Федеральное агентство по образованию
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт цветных металлов и золота

Авторы: доценты кафедры физики, к.ф-м.н. Вершинина Н.И.,
к.т.н. Машукова А.Е.

ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ

по курсу физики

Тема: **Гармонический осциллятор**

Содержание

5. Колебания

5.1. Механические

5.2. Электромагнитные

Содержание

Введение. Виды колебаний

1. Математический маятник
2. Пружинный маятник
3. Скорость, ускорение, энергия колеблющейся точки
4. Физический маятник
5. Колебательный контур
6. Гармонический осциллятор

Виды колебаний

Всякий периодически повторяющийся во времени процесс называется КОЛЕБАНИЕМ.

Колебания

Механические

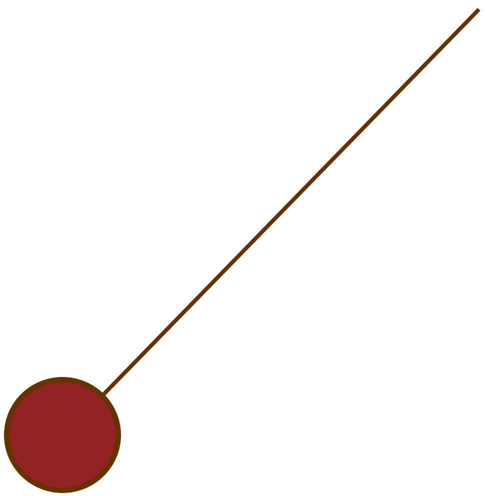
Электромагнит-ные

Свободные незатухающие

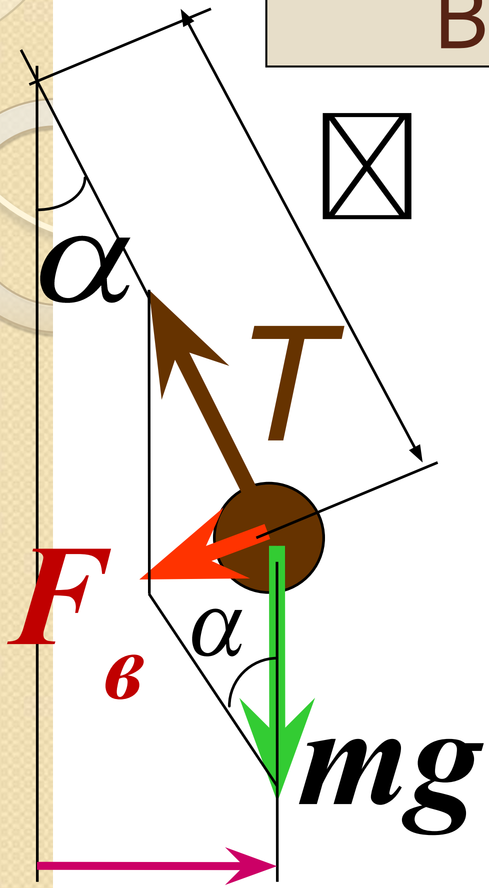
Затухающие

Вынужденные

1. Математический маятник



Вывод уравнения колебания



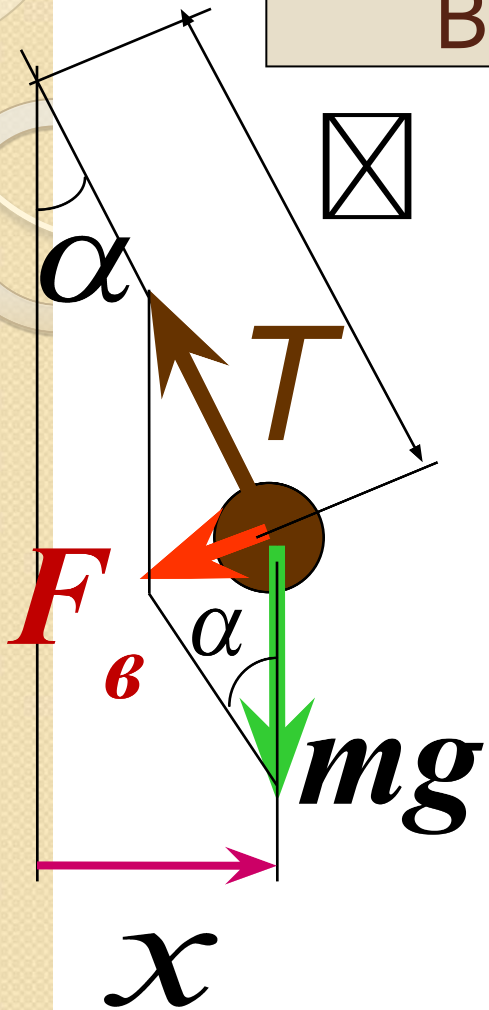
$F_в$ - возвращающая сила

$$F_В = mg\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{x}{⊠}$$

x - смещение точки от положения равновесия

Вывод уравнения колебания



$$F_B = -mg\frac{x}{\boxtimes} = ma$$

$$\boxed{a} + \boxed{\frac{g}{\boxtimes}}\,x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \omega_0^2$$

Дифференциальное уравнение колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

(1)

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\boxtimes}{g}}$$

Решение дифференциального уравнения:

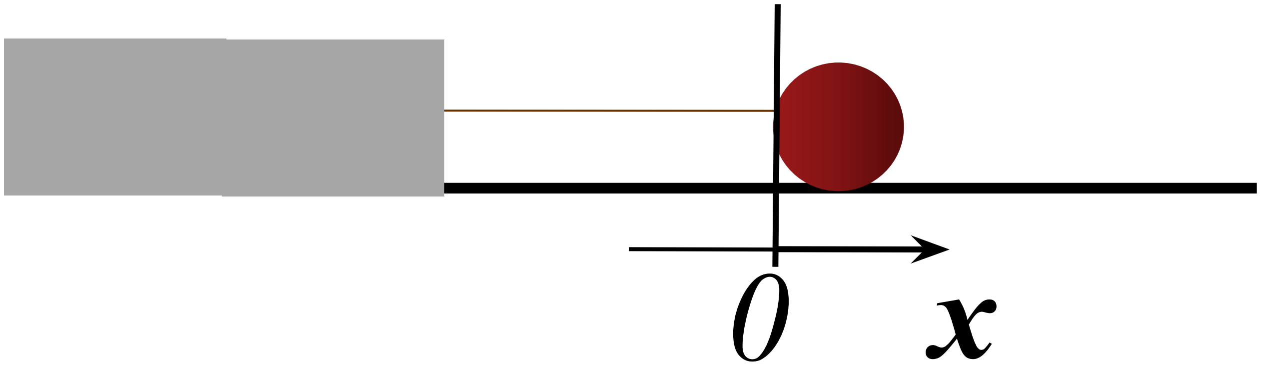
$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha);$$

или

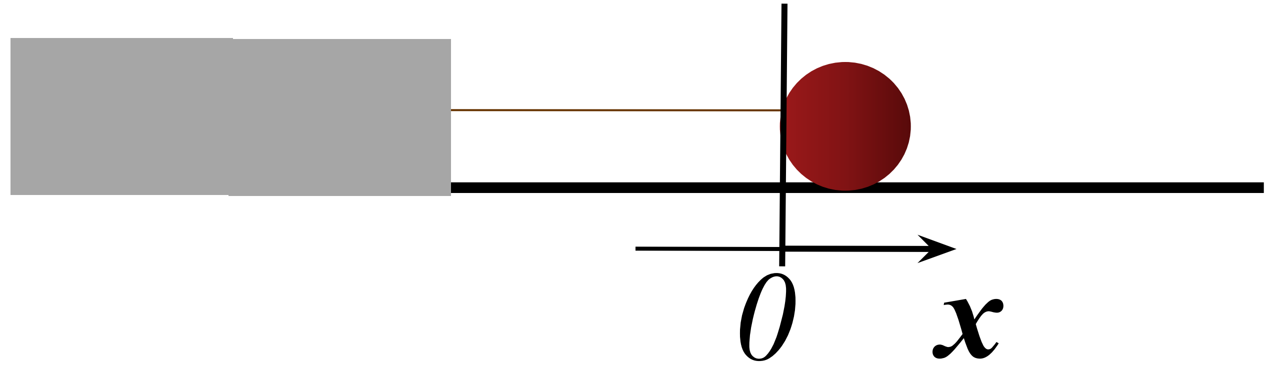
$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0)$$

$$\alpha = \alpha_0 + 90^0$$

2. Пружинный маятник



2. Пружинный маятник



$$F = ma = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \boxed{\frac{k}{m}}\,x = 0 \qquad \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0^2$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0} \qquad (2)$$

Период колебаний $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Решение дифференциального уравнения

Для (1) и (2)

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha);$$

или

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0)$$

A - амплитуда смещения $\alpha = \alpha_0 + 90^0$

ВОЗЬМЕМ 2-е УРАВНЕНИЕ И НАЙДЕМ **СКОРОСТЬ, УСКОРЕНИЕ И ВОЗВРАЩАЮЩУЮ СИЛУ**

3. Скорость колеблющейся точки

$$v=\frac{dx}{dt}=-\boxed{A\omega_0}\,sin(\,\omega_0 t+\alpha_0\,)$$

$$v_{max}-$$ амплитуда скорости

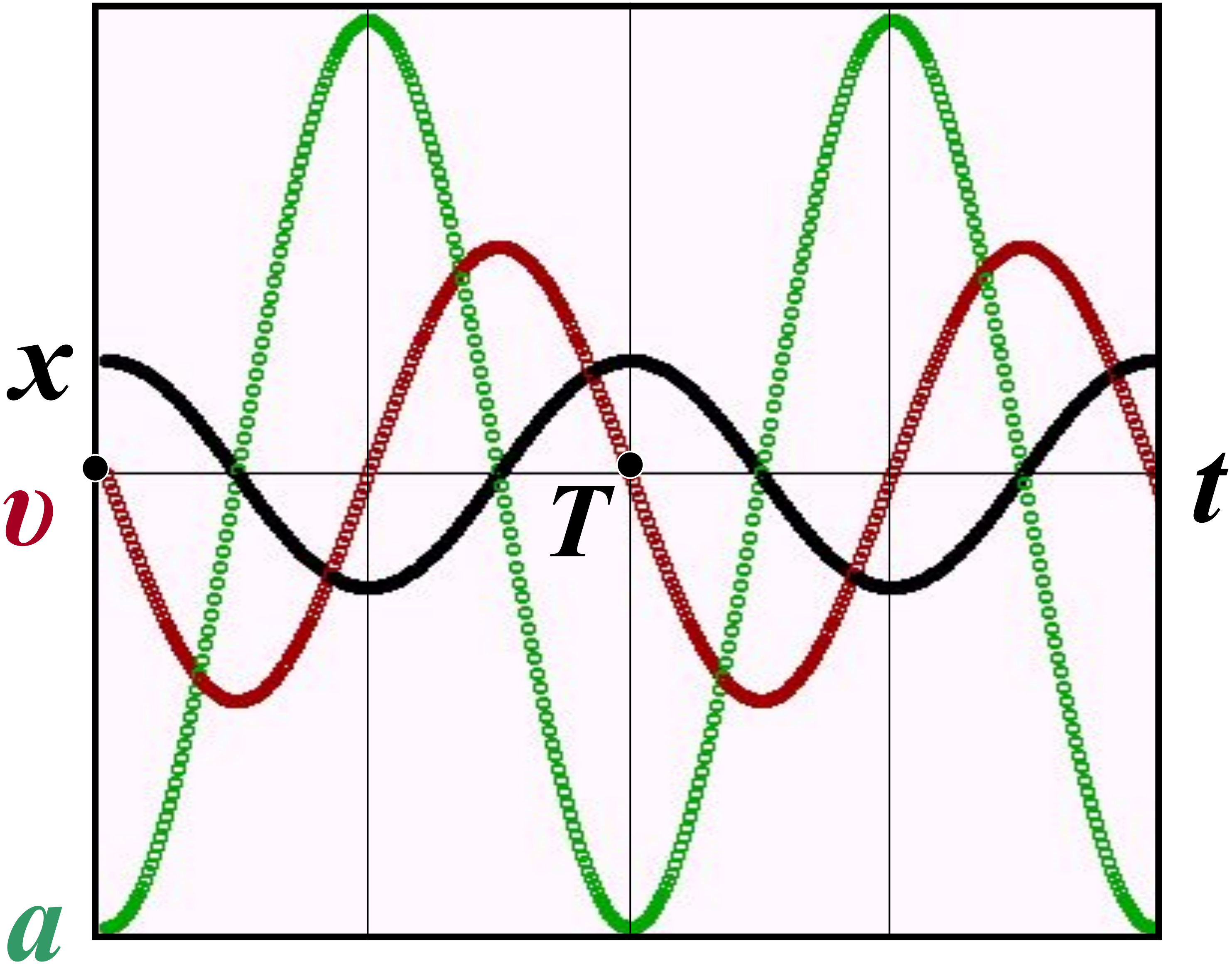
Амплитуда – это максимальное значение колеблющегося параметра

Ускорение колеблющейся точки

$$a = \frac{dv}{dt} = -\boxed{A\omega_0^2}\cos(\omega_0 t + \alpha_0)$$

a_{max} – амплитуда ускорения

Графики колебаний $x(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$



Возвращающая сила

$$F = ma = -\boxed{m\omega_0^2 A}\cos(\omega_0 t + \alpha_0)$$

F_{max} – амплитуда силы

Энергия колеблющейся точки

- потенциальная

$$W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 cos^2(\omega_0 t + \alpha_0)$$

Энергия колеблющейся точки

- кинетическая

$$W_к = \frac{mv^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} mA^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0)$$

Энергия

- кинетическая

$$E_k = m\upsilon^2/2 =$$

$$= mA^2\omega_0^2 Sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- полная

$$E = E_p + E_k =$$

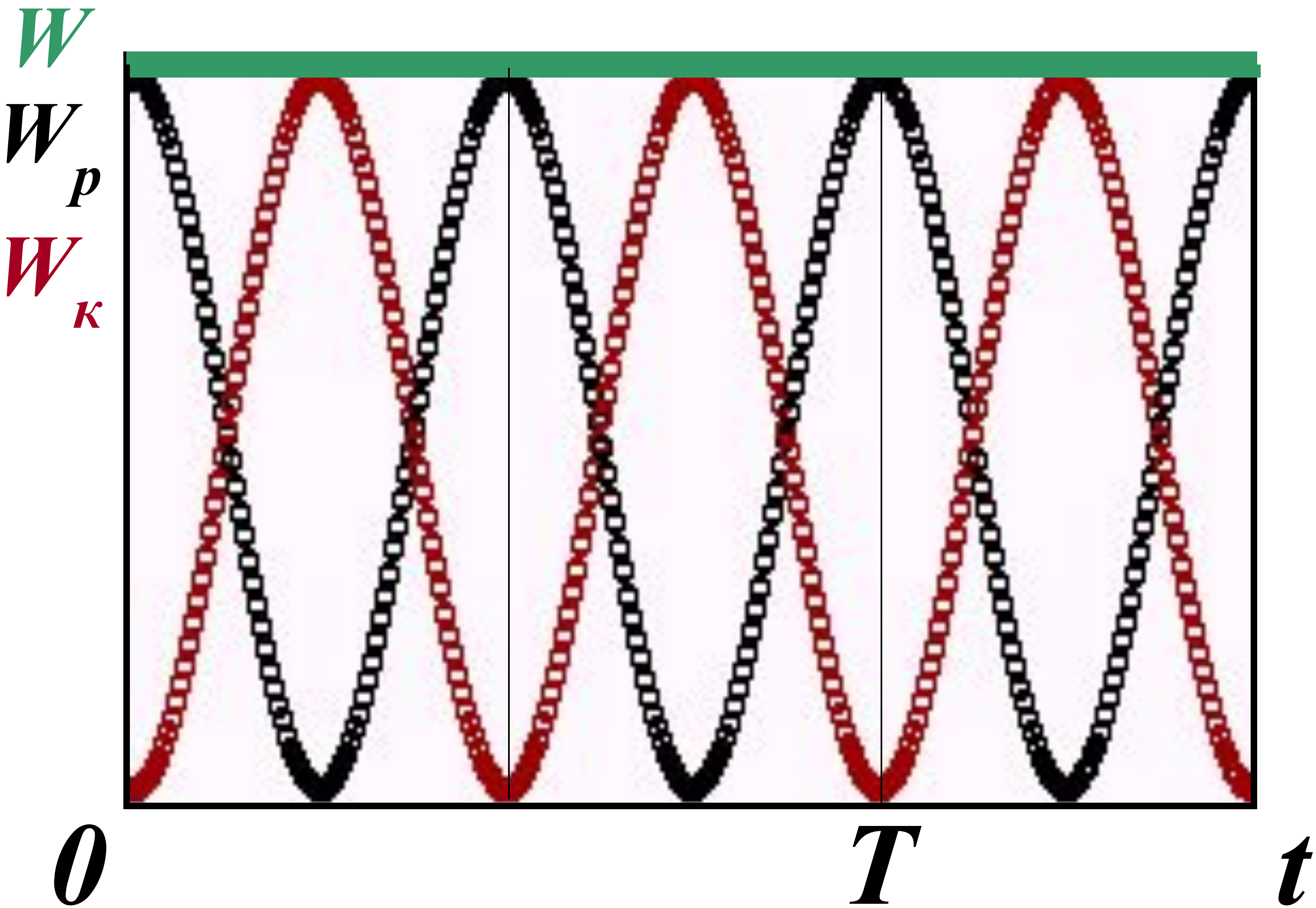
$$= mA^2\omega_0^2/2 = kA^2/2$$

Полная энергия

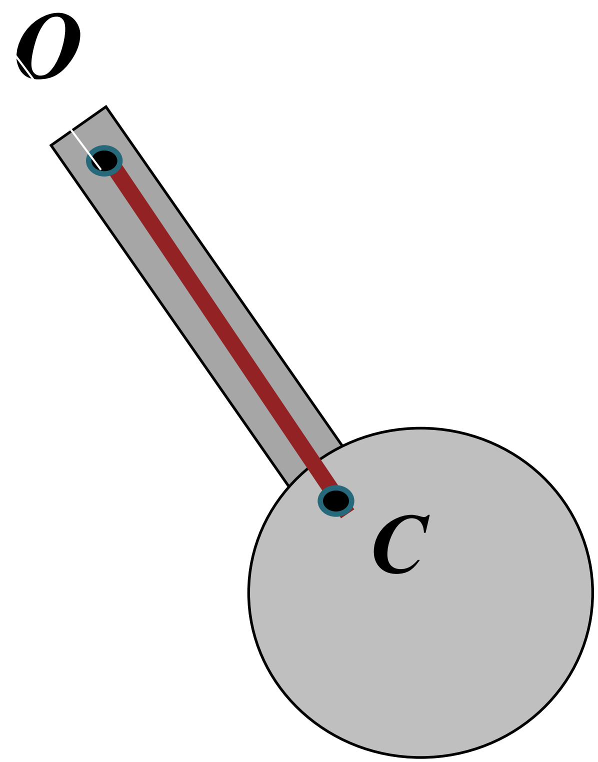
$$W = W_к + W_п = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$$

$$W = W_{к,max} = W_{п,max}$$

Зависимость энергии от времени



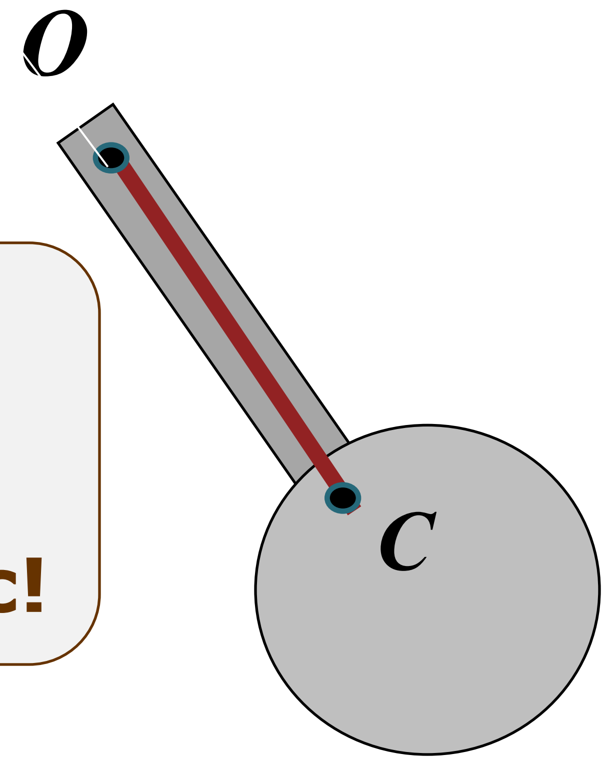
3. Физический маятник



4. Физический маятник

Это любое тело, совершающее колебания.

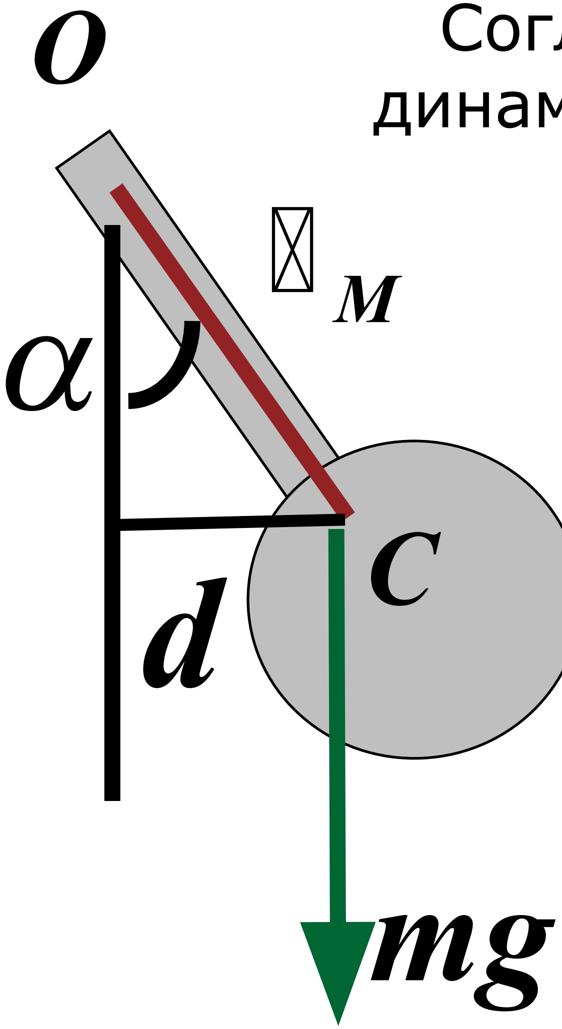
O – точка подвеса,
C - центр масс



Длина физического маятника – это расстояние от точки подвеса до центра масс!

$$OC = \ell_M$$

Вывод уравнения для физического маятника



Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$I_0\varepsilon = M = mgd =$$

$$= mg\ell_M \sin\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

При малых углах $\sin\alpha \approx \alpha$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \boxed{\frac{mg\ell_M}{I_0}}\alpha = 0$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0$$

Частота, период, приведенная длина

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell_M}{I_0}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\boxed{\frac{I_0}{m\ell_M}}\,g}$$

Приведенная длина **физического** маятника – это длина **математического** маятника с таким же периодом колебаний, что и у физического.

$$\boxed{\ell_{np} = \frac{I_0}{m\ell_M}}$$

Приведенная длина физического маятника

По теореме Штейнера $$I_0 = I_c + m\ell_M^2$$

$$\ell_{np} = \frac{I_c}{m\ell_M} + \ell_M > \ell_M$$

Приведенная длина всегда больше длины физического маятника

Вывод:

1. Дифференциальные уравнения и их решения имеют одинаковый вид **для всех маятников:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

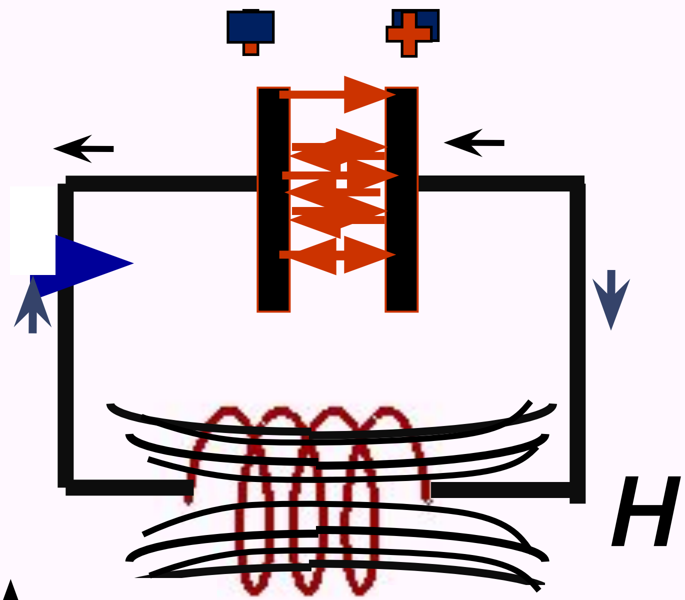
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0$$

2. Циклическая частота (и период) зависит от параметров колебательной системы

4. Колебательный контур

5. Колебательный контур

LC - контур



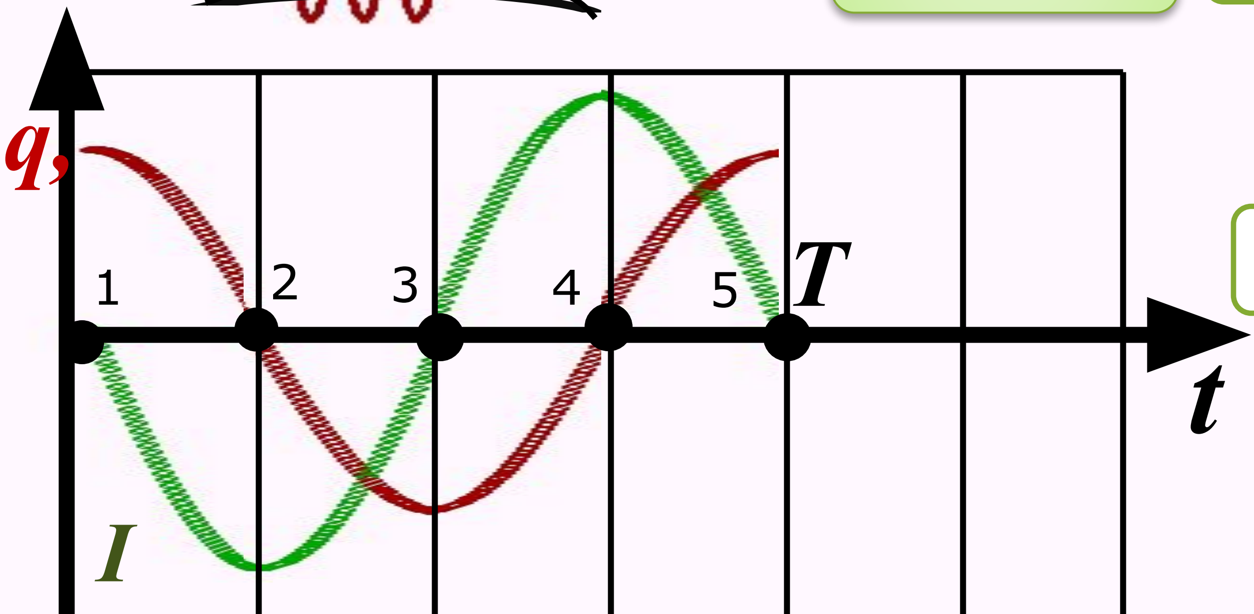
1. $t = 0$ — E_{max}, q_{max}, $I = 0$, $H = 0$.

2. $t = T/4$ — $E = 0$, $q = 0$, I_{max}, H_{max}

3. $t = T/2$ — E_{max}, $-q_{max}$, $I = 0$, $H = 0$.

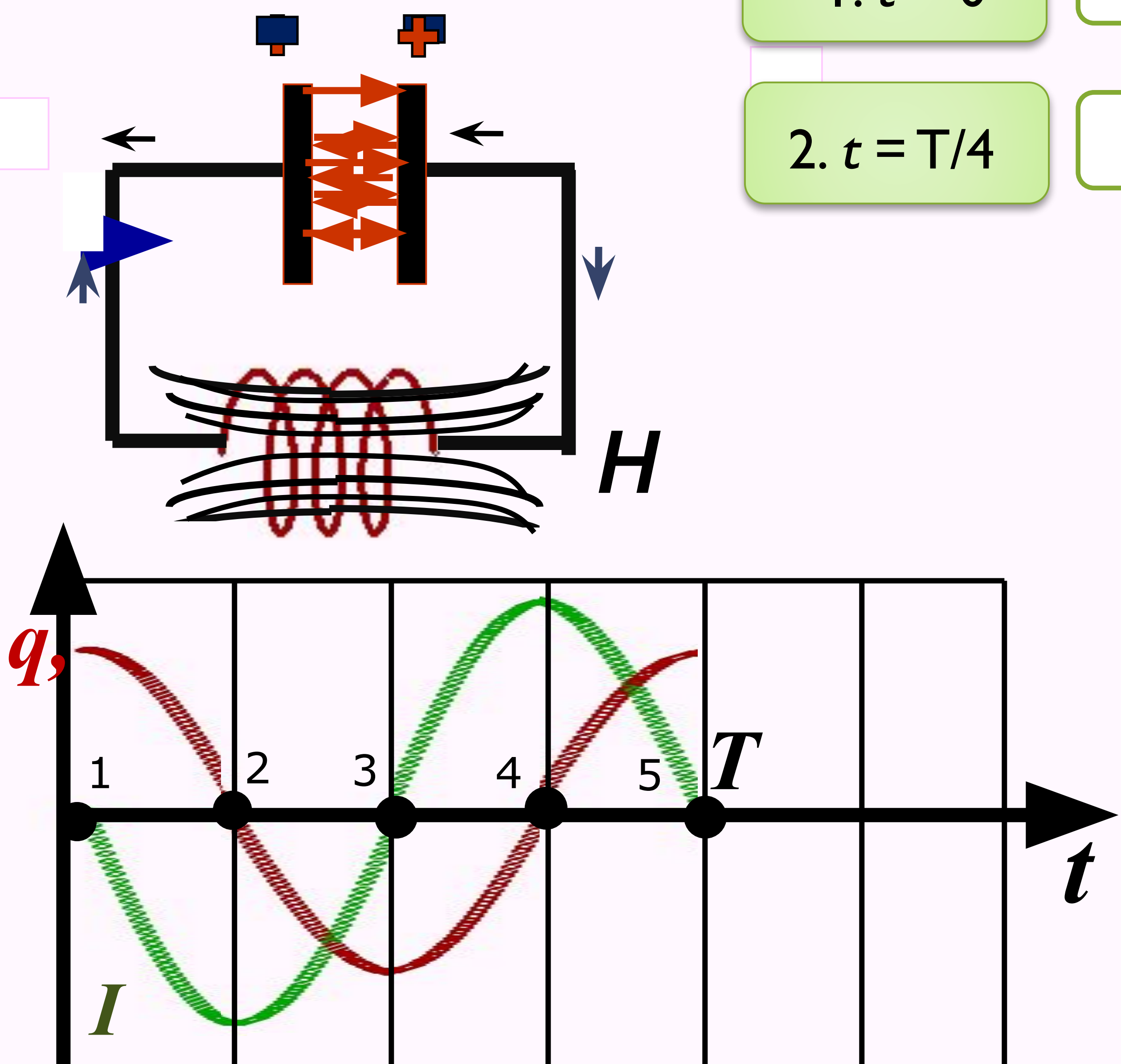
4. $t = 3T/4$ — $E = 0$, $q = 0$, I_{max}, H_{max}

5. $t = T$ — E_{max}, q_{max}, $I = 0$, $H = 0$.



5. Колебательный контур

LC - контур



1. $t = 0$

E_{max}, q_{max}, $I = 0$, $H = 0$.

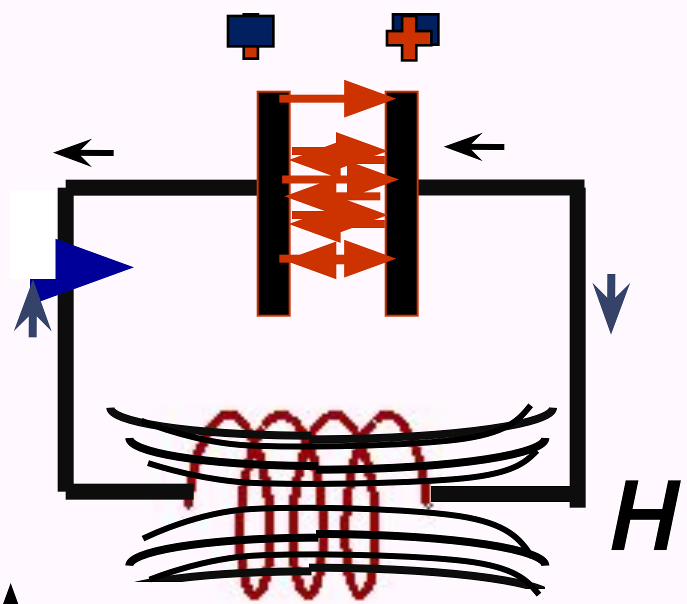
2. $t = T/4$

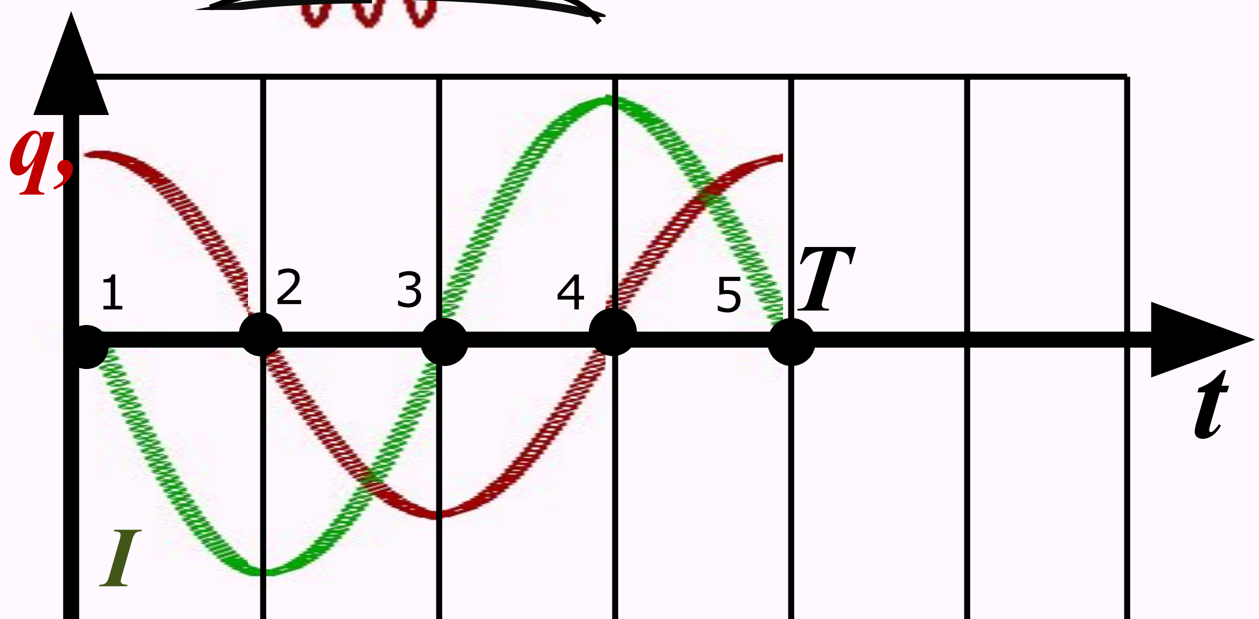
$E = 0$, $q = 0$, I_{max}, H_{max}

1 – 2 – происходит **РАЗРЯДКА** конденсатора. Основной ток течёт от «+» к «-», экстраток самоиндукции в **противоположную** сторону. Заряд и электрическое поле на конденсаторе исчезает, а ток и магнитное поле усиливается.

5. Колебательный контур

LC - контур





2. $t = T/4$

$E = 0$, $q = 0$, I_{max}, H_{max}

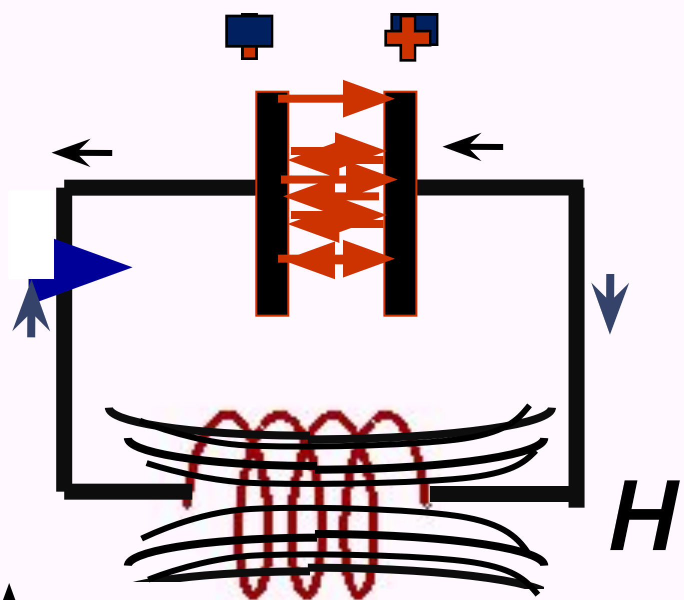
3. $t = T/2$

E_{max}, $-q_{max}$, $I = 0$, $H = 0$.

2 – 3 – происходит **ПЕРЕЗАРЯДКА** конденсатора. Основной ток и экстраток самоиндукции текут в **одном направлении**, **в сторону «+».** Заряд и электрическое поле на конденсаторе усиливается, а ток и магнитное поле исчезает.

5. Колебательный контур

LC - контур



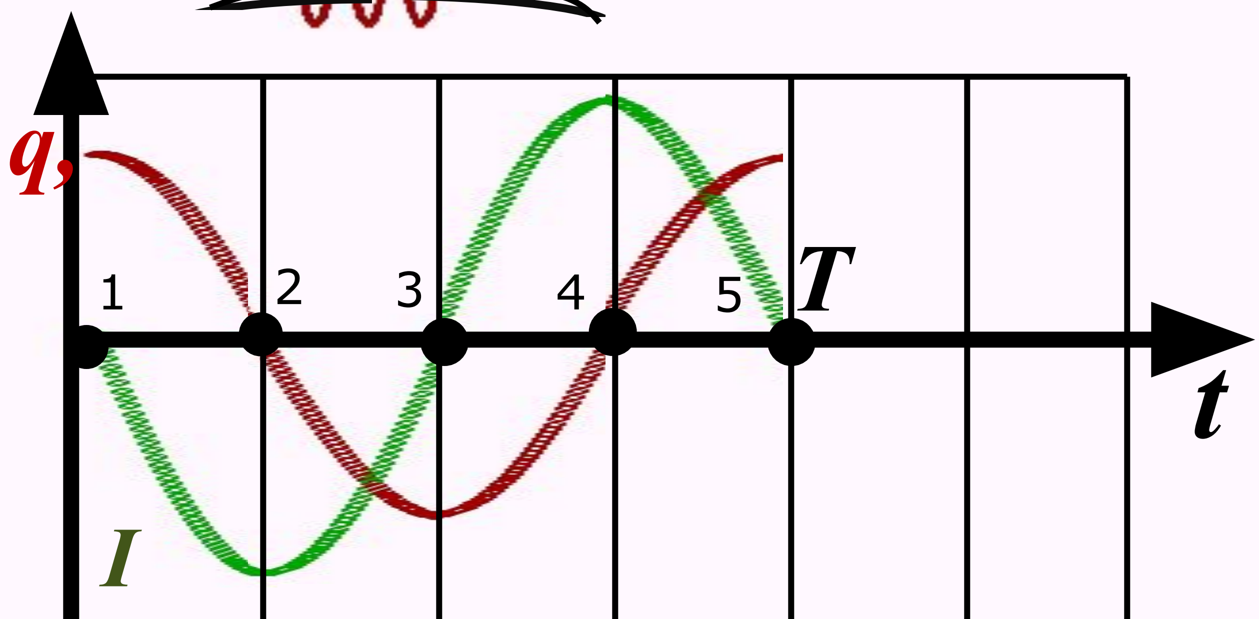
3. t = T/2

E_{max}, $-q_{max}$, $I = 0$, $H = 0$.

4. t = 3T/4

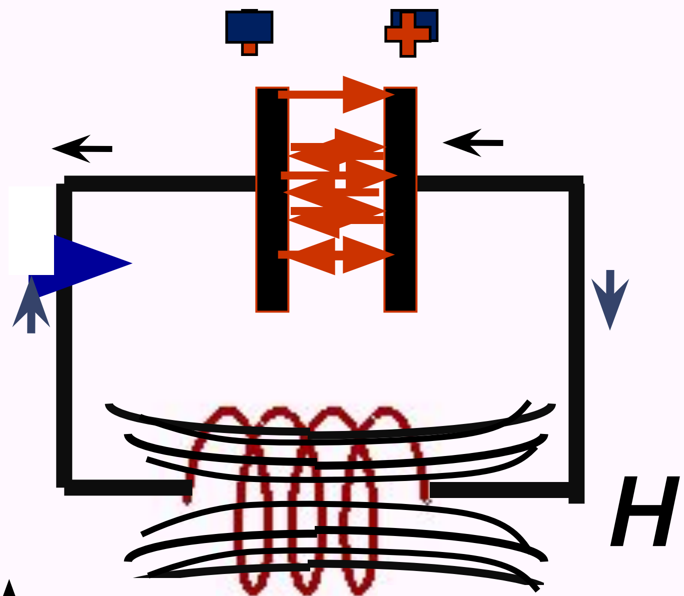
$E = 0$, $q = 0$, I_{max}, H_{max}

3 – 4 – происходит **РАЗРЯДКА** конденсатора. Основной ток течёт от «+» к «-», экстраток самоиндукции в **противоположную** сторону. Заряд и электрическое поле на конденсаторе исчезает, а ток и магнитное поле усиливается.



5. Колебательный контур

LC - контур

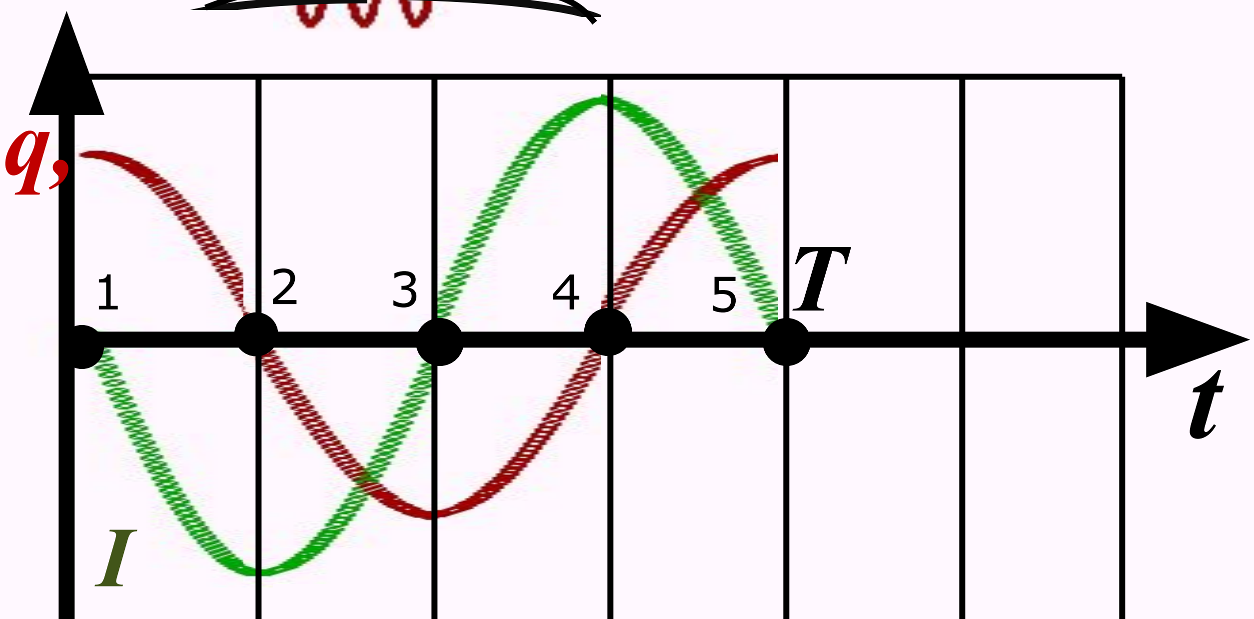


4. $t = 3T/4$

$E = 0$, $q = 0$, I_{max}, H_{max}

5. $t = T$

E_{max}, q_{max}, $I = 0$, $H = 0$.



4 – 5 – происходит **ПЕРЕЗАРЯДКА** конденсатора. Основной ток и экстраток самоиндукции текут в **одном направлении**, **в сторону «+».** Заряд и электрическое поле на конденсаторе усиливается, а ток и магнитное поле исчезает.

По второму правилу Кирхгофа

Напряжение на конденсаторе

ЭДС самоиндукции

$$U_c = q / C; \qquad \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}$$

$$U_c = \varepsilon_c; \qquad q / C = -L\,{}^{dI}\!/_{dt}$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\boxed{\frac{1}{LC}}\,q=0$$

$$\omega_0^{\ 2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих электромагнитных колебаний

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_o^2q=0$$

Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Формула Томсона-Кельвина

Решение дифференциального уравнения

$$q = \boxed{q_m} \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$$

- амплитуда заряда

Уравнение колебаний силы тока

$$I = -\boxed{q_m \omega_0} \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$

$$I_m$$

- амплитуда тока

Уравнение колебаний напряжения на конденсаторе

$$U_C = \boxed{\frac{q_m}{C}} \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$$

- амплитуда напряжения на конденсаторе

Энергия электрического и магнитного полей

$$W_E = \frac{q^2}{2C}; \qquad W_M = \frac{LI^2}{2}$$

Когда одна из энергий максимальна, другая равна нулю – происходит переход энергии электрического поля в энергию магнитного и наоборот.

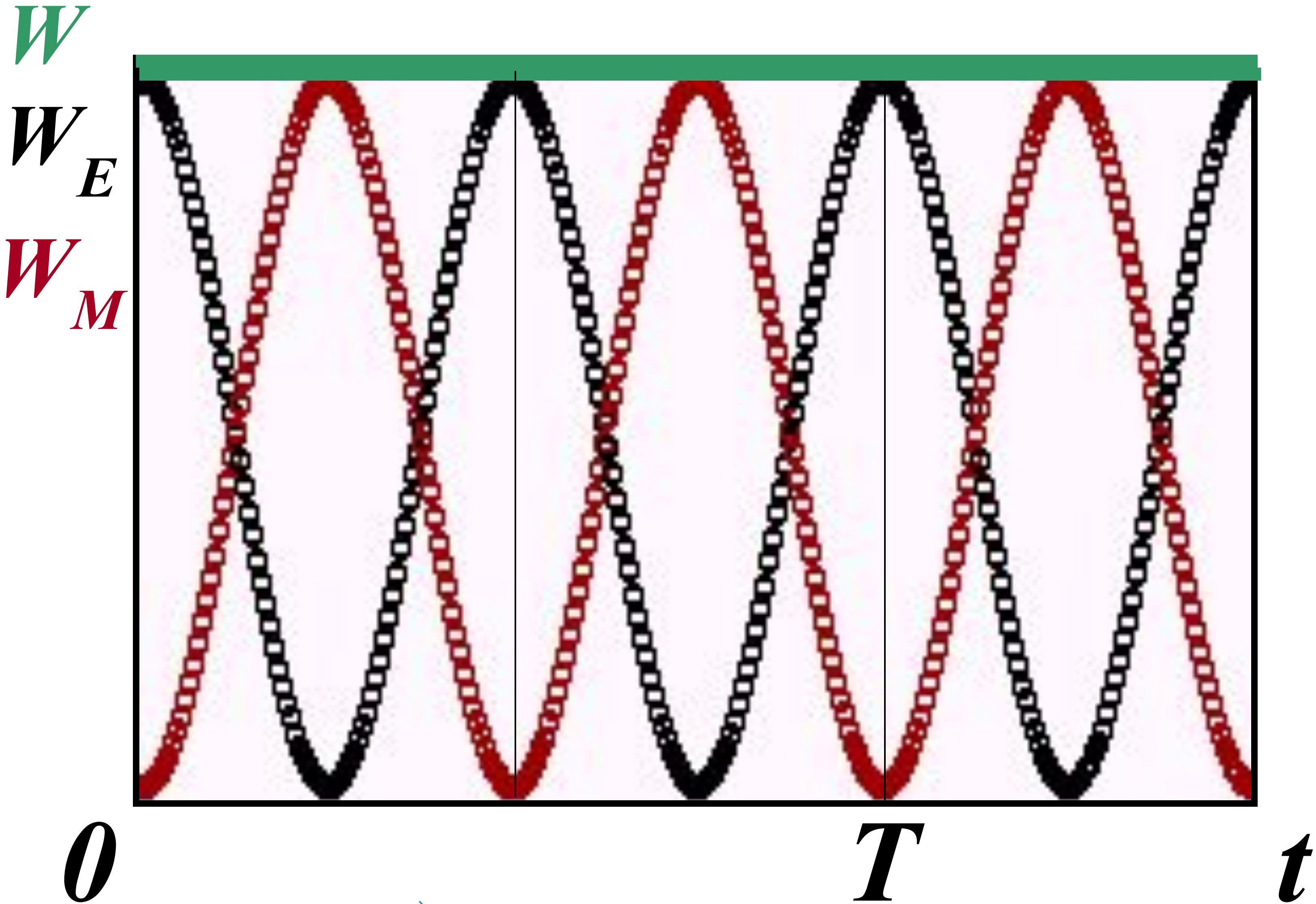
Полная энергия

$$W = W_E + W_M$$

$$W = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$$

Полная энергия остается постоянной во времени (*LC* - контур – идеальный)

Зависимость энергии от времени



6. Гармонический осциллятор

Это система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \omega_0^2 s = 0 \qquad (1)$$

Примеры гармонического осциллятора

1. Пружинный маятник
2. Математический маятник
3. Физический маятник
4. Колебательный контур (LC-контур)

Уравнение гармонического осциллятора

$$S = S_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (2)$$

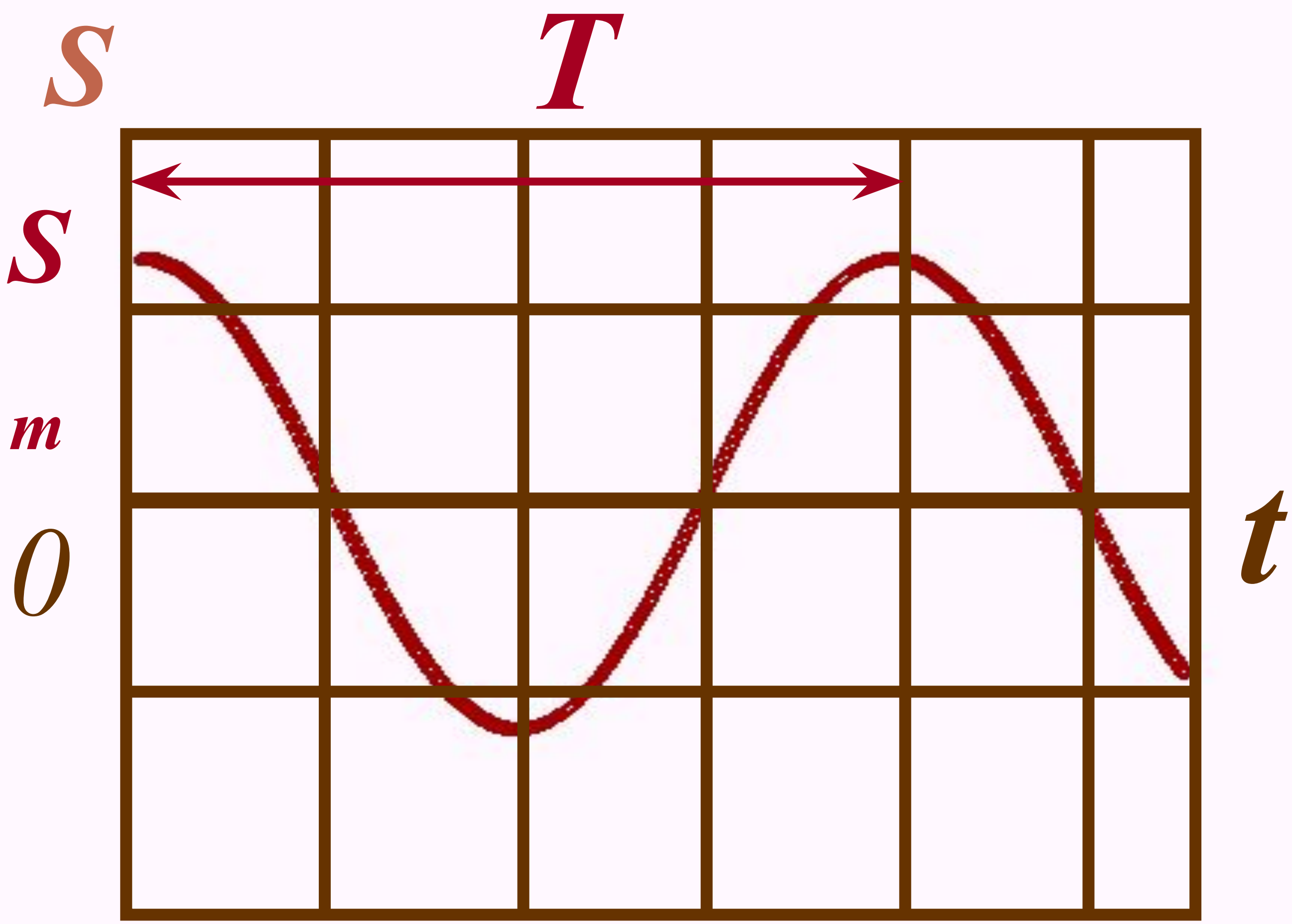
или

$$S = S_m \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

S - колеблющийся параметр (x, v, a, q, I, U_c , B, H, E и т. д.);

$S_m = A$ - амплитуда колебаний

График колебаний



$$S = S_m \, cos(\omega_o t + \alpha_0); \quad \alpha_0 = 0$$

Основные параметры

$(\omega_0 t + \alpha_0)$ - **фаза колебаний;**

Ед. изм. -радианы или градусы

$\alpha_0 \quad (\alpha)$ - **начальная фаза;**

ω_0 - **собственная циклическая частота колебаний, т.е. число колебаний за** 2π **секунд**

Ед. изм. 1/с

Частота и период колебаний

ν - **частота колебаний, изм. в герцах (Гц).**

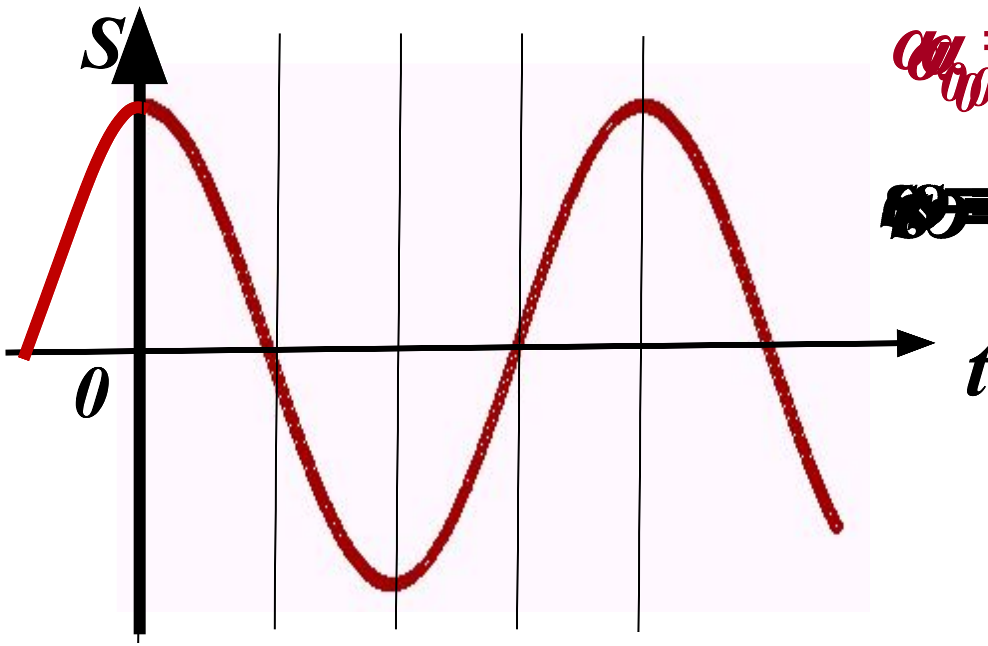
$$\omega_0 = 2\pi\nu$$

T - **период колебаний - время полного колебания. Измеряется в секундах.**

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}$$

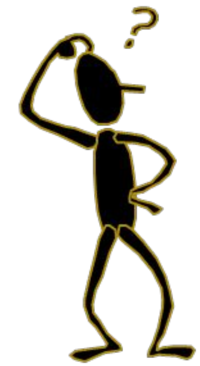
Отсчет начальной фазы

По закону косинуса



$\alpha_0 = 0$ $\alpha_0 = \pi/2$

$s = s_0 \cos(\omega_0 t + 0)$ $s = s_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2)$



По закону синуса

$\alpha_0 = 0$ $\alpha_0 = \pi/2$

$s = s_0 \sin(\omega_0 t + \pi)$ $s = s_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2)$