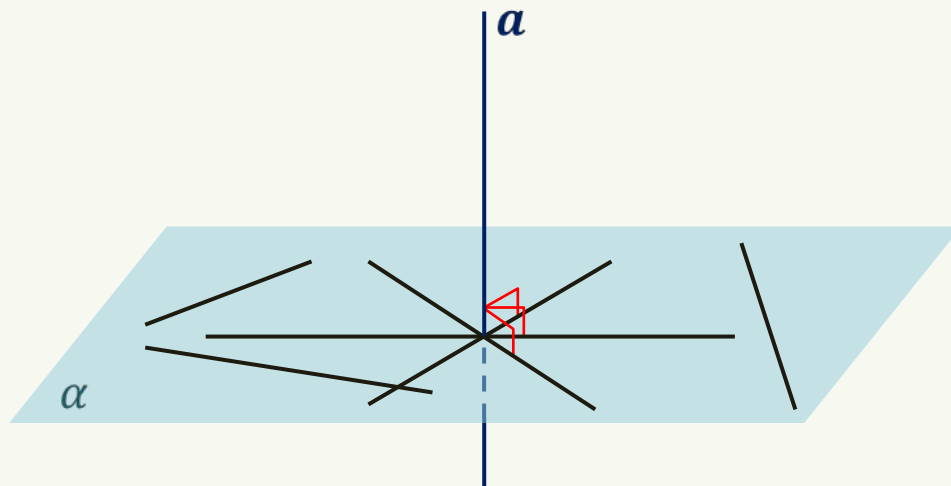
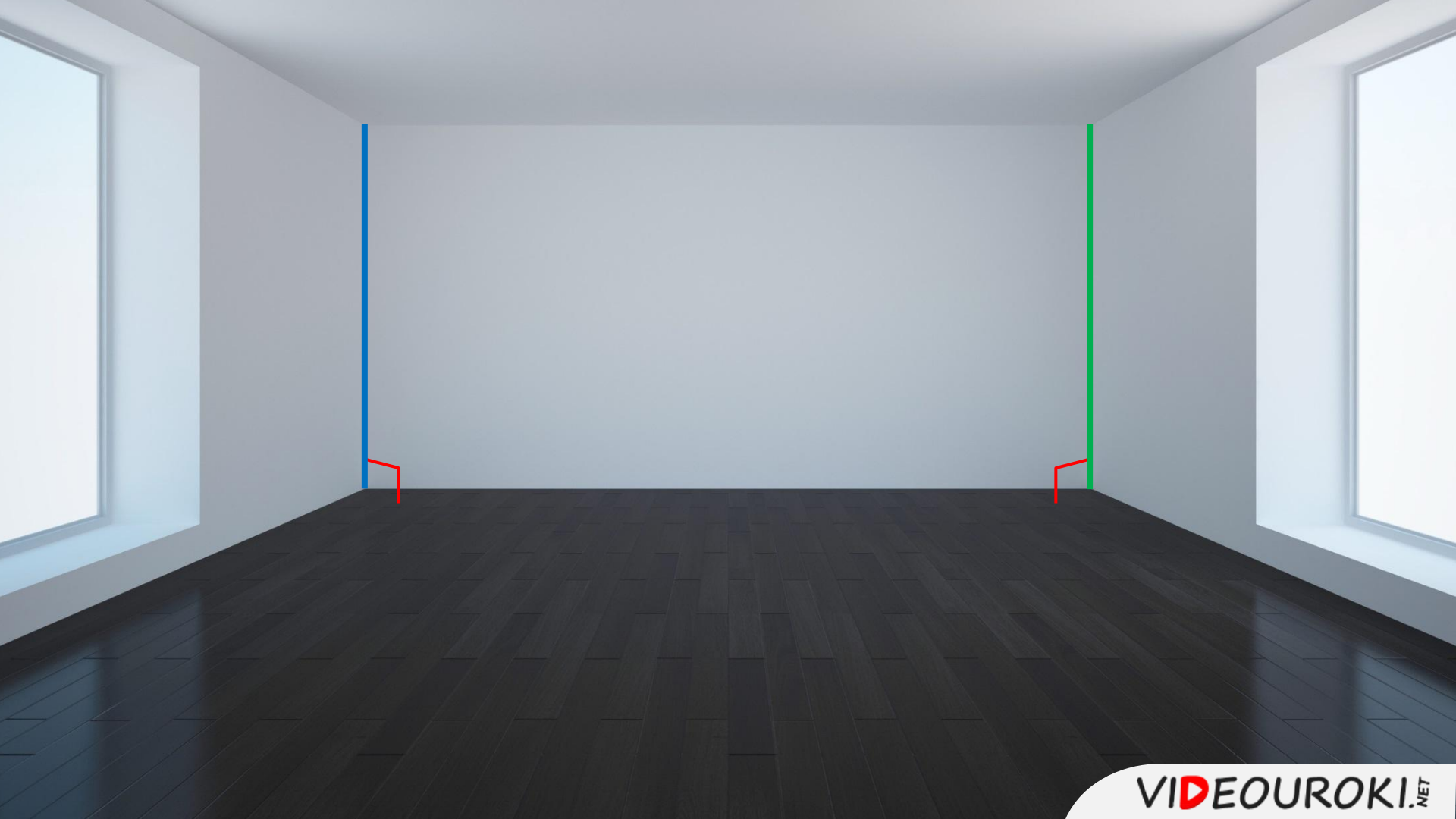


Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.







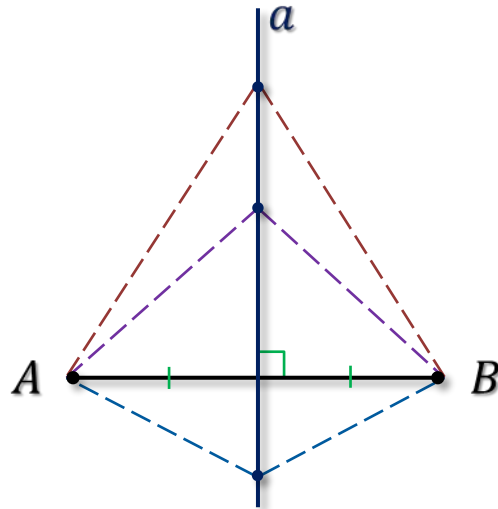


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

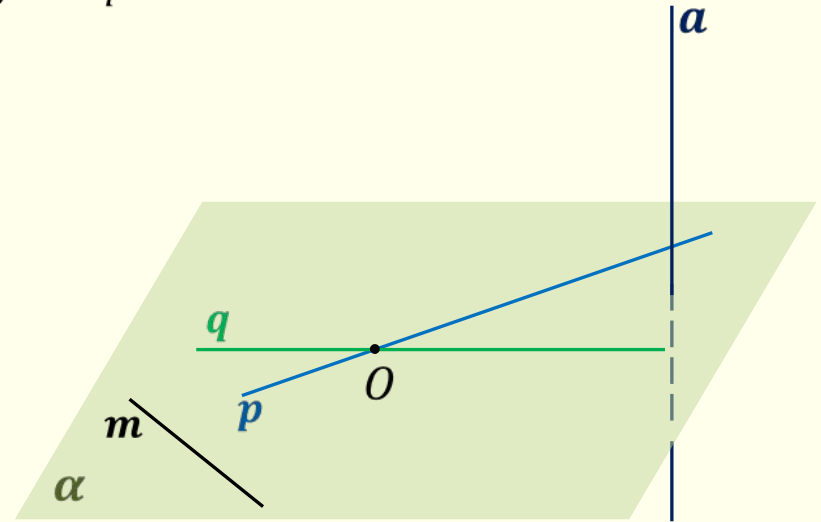
Серединный перпендикуляр к отрезку



Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

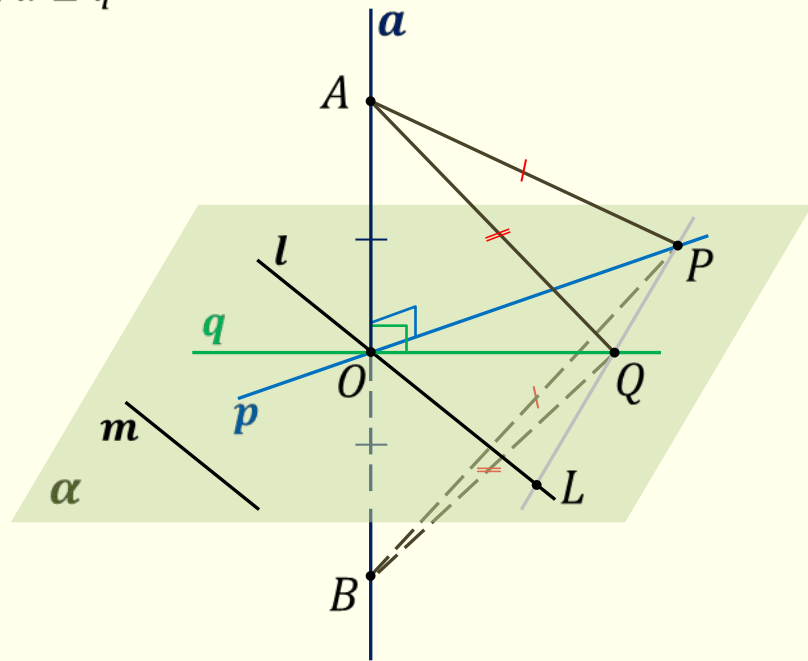


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP, AQ = BQ$

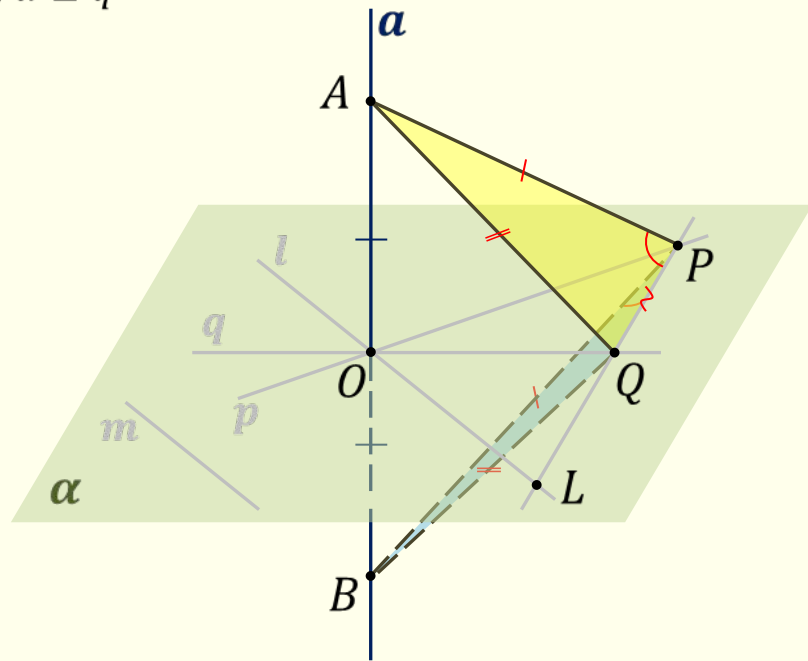


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP, AQ = BQ$
5. $\triangle APQ = \triangle BPQ$ (по 3-м сторонам)
6. $\angle APQ = \angle BPQ$

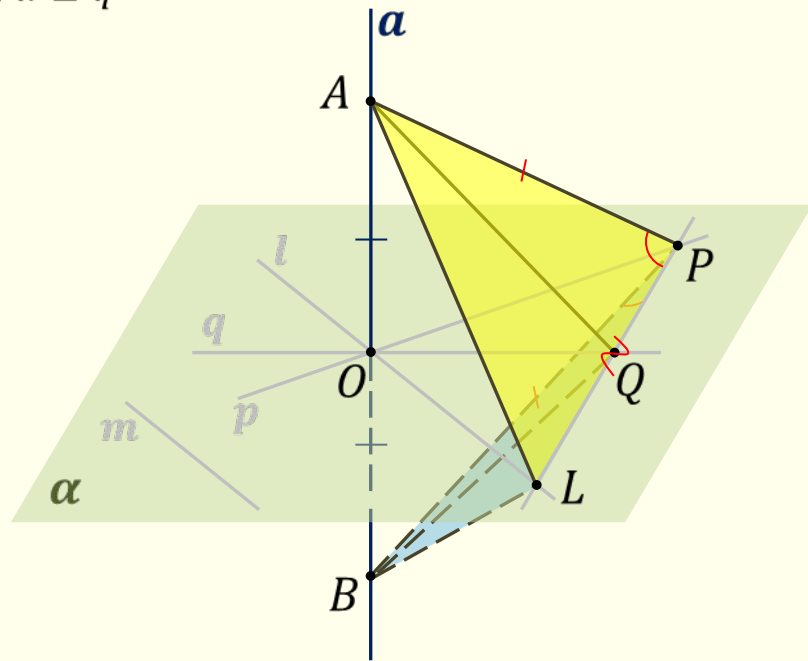


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP, AQ = BQ$
5. $\triangle APQ = \triangle BPQ$ (по 3-м сторонам)
6. $\angle APQ = \angle BPQ$
7. $\triangle APL = \triangle BPL$
(по 2-м сторонам и углу между ними)
8. $AL = BL$
9. l – серединный перпендикуляр к AB

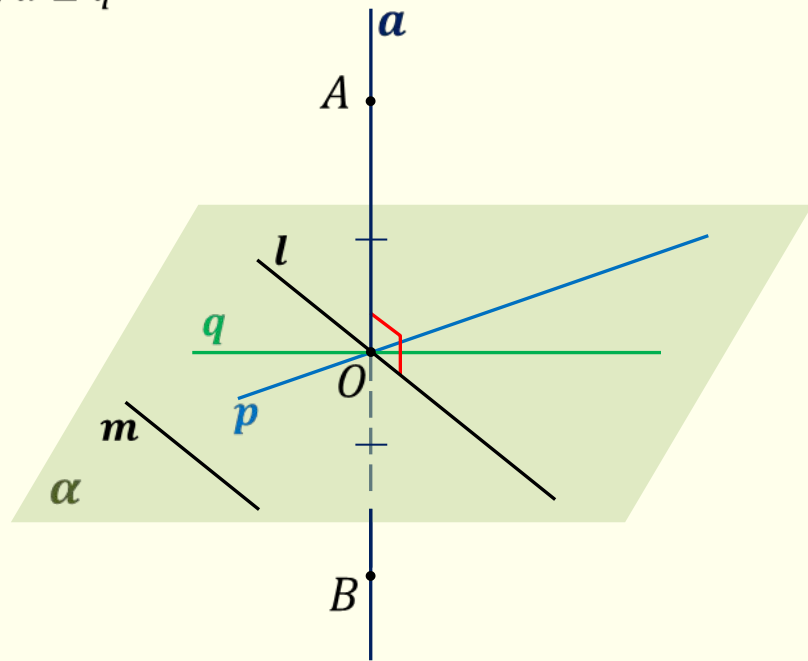


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP, AQ = BQ$
5. $\triangle APQ = \triangle BPQ$ (по 3-м сторонам)
6. $\angle APQ = \angle BPQ$
7. $\triangle APL = \triangle BPL$
(по 2-м сторонам и углу между ними)
8. $AL = BL$
9. l – серединный перпендикуляр к AB
10. $m \parallel l, l \perp a \Rightarrow m \perp a$

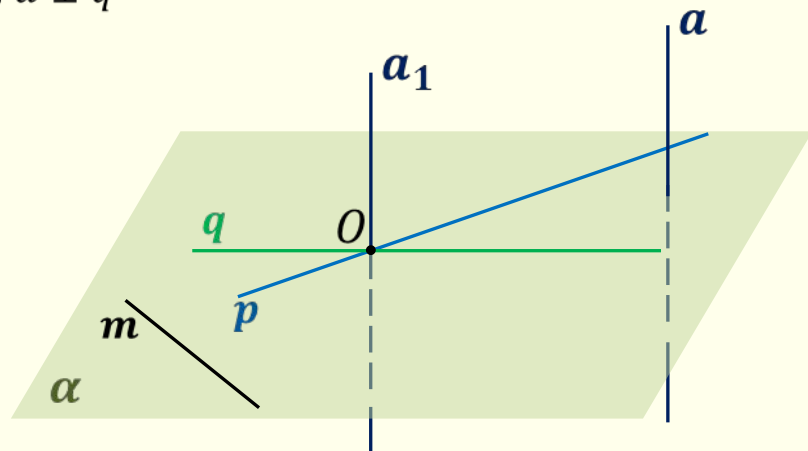


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP, AQ = BQ$
5. $\triangle APQ = \triangle BPQ$ (по 3-м сторонам)
6. $\angle APQ = \angle BPQ$
7. $\triangle APL = \triangle BPL$
(по 2-м сторонам и углу между ними)
8. $AL = BL$
9. l – серединный перпендикуляр к AB
10. $m \parallel l, l \perp a \Rightarrow m \perp a$



- | | |
|-------------------------------|-----------------------|
| 1. $a_1 \parallel a$ | 3. $a_1 \perp \alpha$ |
| 2. $a_1 \perp p, a_1 \perp q$ | 4. $a \perp \alpha$ |

Что и требовалось доказать.

Дано.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед

Доказать.

$AA_1 \perp ABCD$

Доказательство.

1. $AA_1 \perp AB$

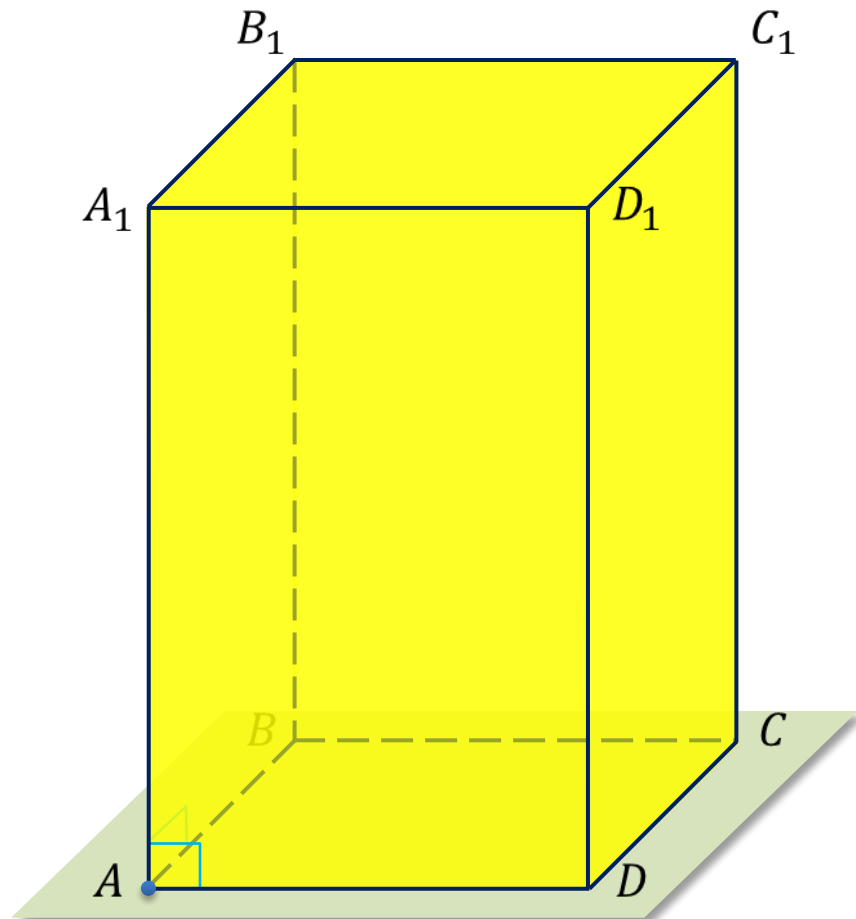
2. $AA_1 \perp AD$

3. $AB \cap AD = A$

4. $AB \subset ABCD, AD \subset ABCD$

5. $AA_1 \perp ABCD$

Что и требовалось доказать.



Задача. Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

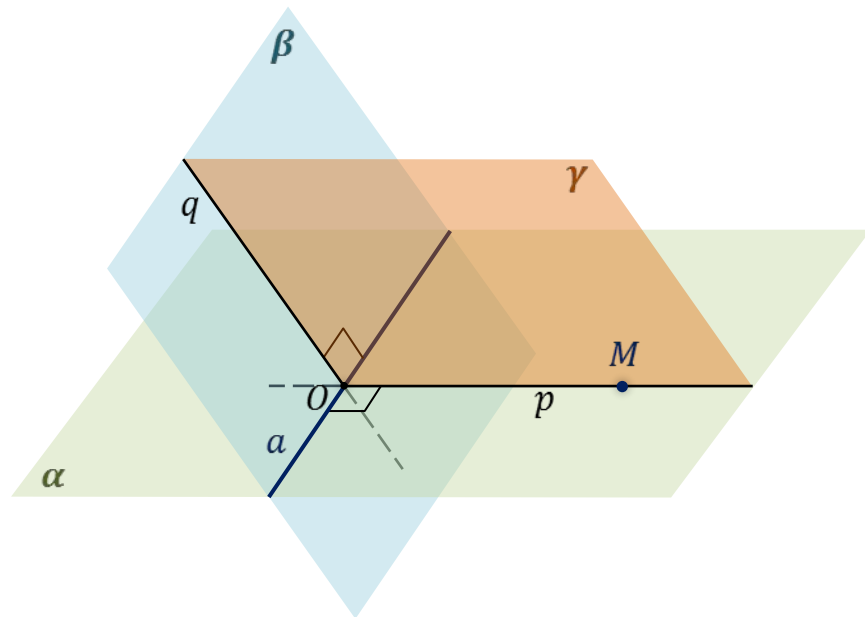
Построение.

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. Прямая a . | 6. $a \cap p = O$ |
| 2. Точка M . | 7. $O \in q, a \perp q$ |
| 3. $\alpha \cap \beta = a$ | 8. $p \cap q = \emptyset$ |
| 4. $M \in \alpha$ | 9. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$ |
| 5. $M \in p, p \perp a$ | |

Доказательство.

- | | | |
|----------------|---|------------------------------|
| 1. $a \perp p$ | 3. $p \cap q = O$ | $\Rightarrow a \perp \gamma$ |
| 2. $a \perp q$ | 4. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$ | |

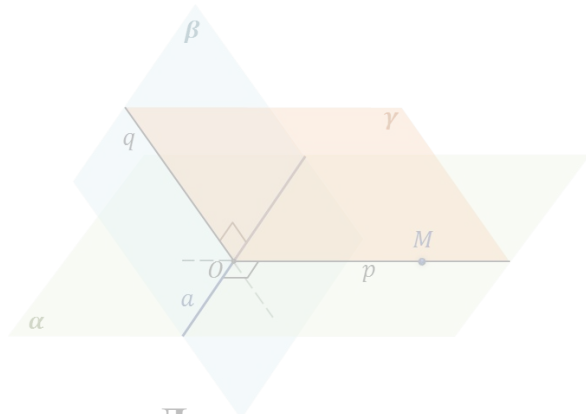
Что и требовалось доказать.



Задача. Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Построение.

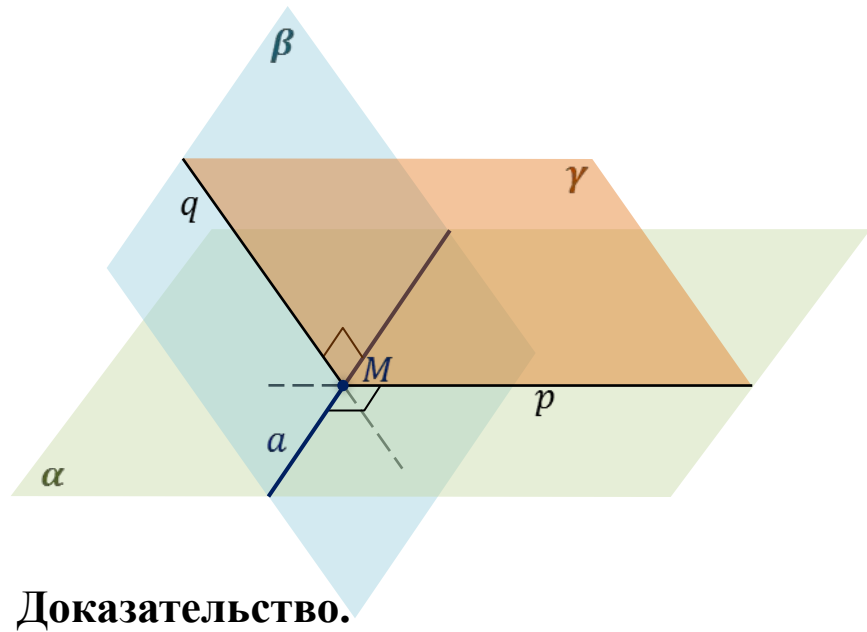
1. Прямая a .
2. Точка M .
3. $\alpha \cap \beta = a$
4. $M \in \alpha$
5. $M \in p, p \perp a$
6. $a \cap p = O$
7. $O \in q, q \perp a$
8. $p \cap q = O$
9. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$



Доказательство.

1. $a \perp p$
2. $a \perp q$
3. $p \cap q = O$
4. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$
 $\Rightarrow a \perp \gamma$

Что и требовалось доказать.



Доказательство.

- | | | |
|----------------|---|------------------------------|
| 1. $a \perp p$ | 3. $p \cap q = O$ | $\Rightarrow a \perp \gamma$ |
| 2. $a \perp q$ | 4. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$ | |

Что и требовалось доказать.

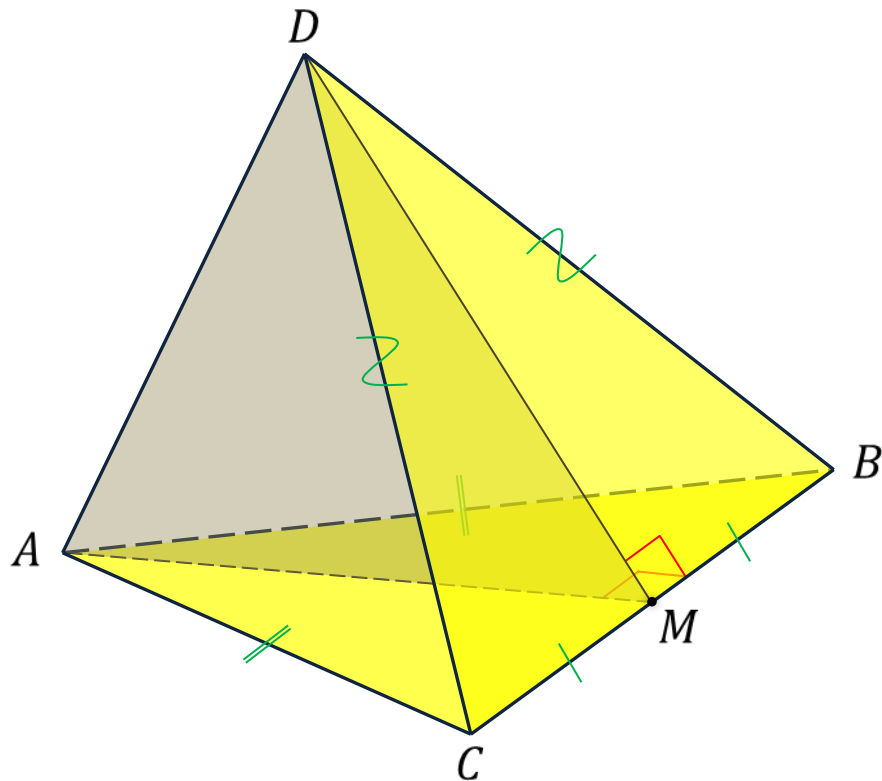
Задача. $ABCD$ — тетраэдр, где точка M — середина ребра BC . $AB = AC$, $DB = DC$.

Доказать, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна к прямой BC .

Доказательство.

1. $\triangle ABC$ (равнобедренный):
медиана AM — высота и биссектриса
2. $BC \perp AM$
3. $\triangle BDC$ (равнобедренный):
медиана DM — высота и биссектриса
4. $BC \perp DM$
5. $AM \cap DM = M$
 $AM \subset ADM$, $DM \subset ADM$
6. $BC \perp ADM$

Что и требовалось доказать.



Задача. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. $CK \perp AB$. Найти KM , если $CK = 12$ см.

Решение.

1. Рассмотрим $\triangle ABC$ (прямоугольный):

по т. Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)}$$

2. Середина гипотенузы равноудалена от вершин треугольника.

$$AM = BM = CM = \frac{1}{2} AB = 5 \text{ см}$$

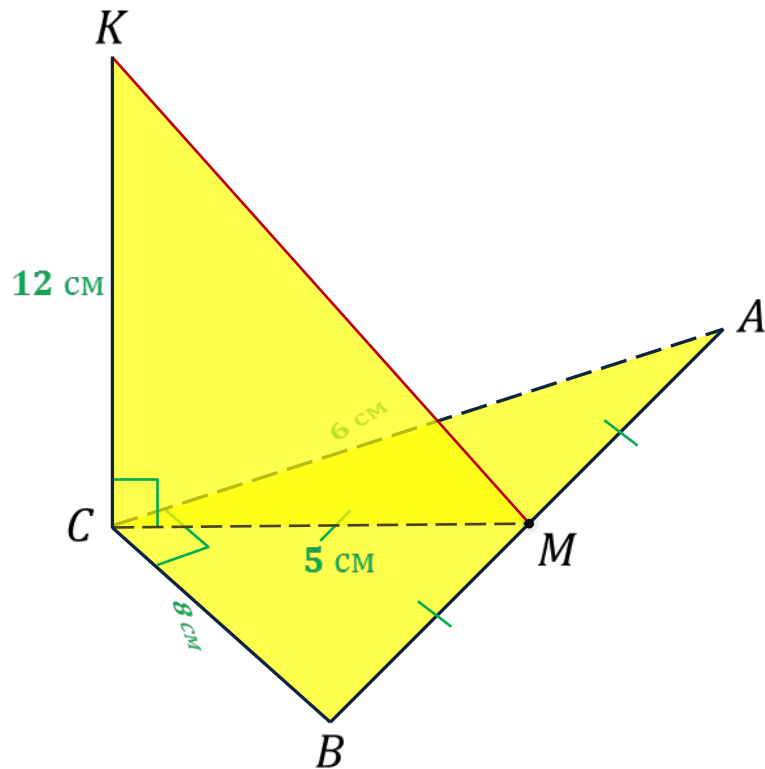
3. Рассмотрим $\triangle KCM$ (прямоугольный):

по т. Пифагора $KM^2 = MC^2 + KC^2$

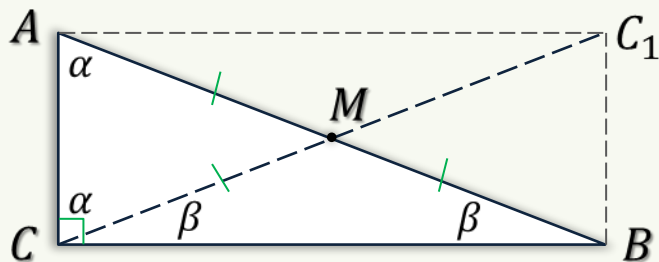
$$KM = \sqrt{MC^2 + KC^2}$$

$$KM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}$$

Ответ: 13 см.



В $\triangle ABC$ $\angle C$ равен 90° тогда и только тогда,
когда медиана CM равна половине гипотенузы AB .



Если в $\triangle ABC$ $\angle C$ равен 90° , то
медиана CM равна половине гипотенузы AB .

$$AB = CC_1 \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CC_1$$
$$\frac{1}{2}AB = CM$$

Если в $\triangle ABC$ медиана CM равна
половине гипотенузы AB , то $\angle C$ равен 90° .

$$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$
$$\angle C = \alpha + \beta \Rightarrow \angle C = 90^\circ$$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

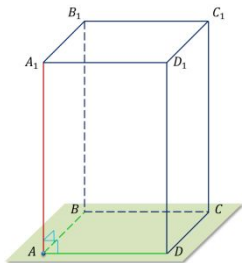
Дано.
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед

Доказать.
 $AA_1 \perp ABCD$

Доказательство.

- $AA_1 \perp AB$
- $AA_1 \perp AD$
- $AB \cap AD = A$
- $AB \subset ABCD, AD \subset ABCD$
- $AA_1 \perp ABCD$

Что и требовалось доказать.



VIDEouroki.net

7. $0 \in q, q \perp a$
 8. $p \cap q = O$
 9. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$

Доказательство.
 1. $a \perp p$
 2. $a \perp q$
 3. $p \cap q = O$
 4. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$
 $\Rightarrow a \perp \gamma$

Что и требовалось доказать.

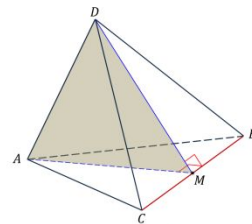
VIDEouroki.net

Задача. $ABCD$ — тетраэдр, где точка M — середина ребра BC . $AB = AC, DB = CD$.
 Доказать, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна к прямой BC .

Доказательство.

- $\triangle ABC$ (равнобедренный):
 медиана AM — высота и биссектриса
- $BC \perp AM$
- $\triangle BDC$ (равнобедренный):
 медиана DM — высота и биссектриса

$AM \perp BC$
 $DM \perp BC$
 $AM \cap DM = M$
 $AM, DM \subset ADM$
 $BC \perp ADM$
Что и требовалось доказать.



VIDEouroki.net

Задача. $\triangle ABC$ с $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана.
 Если $CK = 12$ см, найти длину отрезка AM .

Доказательство.
 1. $\triangle ABC$ (прямоугольный):
 $AB^2 = AC^2 + BC^2$
 $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ (см)
 CM — медиана, равноудалена от вершин треугольника.
 $AM = BM = CM = \frac{1}{2} AB = 5$ см

3. Рассмотрим $\triangle KCM$ (прямоугольный):
 по т. Пифагора $KM^2 = MC^2 + KC^2$
 $KM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ (см)

Ответ: 13 см.

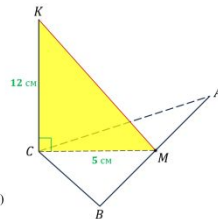
Задача. $\triangle ABC$ с $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана.
 Если $CK = 12$ см, найти длину отрезка AM .

Доказательство.
 1. $\triangle ABC$ (прямоугольный):
 $AB^2 = AC^2 + BC^2$
 $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ (см)

CM — медиана, равноудалена от вершин треугольника.

3. Рассмотрим $\triangle KCM$ (прямоугольный):
 по т. Пифагора $KM^2 = MC^2 + KC^2$
 $KM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ (см)

Ответ: 13 см.



VIDEouroki.net