



## Расчет модели

# Глава II. Векторная алгебра

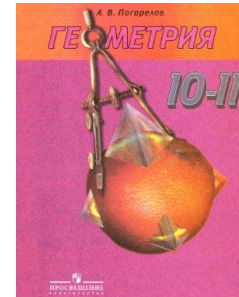
Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется ***векторным исчислением***.

Векторное исчисление подразделяют на ***векторную алгебру*** и ***векторный анализ***.

В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное).

В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

# § 6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов



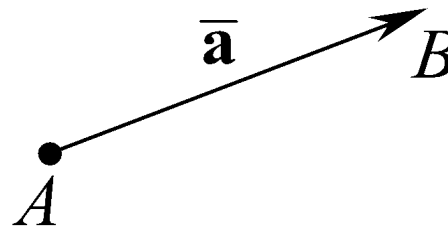
## 1. Основные понятия

Вспоминаем школьную программу

ОПР. **Вектором** называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).

Обозначают:  $\overline{AB}$  (где  $A$  – начало вектора,  $B$  – его конец),  
и т.д.  $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется **длиной** (или **модулем**) вектора. Обозначают:  $|\overline{AB}|$  или  $|\overline{a}|$ .

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым**. Обозначают:  $\overline{0}$ .

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются **коллинеарными (параллельными)**.

Записывают:  $\overline{a} \parallel \overline{b}$  – если векторы  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  коллинеарные,  
 $\overline{a} \nparallel \overline{b}$  – если векторы  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  неколлинеарные.

Коллинеарные векторы бывают:

**сонаправленными**  $\overline{a} \uparrow \uparrow \overline{b}$  **пропустить 5 клеточек**

**противоположно направленными**  $\overline{a} \uparrow \downarrow \overline{b}$  **пропустить 5 клеточек**

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

$$\vec{a} = \vec{b}.$$

Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , лежащие на перпендикулярных прямых, называются *перпендикулярными (ортогональными)*.

$$\vec{a} \perp \vec{b}.$$

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

**пропустить 10 клеточек**

Векторы, начала которых строго фиксированы называют *связанными*;

Векторы, начала которых можно перемещать (параллельно переносить), называют *свободными*.

Пример – сила тяжести. Какой вектор?

**пропустить 10 клеточек**

## 2. Линейные операции на множестве векторов

- 1) Умножение на число;    2) Сложение векторов

ОПР. **Произведением вектора  $\vec{a} \neq \vec{0}$  на число  $\alpha \neq 0$**  называется вектор, длина которого равна  $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$ , а направление совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$  при  $\alpha > 0$  и противоположно ему при  $\alpha < 0$ .

Обозначают:  $\alpha \vec{a}$

Если  $\vec{a} = \vec{0}$  или  $\alpha = 0$ , то  $\alpha \vec{a} = \vec{0}$ .

Вектор  $(-1)\vec{a}$  называют **противоположным вектору  $\vec{a}$**

Обозначают  $-\vec{a}$ .

**пропустить 10 клеточек**

ЛЕММА 1 (критерий коллинеарности векторов).

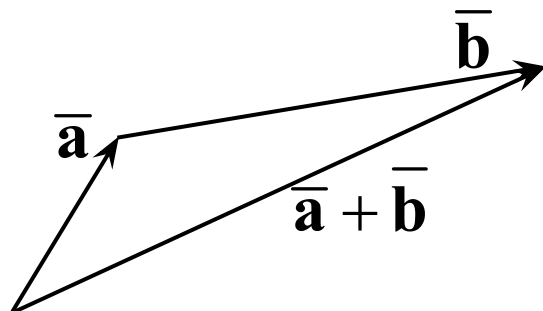
Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда  $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$ , для некоторого числа  $\alpha \neq 0$ .

ОПР. (сложение - правило треугольника).

*Пусть даны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .*

*Поместим начало  $\vec{b}$  в конец  $\vec{a}$ .*

*Вектор, соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и обозначается  $\vec{a} + \vec{b}$ .*



Следствие – правило многоугольника.

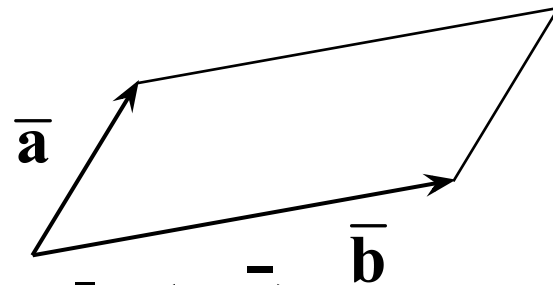
**пропустить 10 клеточек**

ОПР. (правило параллелограмма).

Пусть даны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

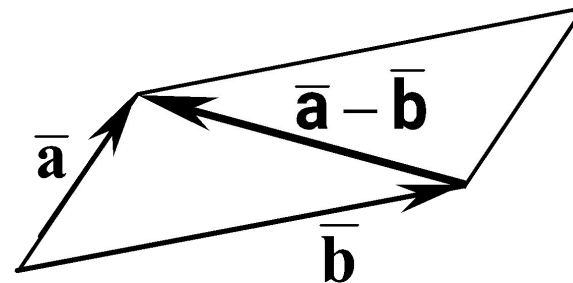
Совместим их начала, построим на этих векторах параллелограмм.

**Суммой** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будет вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, выходящей из точки начал векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .



Частный случай: сумма  $\vec{a} + (-\vec{b})$

Сумму  $\vec{a} + (-\vec{b})$  называют **разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  и обозначают  $\vec{a} - \vec{b}$ .



пропустить 20 клеточек

# СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

- 1)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (коммутативность сложения векторов);
- 2)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (ассоциативность сложения векторов);
- 3)  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ ;
- 4)  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ;
- 5)  $\alpha \cdot (\beta \mathbf{a}) = (\alpha \cdot \beta) \mathbf{a}$  (ассоциативность относительно умножения чисел);
- 6)  $(\alpha + \beta) \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}$  (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);
- 7)  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}$  (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);
- 8)  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ .

Найдите аналогию с тем, что учили в школе



### 3. Проекция вектора

ОПР. Прямую, на которой выбрано направление, называют **осью**.

Пусть  $\ell$  – ось,  $\overline{AB}$  – некоторый вектор.

Пусть  $A_1$  и  $B_1$  – ортогональные проекции на ось  $\ell$  точек  $A$  и  $B$  соответственно.

Вектор  $\overline{A_1B_1}$  назовем **векторной проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $\ell$** .

**пропустить 10 клеточек** или нарисовать самим 😊

ОПР. **Проекцией** (ортогональной проекцией) вектора  $\vec{a}$  на ось  $\ell$  называется

- 1) длина его векторной проекции  $\overline{A_1B_1}$  на ось  $\ell$ , взятая со знаком плюс, если вектор  $\overline{A_1B_1}$  и ось  $\ell$  сонаправлены;
- 2) Та же длина, но взятая со знаком минус, если вектор  $\overline{A_1B_1}$  и ось  $\ell$  противоположно направлены

Обозначают:

$\text{Pr}_{\ell} \overline{AB}$

**пропустить 15 клеточек**

## 4. Понятия линейной зависимости и независимости.

### Базис

ОПР. Говорят, что векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  **линейно зависимы**, если существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , не все равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k = \bar{0} \quad (1)$$

Если равенство (1) возможно только при условии  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , то векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  называют **линейно независимыми**.

ЛЕММА 2 (необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов).

Векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.

Доказательство. пропустить 20 клеточек [А можно и самим](#)

**Замечание.** Часто в качестве определения линейно зависимых векторов берут формулировку леммы 2.

Пусть  $V^{(3)}$  – множество свободных векторов пространства ( $V^{(2)}$  – плоскости).

ОПР. Совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих одной плоскости ( $V^{(2)}$ ), называется **базисом** на этой плоскости. Коэффициенты в разложении вектора по базису называются **координатами** этого вектора в данном базисе.

ОПР. Аналогично для  $V^{(3)}$ . **СФОРМУЛИРОВАТЬ САМИМ** ! 


Т. Векторы, не лежащие на одной или

а) параллельных прямых, наз


б) **неколлинеарным**

Лемма

1) **Базисом** множества

 забыли? **пропустить**

Векторы, не лежащие в одной или параллельных плоскостях, называются **некомпланарными**.

2) **Базисом** в  $V^{(3)}$  являются любые три некомпланарных вектора 

**ДОКАЗАТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО** !

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ координат свободного век: **20 кл**

**это проекции** вектора на направления базисных векторов.

## Системы координат.

ОПР. *Осью* называется прямая с выбранным на ней направлением.

ОПР. *Аффинной системой координат (косоугольной системой координат)* называется совокупность точки, приложенного к ней аффинного базиса и определяемых базисными векторами осей.

*Замечание.* Проекции в аффинном базисе не ортогональные!

В качестве базиса  $V^{(2)}$  можно взять любые два неколлинеарных (любые три некопланарных в  $V^{(3)}$ ) вектора. Но на практике предпочитают работать с *декартовым прямоугольным базисом*

$\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ).

ОПР. *Декартовой системой координат* называется совокупность точки приложенного к ней декартового базиса и осей  $Ox, Oy$ , пропустить 30 клеточек

ТЕОРЕМА 4 (о базисе). *Каждый вектор множества  $V^{(3)}$  ( $V^{(2)}$ ) линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

**пропустить 30 клеточек**

ОПР. Совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих одной плоскости ( $V^{(2)}$ ), называется **базисом** на этой плоскости.

Коэффициенты в разложении вектора по базису называются **координатами** вектора в данном базисе.

ТЕОРЕМА 5 (основная теор. векторной алгебры).

Пусть  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  – координаты вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$

$\{\beta_1, \beta_2, \beta_n\}$  – координаты вектора  $\bar{\mathbf{b}}$  в том же базисе.

Тогда

1) вектор  $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$  будет иметь в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$  координаты  $\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3\}$ ;

2)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  вектор  $\lambda \bar{\mathbf{a}}$  будет иметь в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$  координаты

$$\{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \lambda \alpha_3\} .$$

**пропустить 30 клеточек**

ТЕОРЕМА 6 (критерий коллинеарности свободных векторов в координатной форме).

Векторы  $\bar{\mathbf{a}} = \{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3\}$  и  $\bar{\mathbf{b}} = \{\beta_1 ; \beta_2 ; \beta_3\}$  коллинеарны  $\Leftrightarrow$  их координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = k.$$

Причем, если коэффициент пропорциональности  $k > 0$ , то векторы  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  – сонаправлены; если  $k < 0$ , то  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  – противоположно направлены.

**пропустить 10 клеточек**

## Матрица перехода

Рассмотрим два базиса векторного пространства  $V^{(3)}$

$$\mathbf{E} = \{\bar{\mathbf{e}}_i\} = \begin{pmatrix} \overline{e_1} \\ \overline{e_2} \\ \overline{e_3} \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad \mathbf{F} = \{\bar{\mathbf{f}}_i\} = \begin{pmatrix} \overline{f_1} \\ \overline{f_2} \\ \overline{f_3} \end{pmatrix}$$

**пропустить 30 клеточек**

ОПР. Матрица  $\mathbf{T}$  составленная из коэффициентов разложения, называется матрицей перехода от старого базиса  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$  к новому базису  $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$ .

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

ОПР\*. Матрицей перехода  $\mathbf{T}$  от базиса  $\mathbf{E}$  базису  $\mathbf{F}$  называется матрица, столбцами которой служат координаты векторов нового базиса в старом базисе.

**пропустить 40 клеточек**



ТЕОРЕМА 7 (связь координат вектора в разных базисах).

Пусть  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$  и  $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$  два базиса во множестве  $V^{(3)}$ .

Причем имеют место равенства

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = \tau_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{31}\bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\bar{\mathbf{f}}_2 = \tau_{12}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{32}\bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\bar{\mathbf{f}}_3 = \tau_{13}\bar{\mathbf{e}}_1 + \tau_{23}\bar{\mathbf{e}}_2 + \tau_{33}\bar{\mathbf{e}}_3.$$

Если вектор  $\bar{\mathbf{a}}$  имеет в базисе  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$  координаты  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , а в базисе  $\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3$  – координаты  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_n\}$ , то справедливо равенство

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

Доказательство. **пропустить 2 страницы**