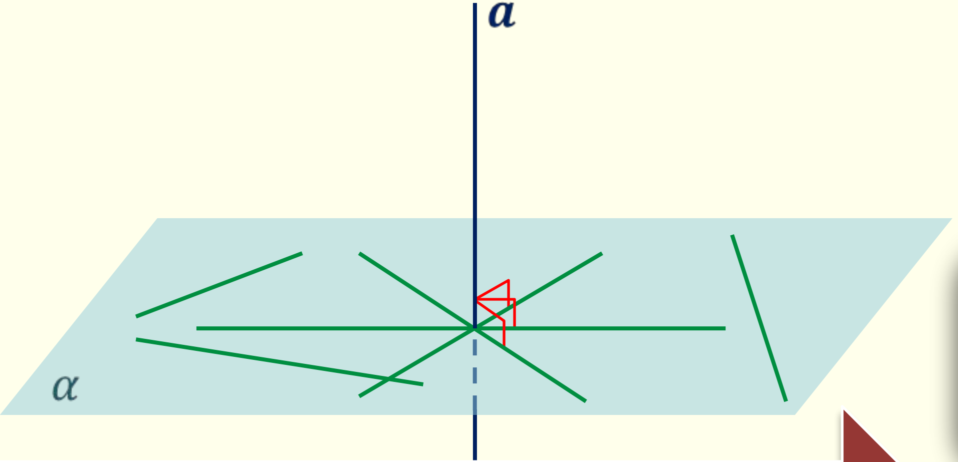
Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Перпендикулярные прямые в пространстве

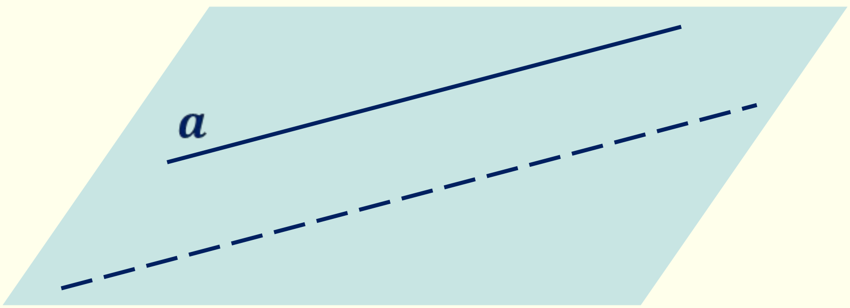
Прямая называется перпендикулярной к плоскости,
если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

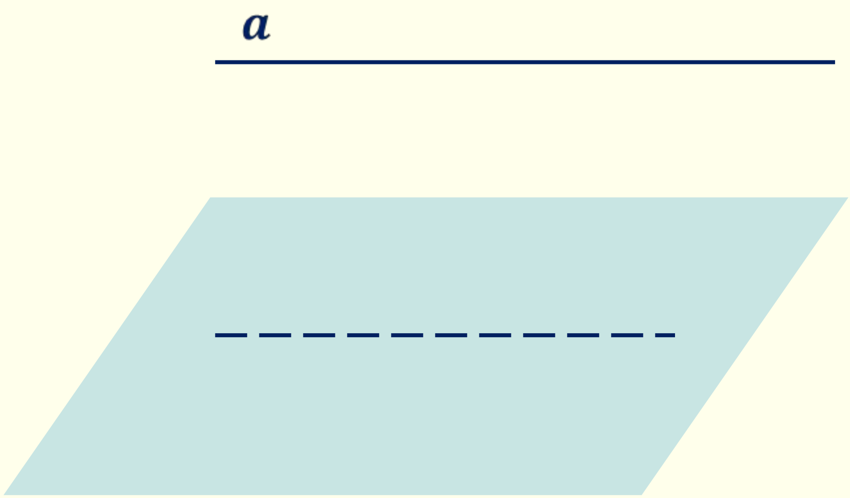


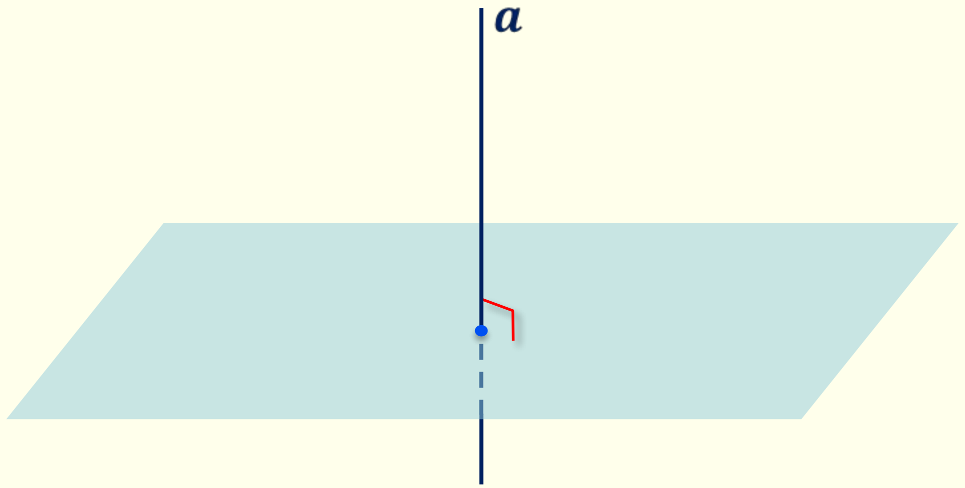
$a \perp \alpha$

Свойство. Если прямая ***a*** перпендикулярна к плоскости ***α***, то она пересекает эту плоскость.

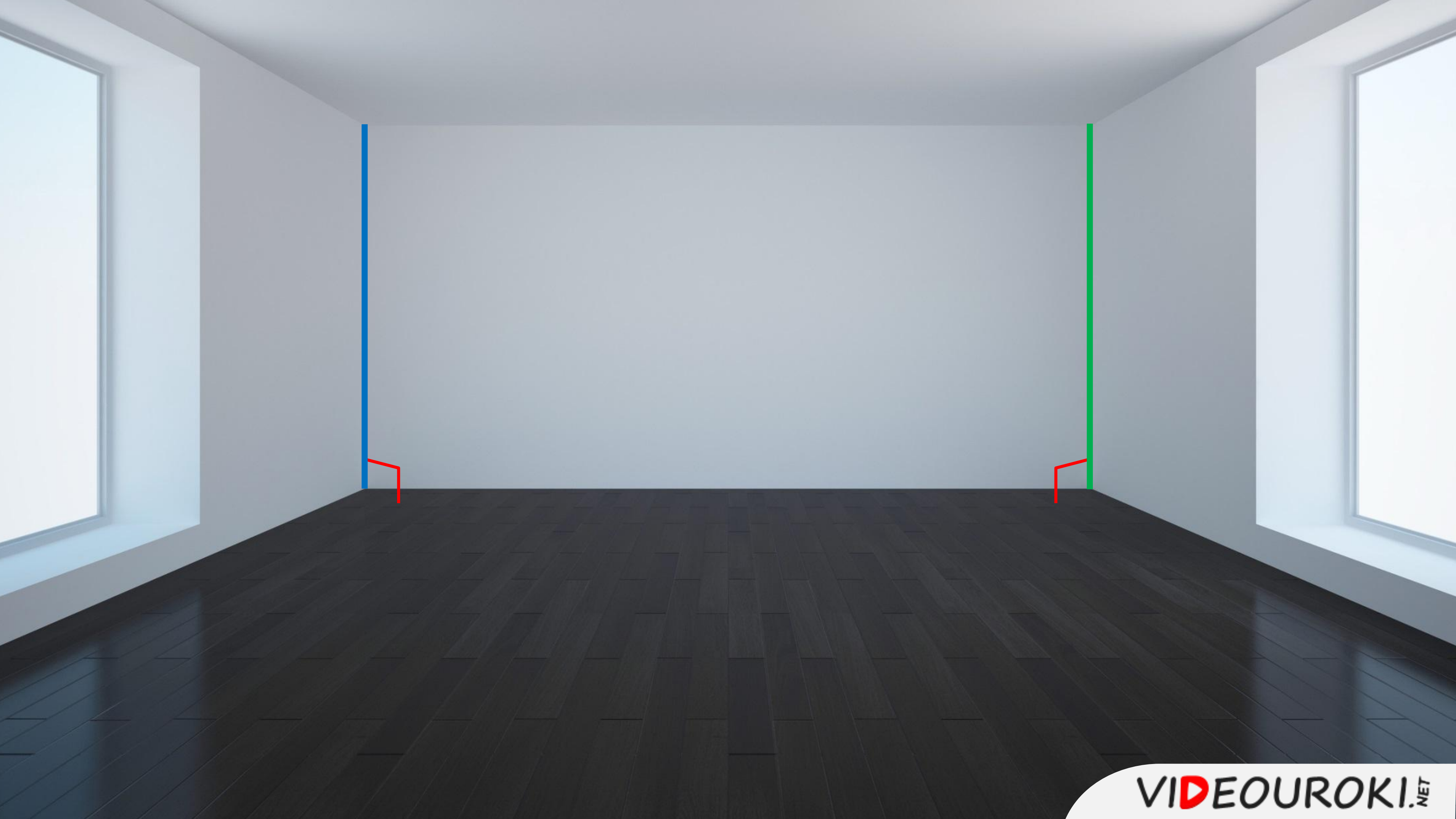
признак перпендикулярности прямой к плоскости


a


a



Свойство. Если прямая $\boldsymbol{a}$ перпендикулярна к плоскости $\boldsymbol{\alpha}$, то она пересекает эту плоскость.



Задача. Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из данных углов являются прямыми?

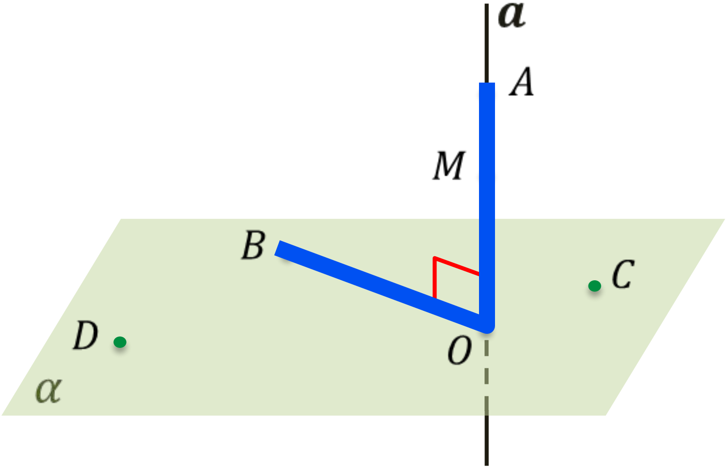
а) $\angle AOB$ б) $\angle MOC$ в) $\angle DAM$ г) $\angle DOA$ д) $\angle BMO$

Решение.

а) $AO \subset a \quad \Rightarrow \quad AO \perp \alpha$

$AO \perp OB$

$\angle AOB = 90°$



Задача. Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из данных углов являются прямыми?

а) $\angle AOB$ б) $\angle MOC$ в) $\angle DAM$ г) $\angle DOA$ д) $\angle BMO$

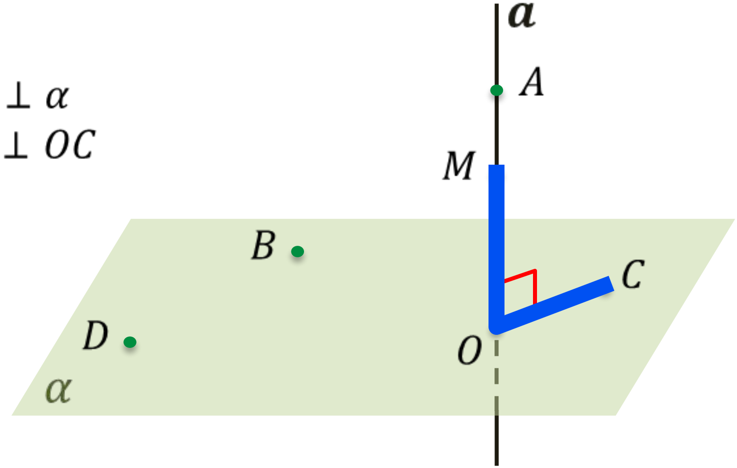
Решение.

а) $AO \subset a \implies \begin{array}{l} AO \perp \alpha \\ AO \perp OB \end{array}$

$\angle AOB = 90°$

б) $MO \subset a \implies \begin{array}{l} MO \perp \alpha \\ MO \perp OC \end{array}$

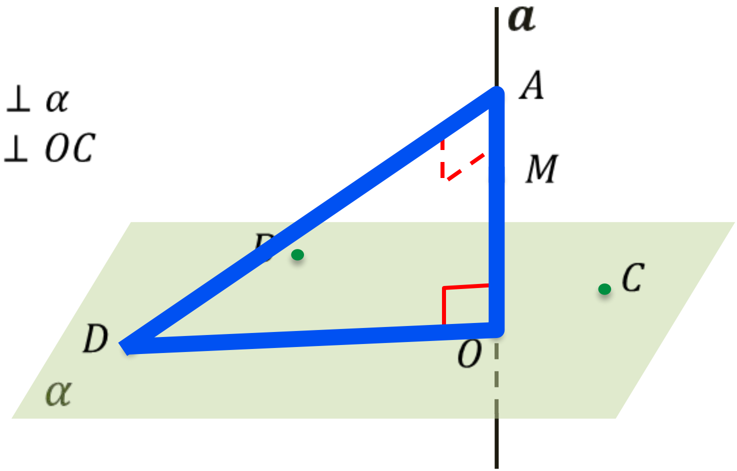
$\angle MOC = 90°$



Задача. Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из данных углов являются прямыми?

а) $\angle AOB$ б) $\angle MOC$ в) $\angle DAM$ г) $\angle DOA$ д) $\angle BMO$

Решение.



а) $AO \subset a \implies AO \perp \alpha$

$AO \perp BO$

$\angle AOB = 90°$

б) $MO \subset a \implies MO \perp \alpha$

$MO \perp OC$

$\angle MOC = 90°$

в) Допустим, что $\angle DAM = 90°$.

ΔAOD: $\angle AOD = 90°$ $(AO \perp \alpha \implies AO \perp OD)$

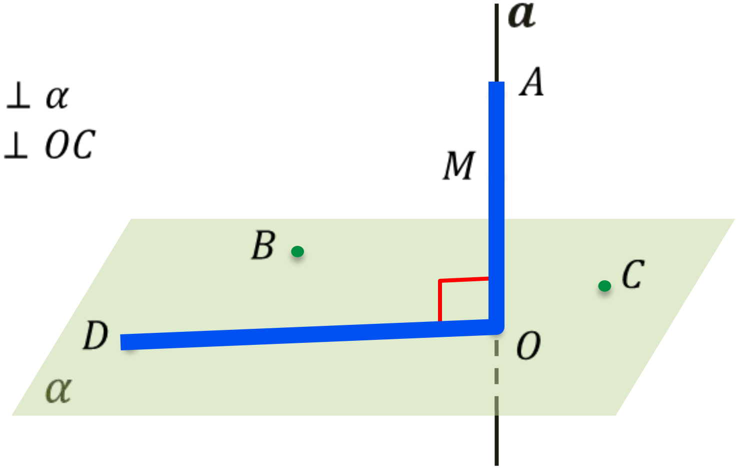
В ΔAOD $\angle DAM = \angle AOD = 90°$?!

Допущение не верно, $\angle DAM \neq 90°$.

Задача. Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из данных углов являются прямыми?

а) $\angle AOB$ б) $\angle MOC$ в) $\angle DAM$ г) $\angle DOA$ д) $\angle BMO$

Решение.



а) $AO \subset a \implies AO \perp \alpha$, $AO \perp OB$

$\angle AOB = 90°$

б) $MO \subset a \implies MO \perp \alpha$, $MO \perp OC$

$\angle MOC = 90°$

в) Допустим, что $\angle DAM = 90°$.

ΔAOD: $\angle AOD = 90°$ ($AO \perp \alpha \implies AO \perp OD$)

В ΔAOD $\angle DAM = \angle AOD = 90°$?!

Допущение не верно, $\angle DAM \neq 90°$.

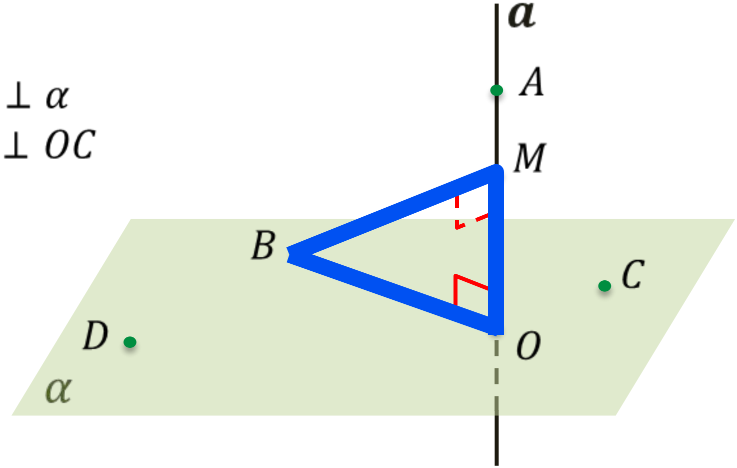
г) $OA \subset a \implies OA \perp \alpha$, $OA \perp OD$

$\angle DOA = 90°$

Задача. Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из данных углов являются прямыми?

а) $\angle AOB$ б) $\angle MOC$ в) $\angle DAM$ г) $\angle DOA$ д) $\angle BMO$

Решение.



а) $AO \subset a \quad \Longrightarrow \quad AO \perp \alpha$

$AO \perp OB$

$\angle AOB = 90°$

б) $MO \subset a \quad \Longrightarrow \quad MO \perp \alpha$

$MO \perp OC$

$\angle MOC = 90°$

в) Допустим, что $\angle DAM = 90°$.

ΔAOD: $\angle AOD = 90°$ ($AO \perp \alpha \Longrightarrow AO \perp OD$)

В ΔAOD $\angle DAM = \angle AOD = 90°$?!

Допущение не верно, $\angle DAM \neq 90°$.

г) $OA \subset a \quad \Longrightarrow \quad OA \perp \alpha$

$OA \perp OD$

$\angle DOA = 90°$

д) Допустим, что $\angle BMO = 90°$.

ΔBMO: $\angle BOM = 90°$ ($MO \perp \alpha \Longrightarrow MO \perp OB$)

В ΔBMO $\angle BMO = \angle BOM = 90°$?!

Допущение не верно, $\angle BMO \neq 90°$.

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

$$a \parallel a_1,\ a \perp \alpha \quad \Longrightarrow \quad a_1 \perp \alpha$$

Доказательство.

1. $a \perp \alpha \quad \Longrightarrow \quad a \perp x$

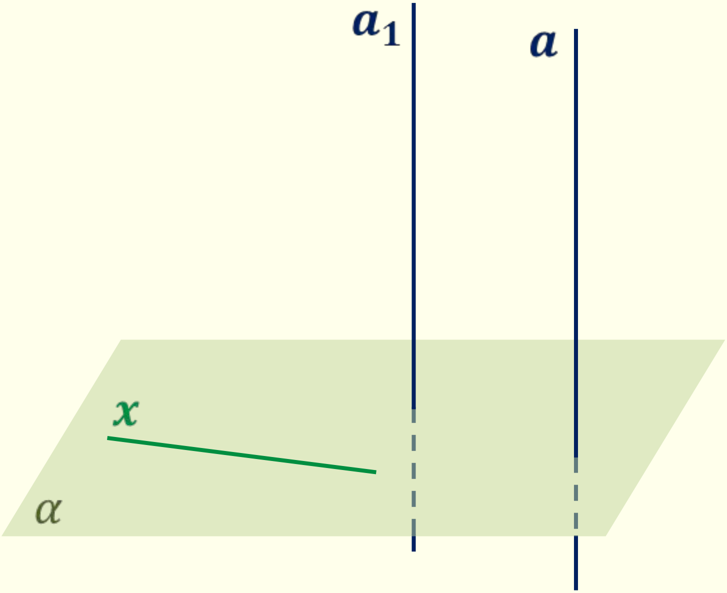
2. $a \parallel a_1,\ a \perp x \quad \Longrightarrow \quad a_1 \perp x$

Какую бы прямую на плоскости мы не взяли в качестве x, последнее утверждение будет всегда верным.

Значит, a_1 перпендикулярна к любой прямой из α.

$\Longrightarrow \quad a_1 \perp \alpha$

Что и требовалось доказать.



Обратная теорема.

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

$$a \perp \alpha,\ b \perp \alpha \ \Longrightarrow\ a \parallel b$$

Доказательство.

1. $b_1 \parallel a,\ a \perp \alpha \ \Longrightarrow\ b_1 \perp \alpha$

2. $\alpha \cap \beta = c$

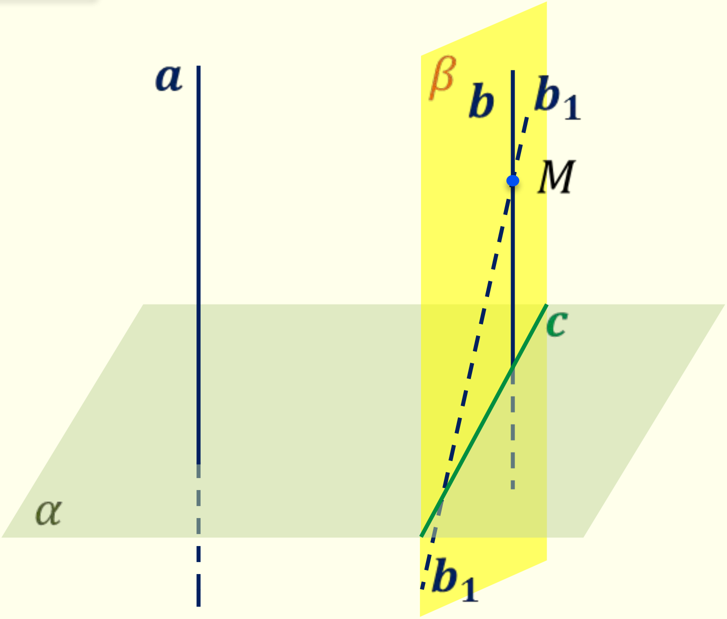
3. $b \perp \alpha,\ c \subset \alpha \ \Longrightarrow\ b \perp c$

4. $b_1 \perp \alpha,\ c \subset \alpha \ \Longrightarrow\ b_1 \perp c$

5. $b = b_1$

6. $b_1 \parallel a \ \Longrightarrow\ b \parallel a$

!?



Что и требовалось доказать.

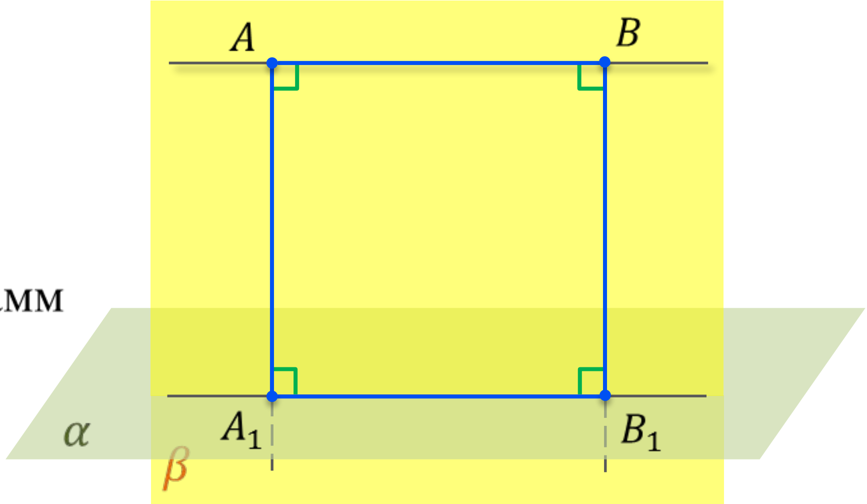
Задача. $AB \parallel \alpha$, $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$. $AB = AA_1 = 5{,}4$ см.
Определить вид четырёхугольника ABB_1A_1 и найти его периметр.

Решение.

1. $AA_1 \perp \alpha,\ BB_1 \perp \alpha \ \Rightarrow \ AA_1 \parallel BB_1$

2. $\alpha \cap \beta = A_1B_1$
$AB \subset \beta,\ AB \parallel \alpha \ \Rightarrow \ AB \parallel A_1B_1$

Из пунктов 1 и 2 $\Rightarrow$ ABB_1A_1 – параллелограмм



4. $AA_1 \perp \alpha \ \Rightarrow \ AA_1 \perp A_1B_1 \ \Rightarrow \ \angle A_1 = 90°$
$\angle B = \angle A_1 = 90°$

5. $BB_1 \perp \alpha \ \Rightarrow \ BB_1 \perp A_1B_1 \ \Rightarrow \ \angle B_1 = 90°$
$\angle A = \angle B_1 = 90°$

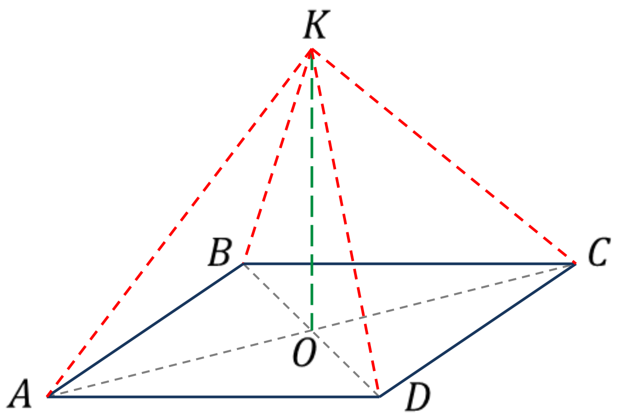
Из пунктов 4 и 5 $\Rightarrow$ ABB_1A_1 – прямоугольник

7. $AB = AA_1 \ \Rightarrow \ ABB_1A_1$ – квадрат

8. $P_{ABB_1A_1} = 4 \cdot 5{,}4 = 21{,}6$ (см)

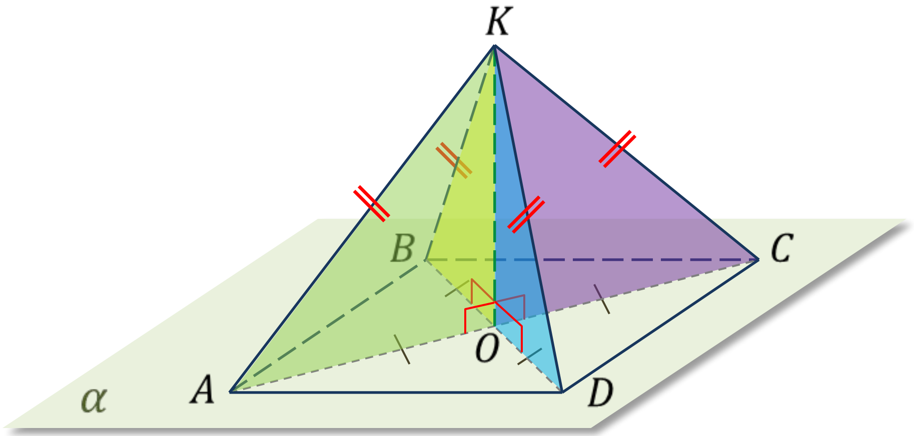
Ответ: ABB_1A_1 – квадрат, $P_{ABB_1A_1} = 21{,}6$ см.

Задача. Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости квадрата.
Найти расстояния от точки K до каждой из вершин квадрата, если $OK = b$.



Задача. Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости квадрата.
Найти расстояния от точки K до каждой из вершин квадрата, если $OK = b$.

Решение.



1. $AC = BD \implies AO = OC = BO = OD$

2. $KO \perp \alpha \implies KO \perp AC,\ KO \perp BD$

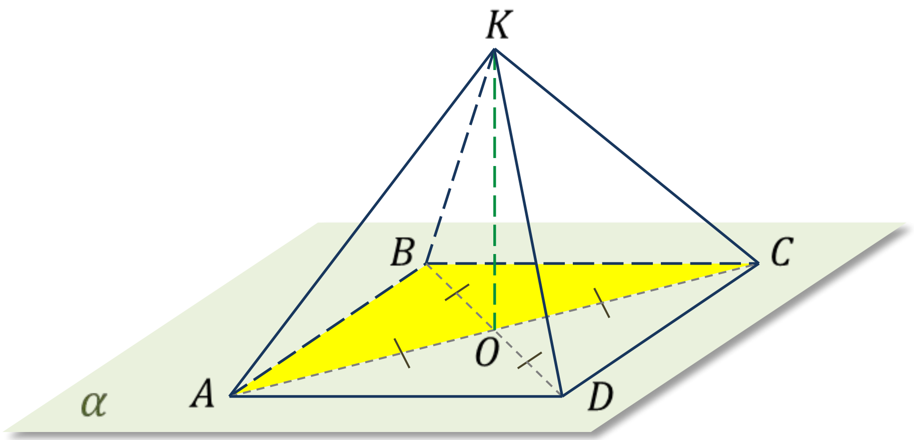
$\angle KOA = \angle KOB = \angle KOC = \angle KOD$

3. $\Delta KOA = \Delta KOB = \Delta KOC = \Delta KOD$
по двум катетам

4. $KA = KB = KC = KD$

Задача. Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости квадрата.
Найти расстояния от точки K до каждой из вершин квадрата, если $OK = b$.

Решение.



1. $AC = BD \implies AO = OC = BO = OD$

2. $KO \perp \alpha \implies KO \perp AC, KO \perp BD$

$\angle KOA = \angle KOB = \angle KOC = \angle KOD$

3. $\Delta KOA = \Delta KOB = \Delta KOC = \Delta KOD$
по двум катетам

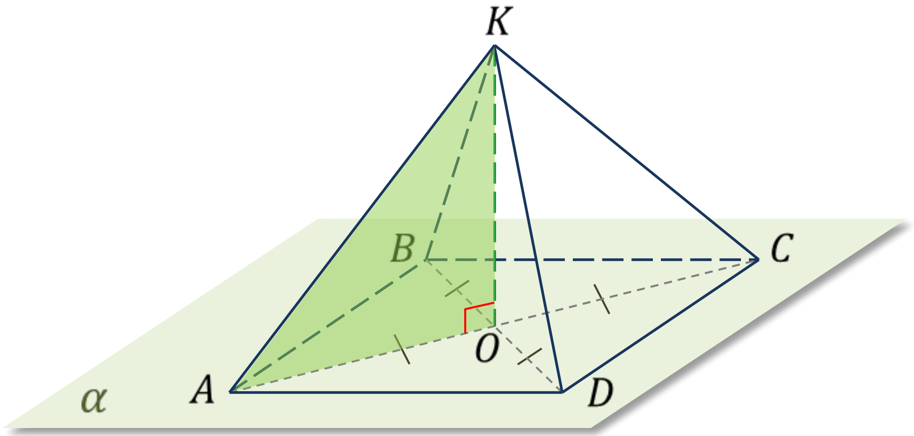
4. $KA = KB = KC = KD$

5. ΔABC: по т. Пифагора $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

6. $AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Задача. Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости квадрата.
Найти расстояния от точки K до каждой из вершин квадрата, если $OK = b$.

Решение.



1. $AC = BD \implies AO = OC = BO = OD$

2. $KO \perp \alpha \implies KO \perp AC,\ KO \perp BD$

$\angle KOA = \angle KOB = \angle KOC = \angle KOD$

3. $\Delta KOA = \Delta KOB = \Delta KOC = \Delta KOD$
по двум катетам

4. $KA = KB = KC = KD$

5. ΔABC: по т. Пифагора $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

6. $AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

7. ΔKOA: по т. Пифагора $KA = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$

8. $KA = KB = KC = KD = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$

Ответ: $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$.

Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости