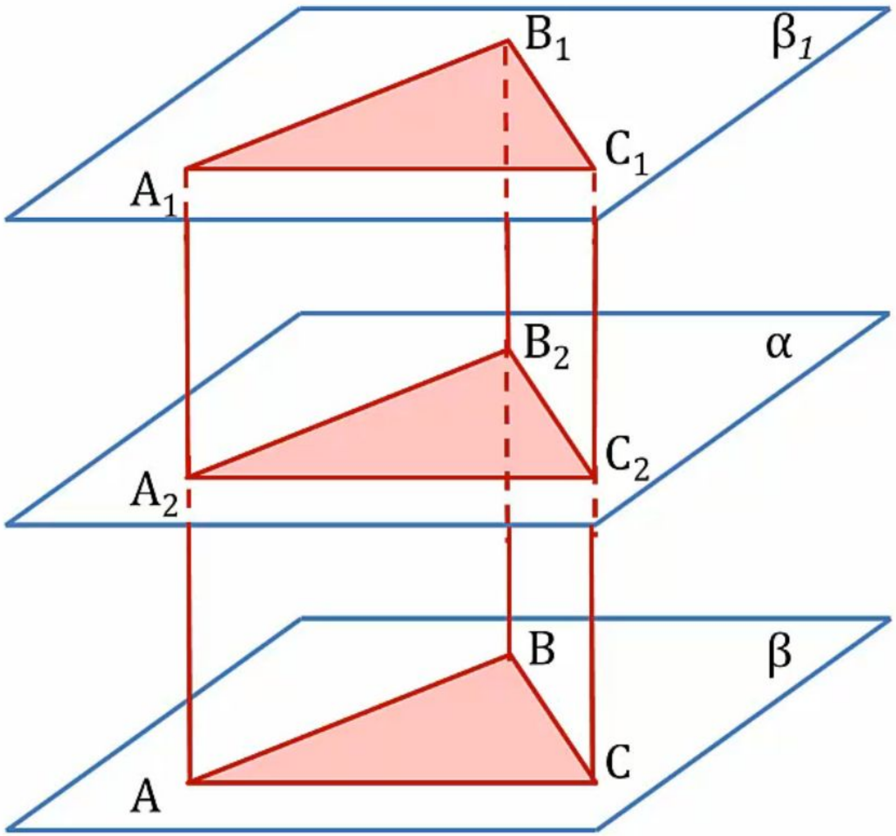
($AA_1 = BB_1$, $AA_1 \parallel BB_1$)

3) $A_1B_1 \parallel AB$, $BB_1 = CC_1$ и $BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow$

BB_1C_1C — прямоугольник $\Rightarrow B_1C_1 \parallel BC$

4) Плоскость β проходит через точки

A_1, B_1, C_1 и эта плоскость единственна

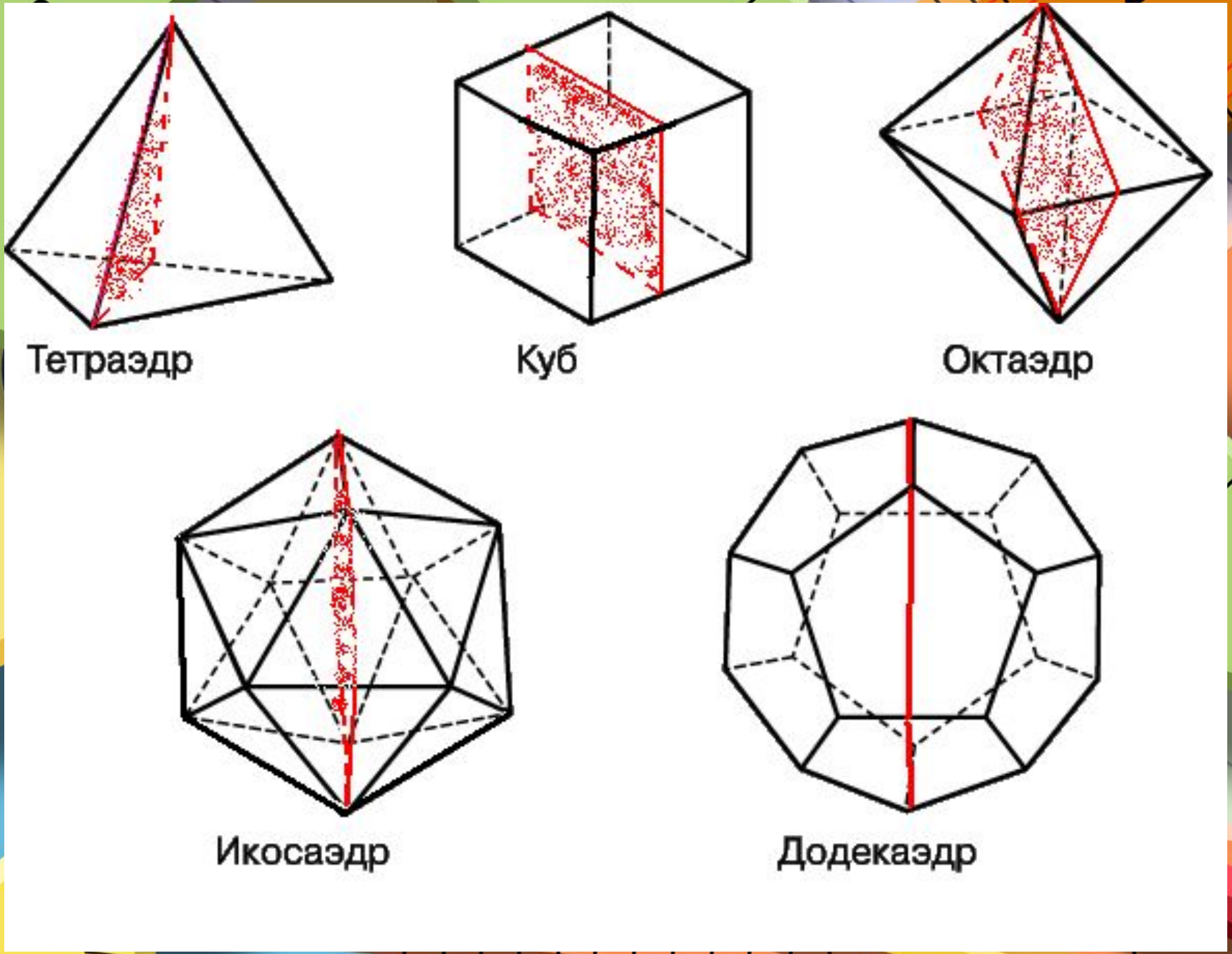


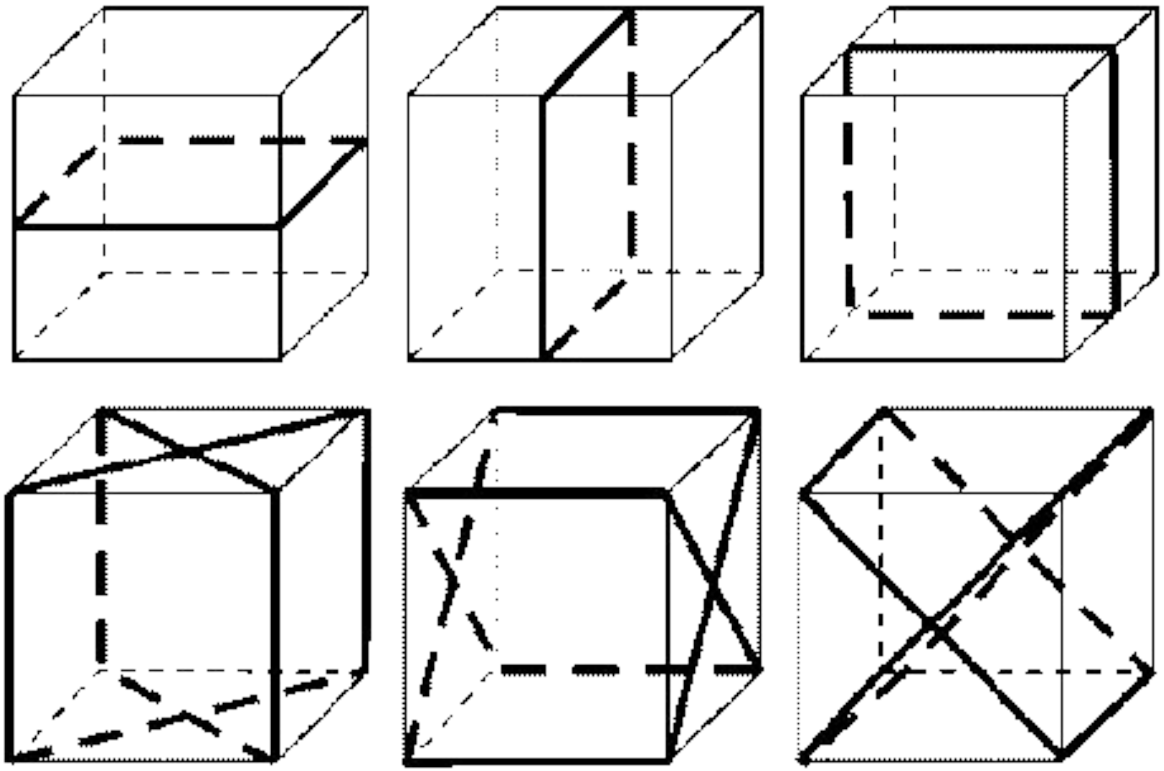
5) $\beta \parallel \beta_1$ (по признаку параллельности плоскостей)

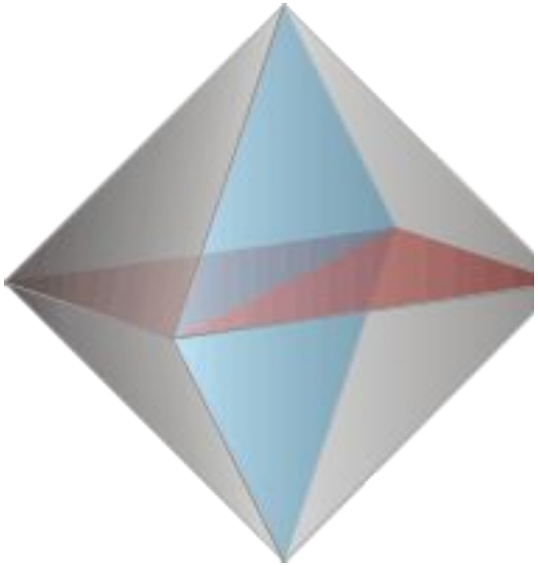
Пять платоновых тел.

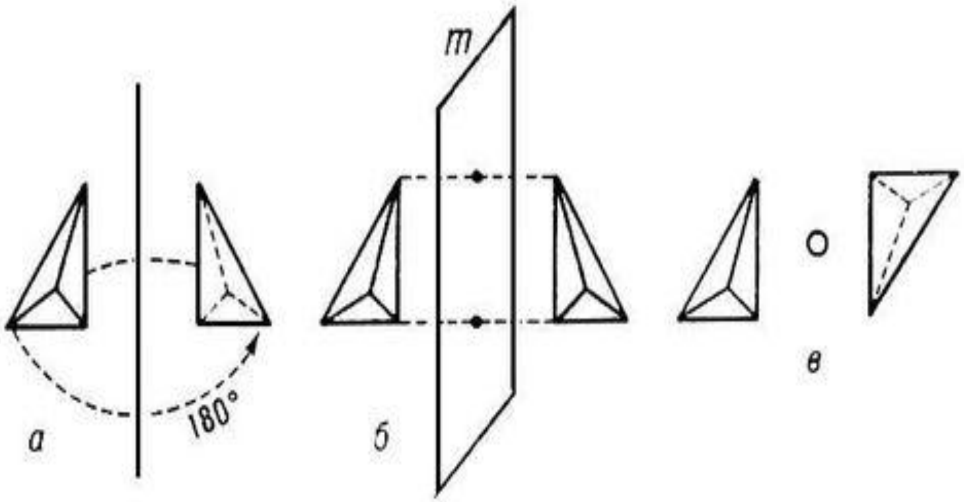
	Число					
Форма граней	Граней в одной вершине	вершин	граней	ребер	Число плоскостей симметрии	Платоновы тела
Равносторонние треугольники	3	4	4	6	1	Тетраэдр
Равносторонние треугольники	4	6	8	12	5	Октаэдр
Равносторонние треугольники	5	12	20	30	6	Икосаэдр
Квадраты	3	8	6	12	5	Гексаэдр
Правильные пятиугольники	3	20	12	20	5	Додекаэдр

Пример зеркальной симметрии в правильных многогранниках



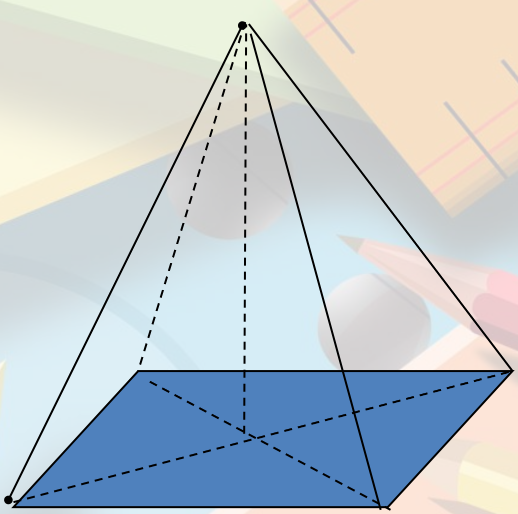


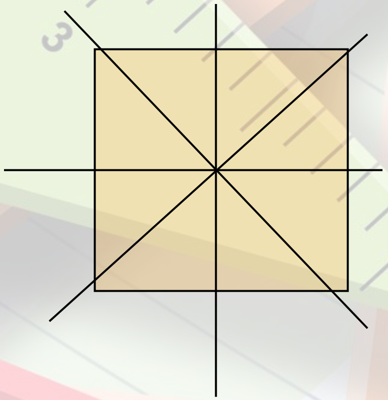




m
180°
а
б
в

Симметрия в пирамиде



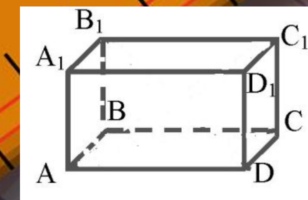


Зеркальная симметрия в призме

1)Сколько плоскостей симметрии имеет правильная четырехугольная призма?

Ответы:

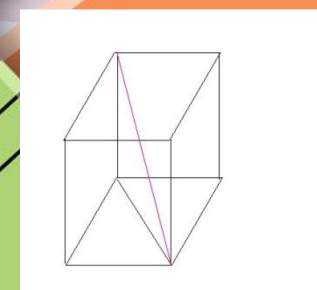
а)2 б)4 в)3 г) 5 д)12



2)Сколько плоскостей симметрии имеет прямая призма, в основании которой лежит прямоугольник?

Ответы:

а)2 б) б) 3 г)4 д)8

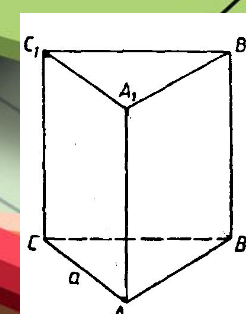


3)Сколько плоскостей симметрии имеет правильная треугольная призма?

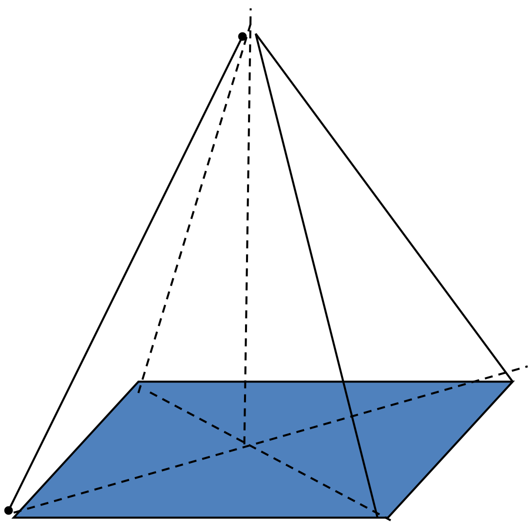
Ответы:

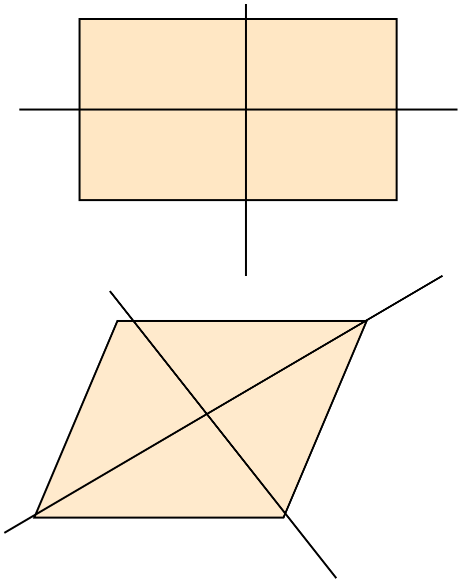
а)4 б)3 в)1 г)2 д)5

а) 4



1. Сколько плоскостей симметрии имеет пирамида, в основании которой лежит прямоугольник, ромб?





Какое дополнительное условие должно присутствовать в условии задачи, чтобы ваш ответ был верен?

Элементы симметрии правильных многогранников

	тетраэдр	октаэдр	икосаэдр	гексаэдр	додекаэдр
Центры симметрии	-	1	1	1	1
Оси симметрии	3	9	15	9	15
Плоскости симметрии	6	9	15	9	15

«Движения вокруг нас»

Биология

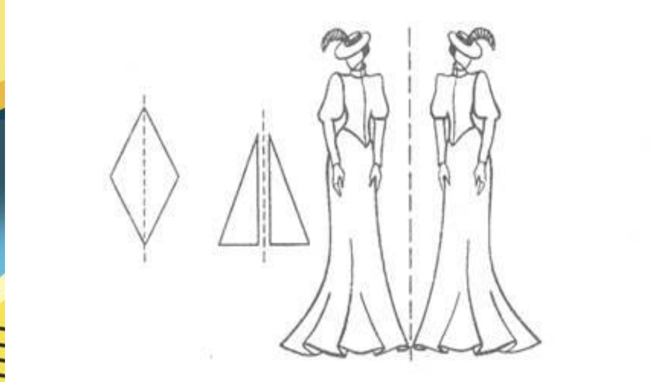
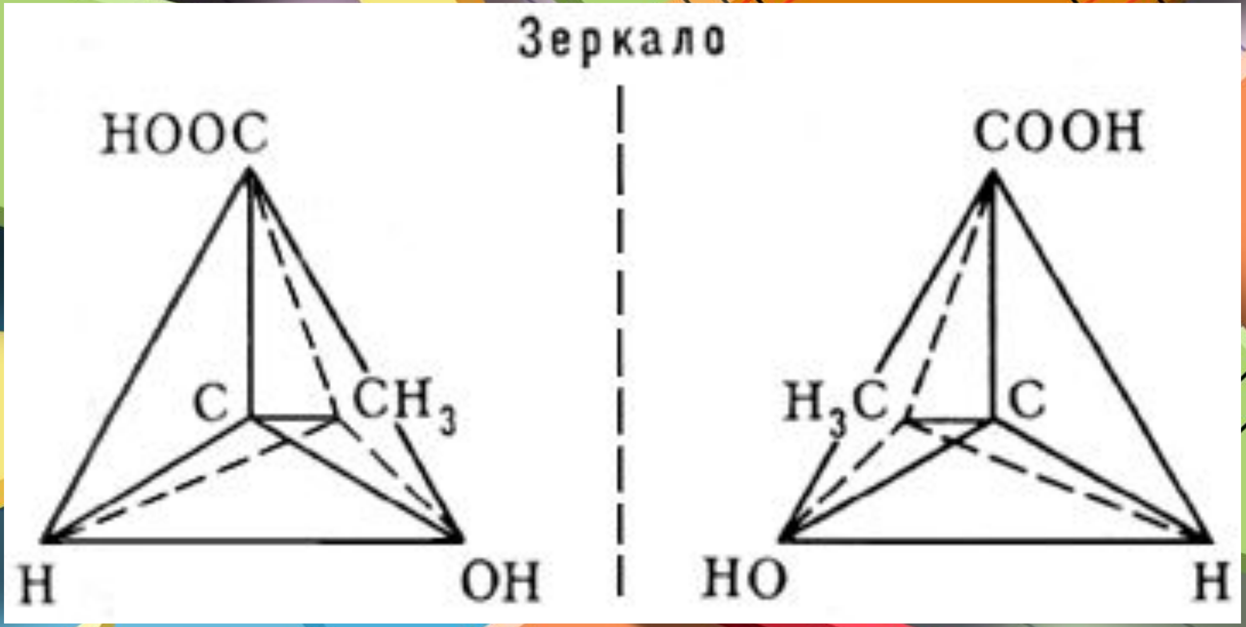
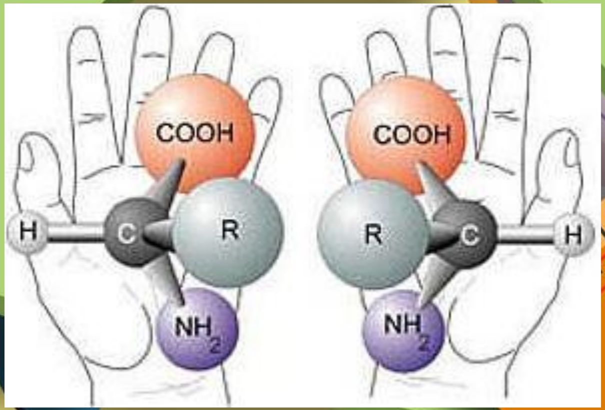


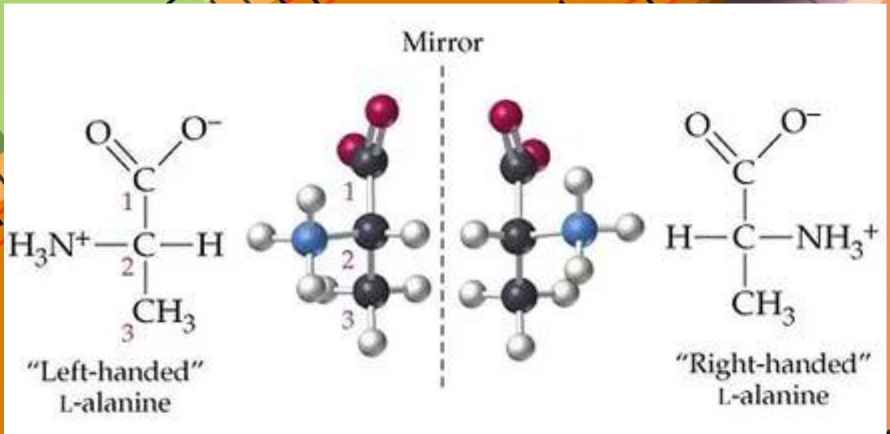
Рис. 14. Классическая зеркальная симметрия

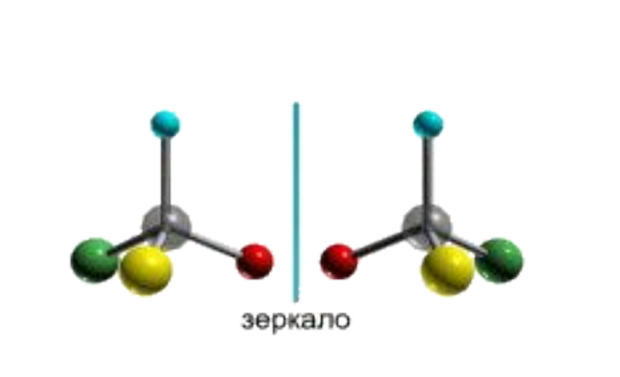
Химия



Химия


COOH
H
C
R
NH2
COOH
R
C
H
NH2


Mirror
$H_3N^+—C—H$
CH_3
"Left-handed"
L-alanine
$H—C—NH_3^+$
CH_3
"Right-handed"
L-alanine


зеркало

Архитектура
Тадж-Махал

Архитектура
Петродворец

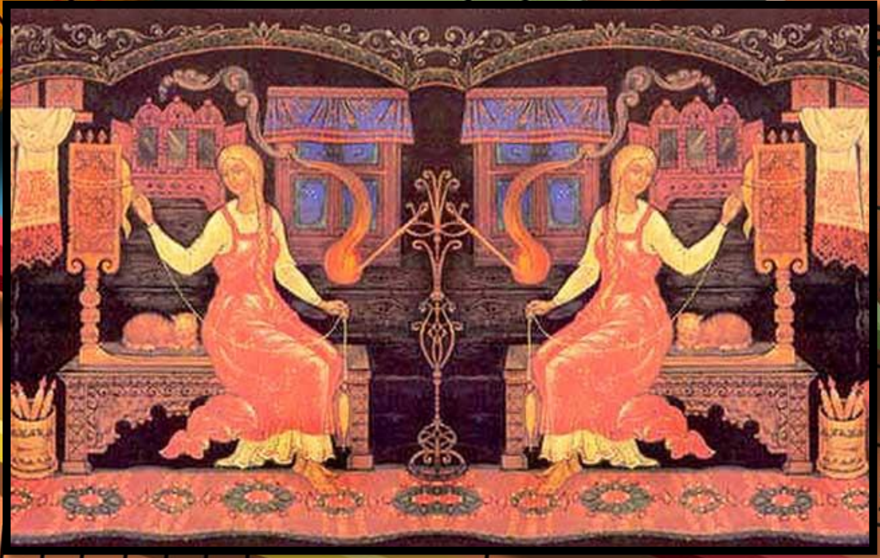
Архитектура
Здание МГУ

Архитектура
Дворцовый мост и Петропавловская крепость

Архитектура
Казанский собор и улица Росси

Природа

Искусство



- Спасибо за внимание!