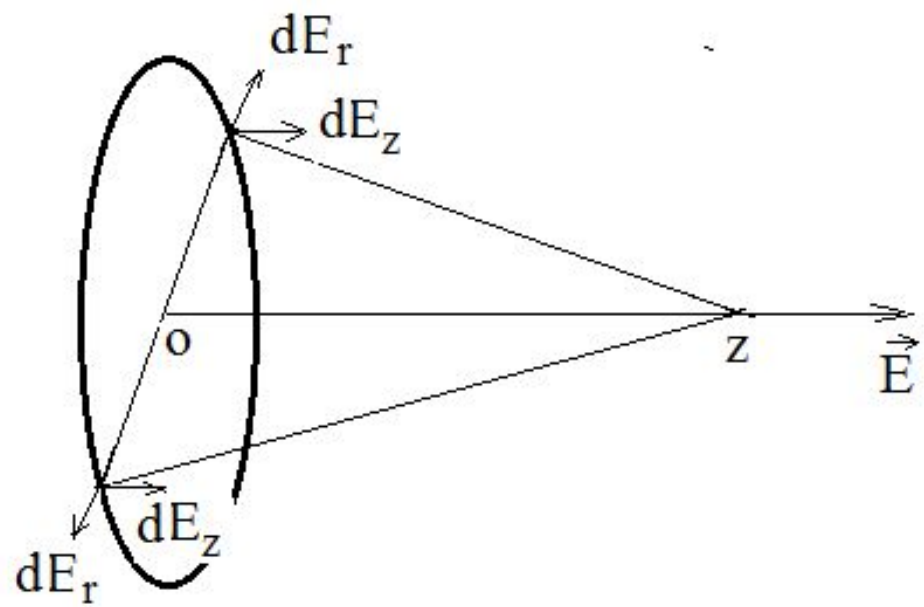
Задача 1. Потенциал и напряженность электрического поля *на оси* тонкого равномерно заряженного кольца

- **Получить выражение для потенциала и напряженности электрического поля *на оси* тонкого равномерно заряженного кольца радиуса R . Линейная плотность заряда τ .**
- Считая, что $\tau = const$, показать, что при $|z| >> R$
- потенциал поля кольца совпадает в пределе с потенциалом поля точечного заряда.

Результирующая сумма компонент вектора напряженности по радиусу по ,всему кольцу равна нулю
а сумма компонент по оси Oz даст значение вектора напряженности и он направлен по оси Oz



Ведем цилиндрическую систему координат. Пусть ось Oz совпадает с осью кольца и начало координат с центром кольца, $|z|$ – расстояние от центра кольца до точки наблюдения на оси.

$$\tau = \frac{q}{2\pi R} \qquad dq = \tau dl = \tau R d\theta$$

dl – элемент длины тонкого кольца

Потенциал для точечного заряда

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\tau R}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} d\theta = \frac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad \varphi(-z) = \varphi(z)$$

Напряженность поля кольца $\quad E_z(z) = -\dfrac{d\varphi}{dz} = \dfrac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{z}{\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)^3}$

$$E_z(-z) = -E_z(z)$$

Предельный случай

$$\varphi(z)=\frac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{\tau\frac{R}{|z|}}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2+1}}\underset{z\to\infty}{\approx}$$

$$\underset{\frac{R}{|z|}\to 0}{\approx}\quad\frac{\tau}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{R}{|z|}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{|z|}\right)^2\right)=$$

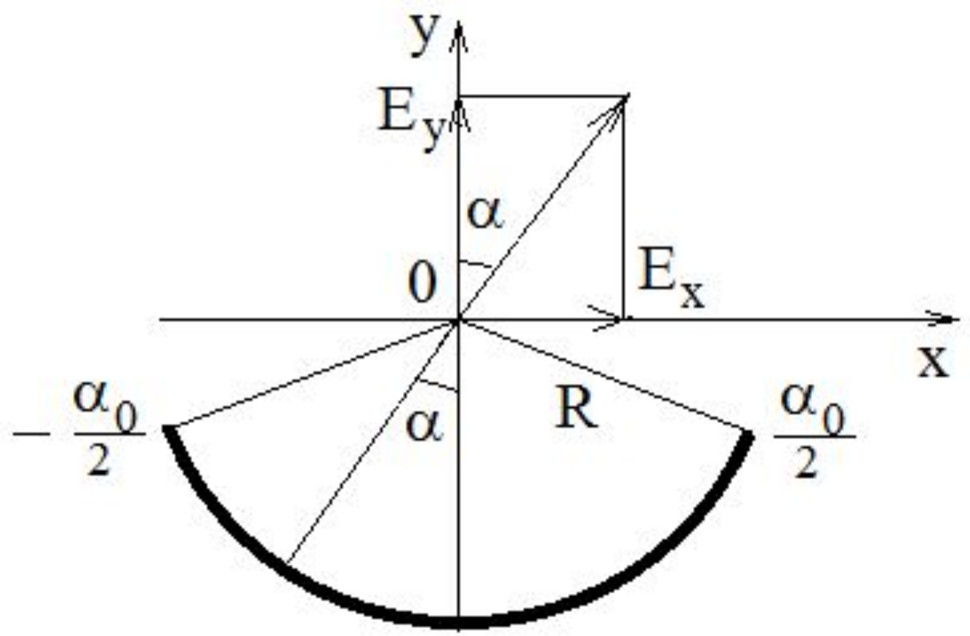
$$\frac{\tau R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{|z|}+o\left(\frac{R}{|z|}\right)$$

Использовали $\quad (1+\alpha)^{-\frac{1}{2}}-1\underset{\alpha\to 0}{\approx}-\frac{\alpha}{2}\qquad \tau R=\frac{q}{2\pi}$

Вывод. В предельном случае при $|z|>>R$
потенциал поля кольца совпадает с потенциалом поля точечного заряда

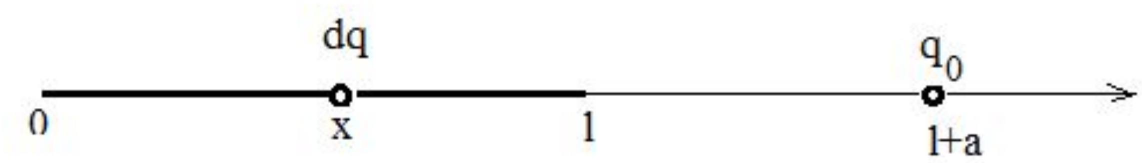
Задача 2. Получить выражение для напряженности электрического поля, создаваемое тонкой равномерно заряженной дугой окружности радиуса R в, центре О ее кривизны .

. Линейная плотность заряда τ



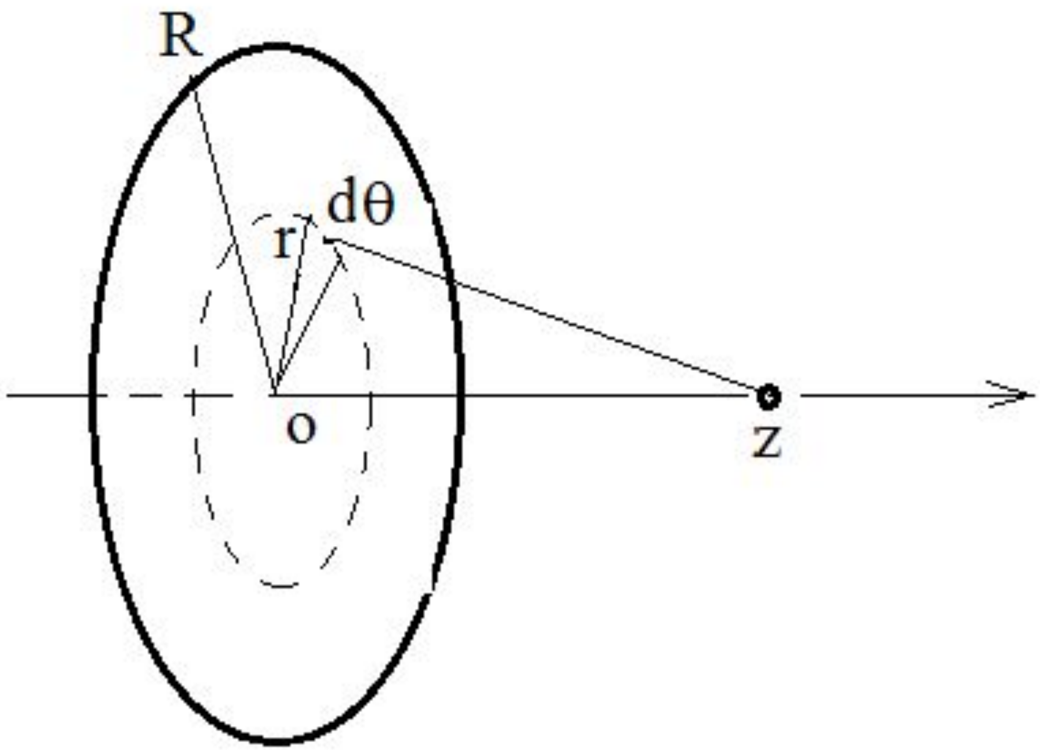
Задача 3. Найти силу взаимодействия отрезка длиной l, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда τ с точечным зарядом q_0, находящимся на продолжении отрезка на расстоянии a от ближайшего его конца.

- Пусть ось Ox проходит через отрезок и точечный заряд. Начало координат совпадает с началом отрезка. Тогда координата точечного заряда равна $a+l$.



$$dq = \tau dx \qquad dF = q_0 dE = \frac{dq \cdot q_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{(l+a-x)^2}$$

Задача 4. Ось равномерно заряженного диска радиуса R совпадает с осью Oz . Центр диска находится в начала координат. Диск заряжен равномерно с поверхностной плотностью заряда σ . Найти потенциал электрического поля, создаваемого диском в точках оси . Рассмотреть предельный случай: $z >> R$



Введем цилиндрическую систему координат

- Рассмотрим точечный заряд $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$

Запишем потенциал ЭС поля, создаваемого этим точечным зарядом, в точке на оси диска

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{4\varepsilon\varepsilon_0}\int_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{dt}{t^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

Предельный случай

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right)=\lim_{z\to\infty}\frac{\sigma z}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\sqrt{1+\left(\frac{R}{z}\right)^2}-1\right)\underset{z\to\infty}{\approx}$$

$$\underset{z\to\infty}{\approx}\frac{\sigma z}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+o\left(\frac{R^2}{z^2}\right)\right)\underset{z\to\infty}{\approx}\frac{\sigma R^2}{4\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{z}=\frac{q}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{z}$$

- **Вывод.** При $z\to\infty$ потенциал электрического поля заряженного диска совпадает с точностью до константы с потенциалом поля точечного заряда величиной Q=q/4.

Задача 5. Найти потенциал ограниченной цилиндрической поверхности радиуса R и длиной $2a$ с зарядом q, равномерно распределенным по поверхности.

- **Способ 1.** Нахождение потенциала электрического поля, создаваемого заряженной цилиндрической поверхностью через потенциал поля заряженной окружности (тонкого кольца).

$$\varphi_{кольца}(z) = \frac{q_{\text{кольца}}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\tau_{\text{кольца}} R}{2\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}, \quad q_{\text{кольца}} = 2\pi R\tau_{\text{кольца}}$$

Рассматриваемая цилиндрическая поверхность – это совокупность заряженных колец с зарядом $dq = \frac{q}{2a}dz'$

$$dq = \frac{\sigma 2\pi R 2a}{2a}dz' = \sigma 2R\pi dz'$$

q – заряд цилиндра z' – координата кольца

Потенциала поля заряженной цилиндрической поверхности

$$\varphi(z) = \int_{-a}^{a} \frac{q/2a}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z' - z)^2}} dz'$$

Способ 2. Нахождение потенциала заряженной цилиндрической поверхности через потенциал поля точечного заряда.
Цилиндрическая поверхность – это совокупность элементарных площадок поверхности с зарядом

$$dq = \sigma dS = \frac{q}{2\pi R 2a} R d\theta dz' = \frac{q}{4\pi a} d\theta dz'$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{d\theta dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}}$$

Ограниченный цилиндр