ТЕМА ПРИНЦИПЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ.

Вопросы: 1. Классификация оценок

2. Распределение хи-квадрат

3. Распределение Стьюдента

4. Распределение Фишера

5. Интервальные оценки. Доверительный интервал и доверительная вероятность.

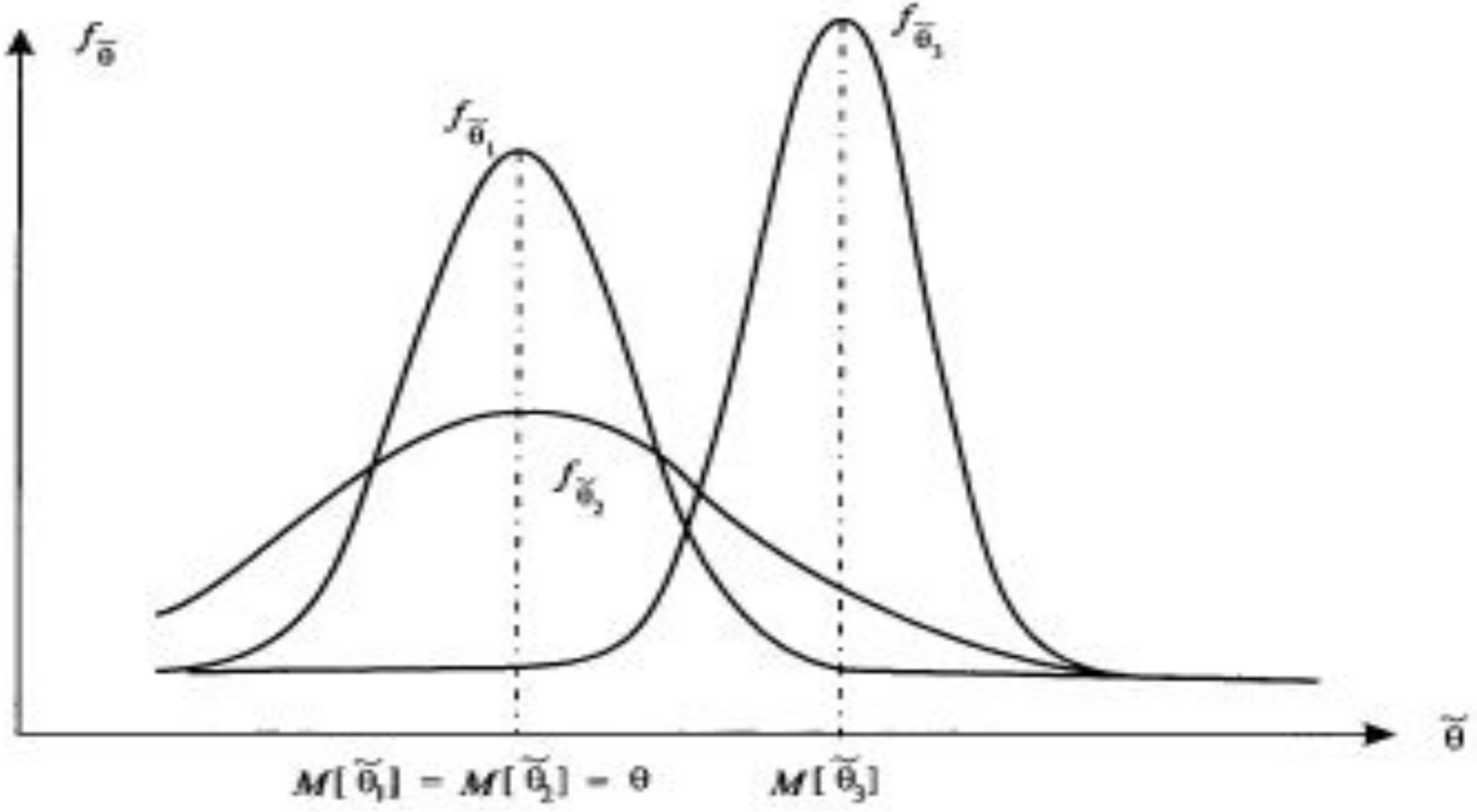
КЛАССИФИКАЦИЯ ОЦЕНОК

Статистические выводы – это заключения о генеральной совокупности (т.е. законе распределения исследуемой СВ и его параметрах либо о наличии и силе связи между исследуемыми переменными) на основе выборки, случайно отобранной из генеральной совокупности. Или обобщение результатов, полученных по выборке, на генеральную совокупность и есть суть статистических выводов.

При исследовании различных параметров генеральной совокупности на основе выборки возможно лишь получение оценок этих параметров. Эти оценки строятся на основе ограниченного набора данных, что влечет за собой вероятность погрешности. Значения оценок могут изменяться от выборки к выборке.

Процесс нахождения оценок по определенному правилу (формуле) называется оцениванием.

КЛАССИФИКАЦИЯ ОЦЕНОК



Графики плотностей распределения статистик, используемых для оценки одного параметра θ

СВОЙСТВА ОЦЕНОК

1. **Состоятельность.** Оценка $\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ называется состоятельной оценкой параметра θ, если, при $n \to \infty$, $\tilde{\theta}_n$ сходится по вероятности к θ.

2. **Несмещенность.** Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется несмещенной оценкой параметра θ, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т. е. $M[\tilde{\theta}_n] = \theta$.

3. Пусть для оценки параметра θ можно использовать две несмещенные оценки $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$. Если $D[\tilde{\theta}_1] < D[\tilde{\theta}_2]$, то говорят, что оценка $\tilde{\theta}_1$ **более эффективна**, чем оценка $\tilde{\theta}_2$.

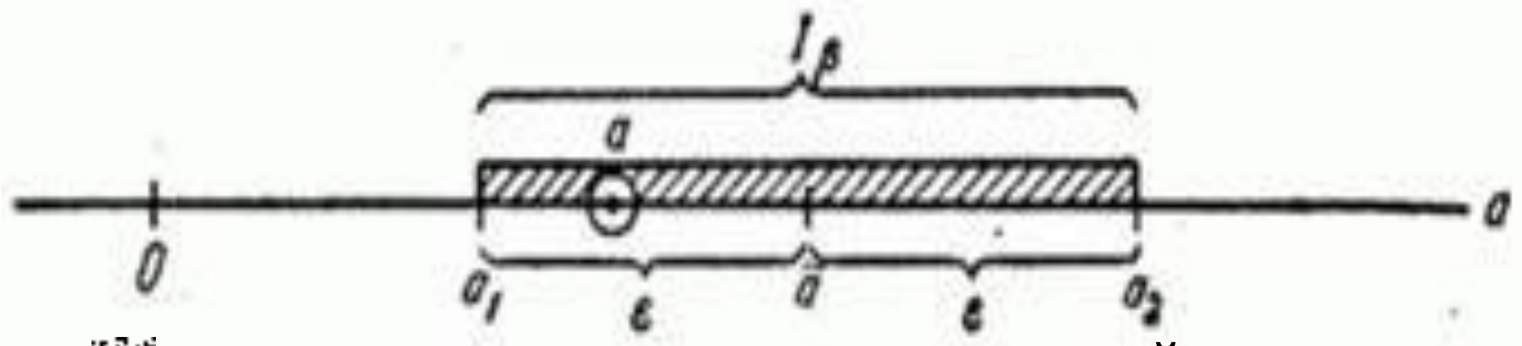
ДИСПЕРСИЯ

$$S_0^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ И ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ.

$$P(|\tilde{\theta} - \theta| < \varepsilon) = \beta \qquad I_\beta = (\tilde{\theta} - \varepsilon, \tilde{\theta} + \varepsilon)$$



Вероятность β принято называть доверительной вероятностью, а интервал - доверительным интервалом. Границы интервала: $\theta_1 = \tilde{\theta} - \varepsilon$ и $\theta_2 = \tilde{\theta} + \varepsilon$ называются доверительными границами.

Высказывания, имеющие вероятность ошибки α<= 0,05. называются *значимыми*; высказывания с вероятностью ошибки α <= 0,01 - *очень значимыми*, а высказывания с вероятностью ошибки α <= 0,001 - *максимально значимыми*

Широкий доверительный интервал указывает на то, что оценка неточна; узкий указывает на точную оценку.
Ширина доверительного интервала зависит от размера стандартной ошибки, которая, в свою очередь, зависит от объёма выборки и при рассмотрении числовой переменной от изменчивости данных дают более широкие доверительные интервалы, чем исследования многочисленного набора данных немногих переменных.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ

Распределением χ^2 с k степенями свободы называется распределение случайной величины $\chi^2(k)$, равной сумме квадратов k независимых нормально распределенных по стандартному нормальному закону $N(0, 1)$ случайных величин U_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, т. е. распределение случайной величины

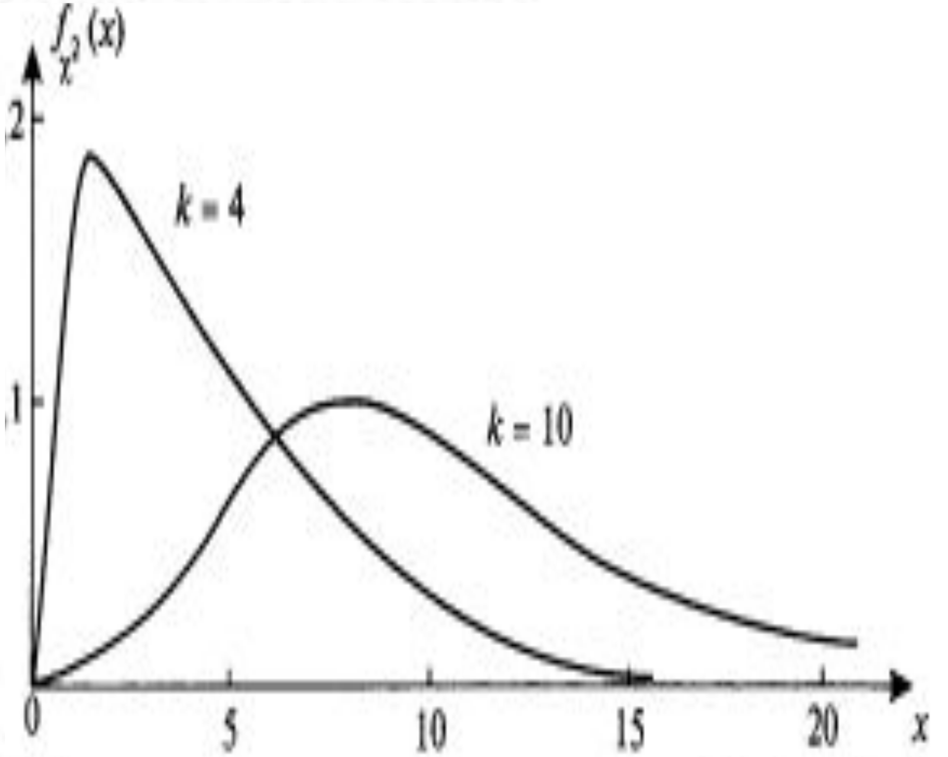
$$\chi^2(k) = U_1^2 + \ldots + U_k^2.$$

Плотность распределения $f_{\chi^2}(x)$ определяется формулой

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма функция или интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx.$$



$$M[\chi^2(k)] = k, \quad D[\chi^2(k)] = 2k.$$

Проверяется гипотеза H_0, утверждающая, что X имеет функцию распределения $F(x)$.

$x_1, x_2, ..., x_n$ — выборка наблюдений случайной величины X.

По выборке наблюдений находят оценки неизвестных параметров предполагаемого закона распределения случайной величины X.

область возможных значений случайной величины X разбивается на r множеств $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_r$, например, r интервалов в случае, когда X — непрерывная случайная величина, или r групп, состоящих из отдельных значений, для дискретной случайной величины X.

Пусть n_k — число элементов выборки, принадлежащих множеству Δ_k, $k = 1, 2, ..., r$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$.

Используя предполагаемый закон распределения случайной величины X, находят вероятности p_k того, что значение X принадлежит множеству Δ_k, т. е. $p_k = P[X \in \Delta_k]$, $k = 1, 2, ..., r$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ ХИ-

	Число наблюдений				Всего
	Δ_1	Δ_2	...	Δ_r	
Наблюдаемое	n_1	n_2	...	n_r	n
Ожидаемое	np_1	np_2	...	np_r	n

Выборочное значение статистики критерия вычисляется по формуле

$$\chi^2_{в} = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости α, если

$$\chi^2_{в} < \chi^2_{1-\alpha}(r - l - 1),$$

где $\chi^2_{1-\alpha}(r - l - 1)$ — квантиль порядка $1 - \alpha$ распределения χ^2 с $(r - l - 1)$ степенями свободы, а l — число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке; если же $\chi^2_{в} \geq \chi^2_{1-\alpha}(r - l - 1)$, то гипотеза H_0 отклоняется.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

распределение случайной величины $T(k)$, равной отношению двух независимых случайных величин U и $\sqrt{\chi^2(k)/k}$, т. е.

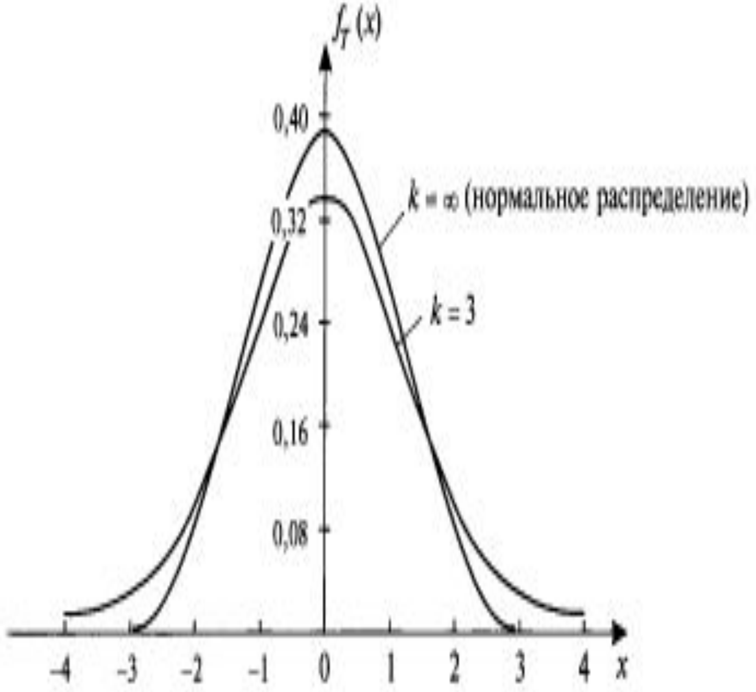
$$T(k) = \frac{U}{\sqrt{\chi^2(k)/k}},$$

где U имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$. Распределение Стьюдента с k степенями свободы будет также обозначаться $T(k)$.

Распределение Стьюдента с k степенями свободы имеет плотность $f_T(x)$

$$f_T(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}}\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

среднее, $M[T(k)] = 0$ и дисперсию, $D[T(k)] = \frac{k}{k-2}$, $k > 2$. Плотность распределения Стьюдента симметрична относительно оси ординат, следовательно, для квантилей распределения Стьюдента $t_p(k)$ имеет место соотношение $t_p(k) = -t_{1-p}(k)$.



Плотности распределения Стьюдента и нормального распределения

При больших k ($k > 30$) для квантилей $t_p(k)$ распределения Стьюдента выполнено приближенное равенство $t_p(k) \approx u_p$.

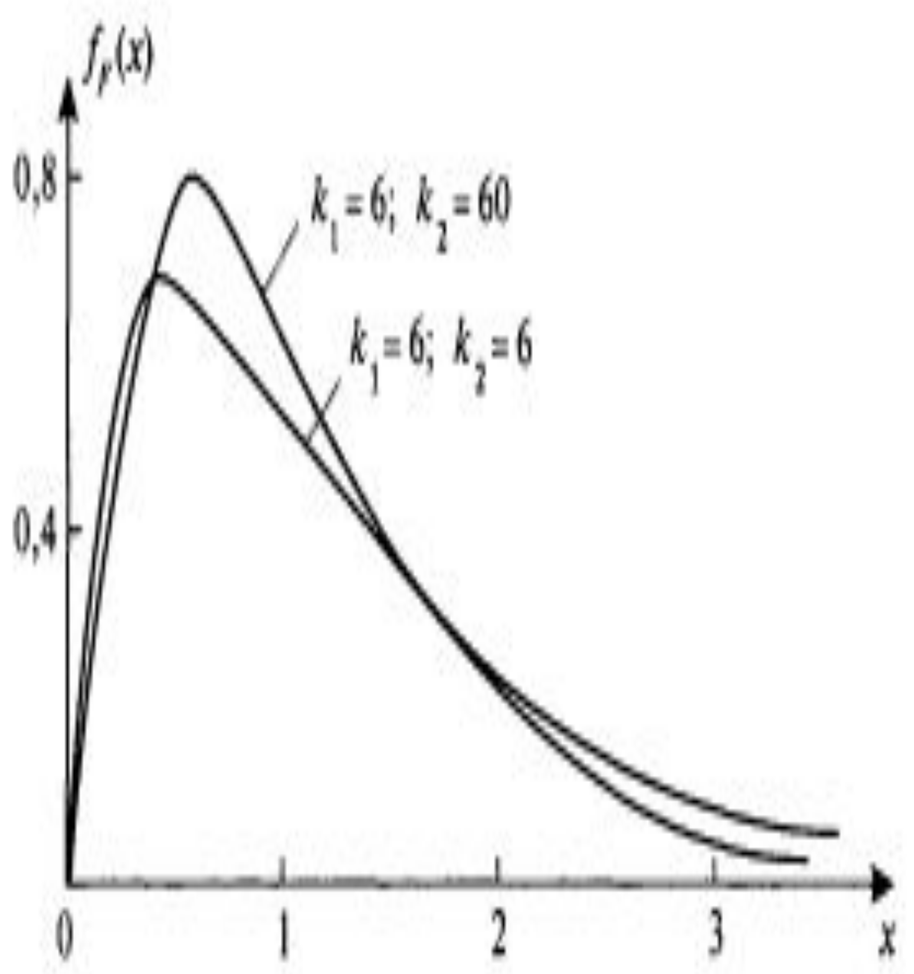
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА

Распределением Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы называется распределение случайной величины $F(k_1, k_2)$, равной отношению двух независимых случайных величин $\chi^2(k_1)/k_1$ и $\chi^2(k_2)/k_2$, т. е.

$$F(k_1,k_2)=\frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}.$$

$$f_F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\[2mm] \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)}\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}}\dfrac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{k_1}{k_2}x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x>0,\end{cases}$$

среднее, $M[F]=\dfrac{k_2}{k_2-2}$, $k_2>2$; $D[F]=\dfrac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)}$, $k_2>4$.



Плотности распределения Фишера