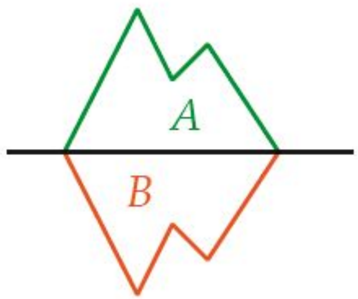
Ģeometriskie pārveidojumi

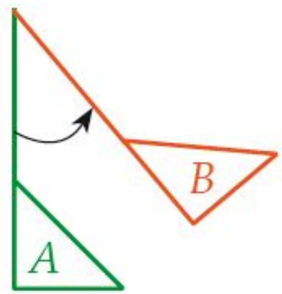
Autore: **Mag. paed., matemātikas skolotāja Irina Maslobojeva**

Ģeometriskie pārveidojumi

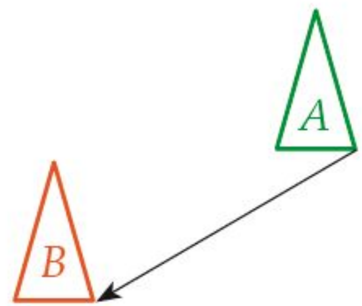
Ģeometrisko pārveidojumu veidi



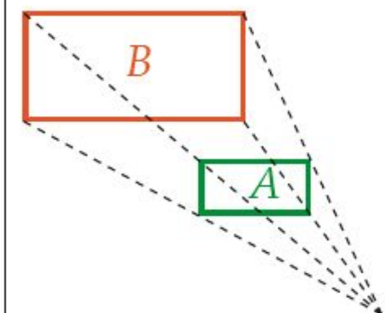
Figūra *A* attēlojas pret taisni, izveidojot figūru *B*



Figūra *A* tiek pagriezta par noteiktu leņķi, iegūstot figūru *B*



Figūra *A* tiek pārvietota noteiktā virzienā par noteiktu attālumu, iegūstot figūru *B*



Figūra *A* tiek pārvietota noteiktā virzienā un palielināta vai samazināta noteiktu skaitu reižu, iegūstot figūru *B*

Kas ir ģeometriskie pārveidojumi?

Ģeometriskie pārveidojumi ir funkcijas, kas pēc noteikta likuma katram plaknes punktam piekārto tieši vienu noteiktu plaknes punktu.
Ģeometrisko pārveidojumu funkcijas definīcijas un vērtību kopa ir visa plakne — plakne attēlojas sevī.

Paralēlā pārnese

Paralēlās pārneses jēdziens

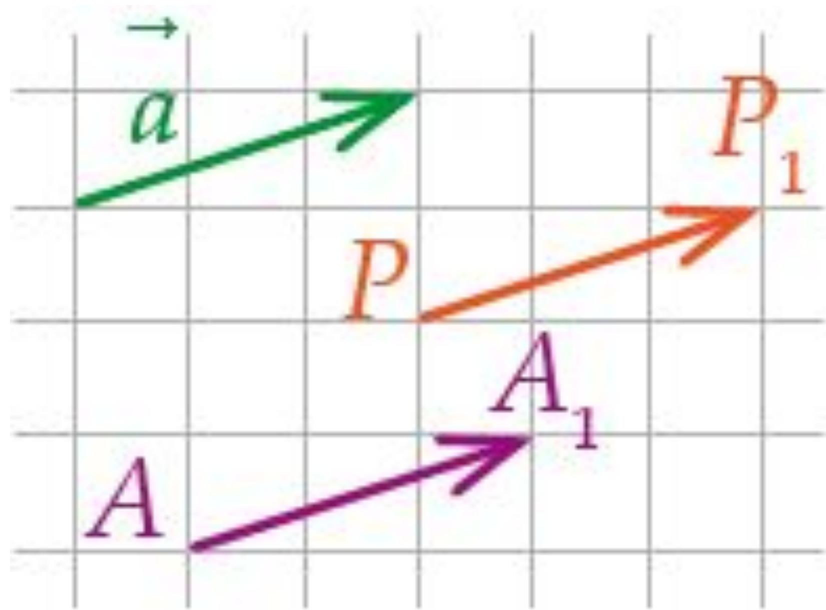
Paralēlā pārnese par vektoru $\vec{a}$ ir pārveidojums, kurā katrs punkts P attēlojas par tādu punktu P_1, ka $\overrightarrow{PP_1} = \vec{a}$.

Lai paralēlā pārnese būtu definēta, jābūt uzdotam pārvietojuma vektoram $\vec{a}$.

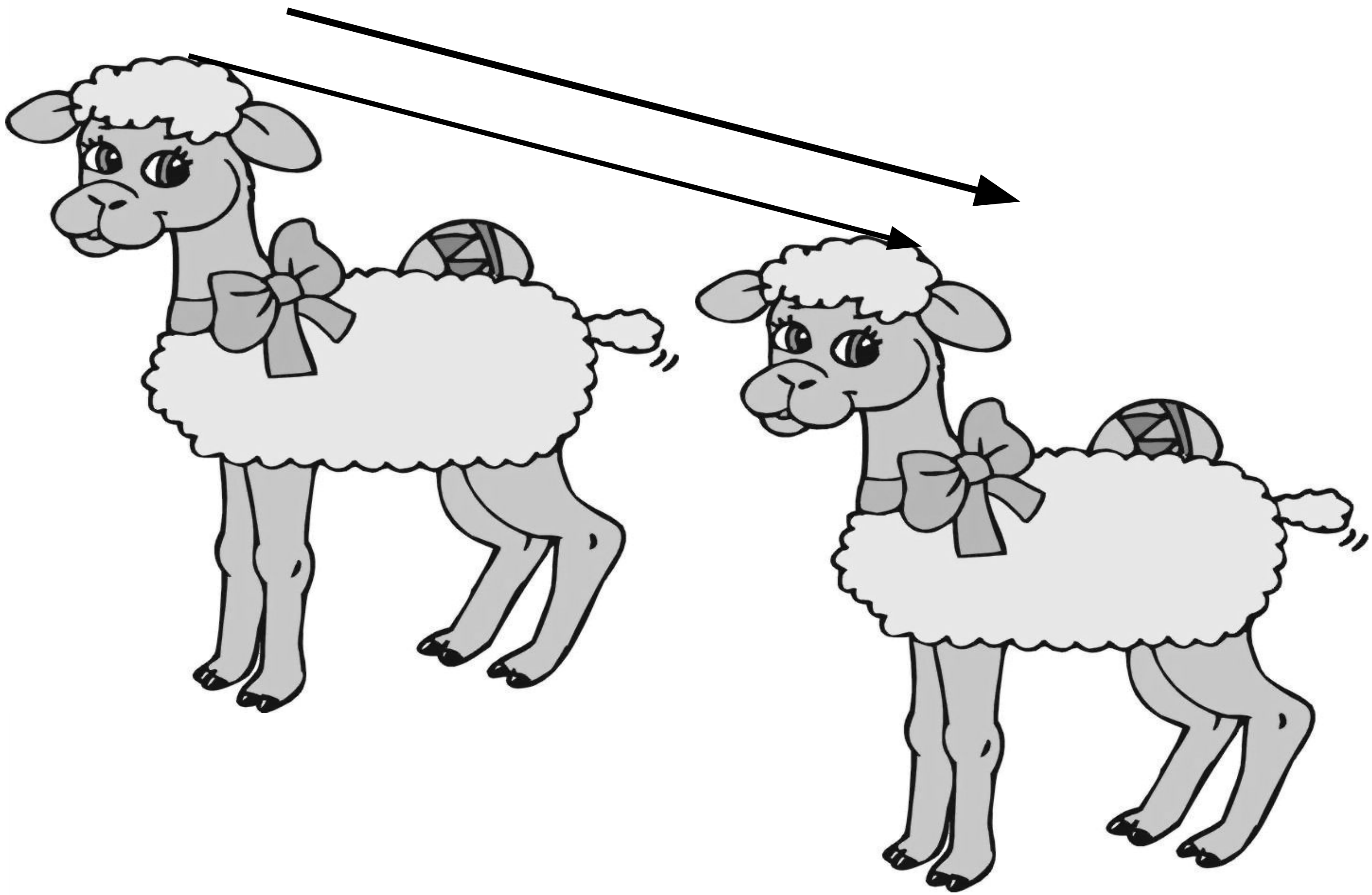
Lai konstruētu punkta P attēlu paralēlajā pārnesē par vektoru $\vec{a}$, no šī punkta, kā sākumpunkta, jāatliek vektors $\vec{a}$, un atliktā vektora galapunkts P_1 ir punkta P attēls paralēlajā pārnesē par vektoru $\vec{a}$.

Paralēlā pārnese (1. piemērs)

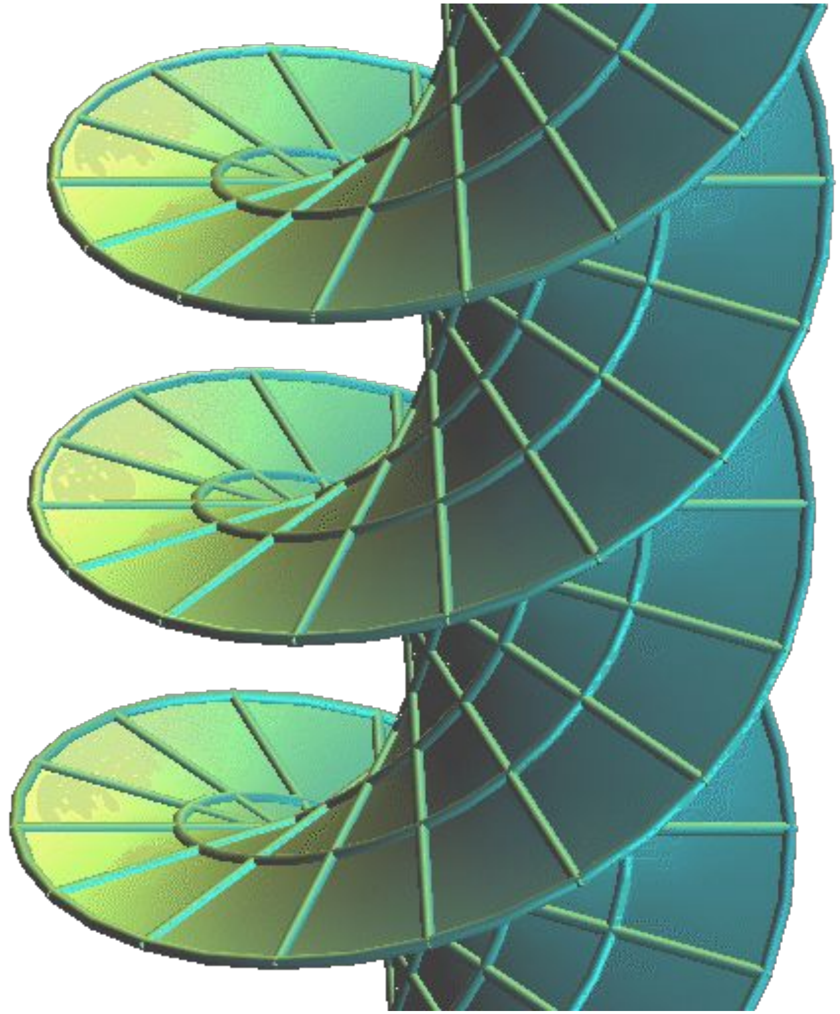
Paralēlajā pārnesē par vektoru $\vec{a}$, punkta ***A*** *attēls* ir A_1, *punkta* ***P*** *attēls ir* P_1, jo $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{PP_1} = \vec{a}$.



Paralēlā pārnese (2. piemērs)

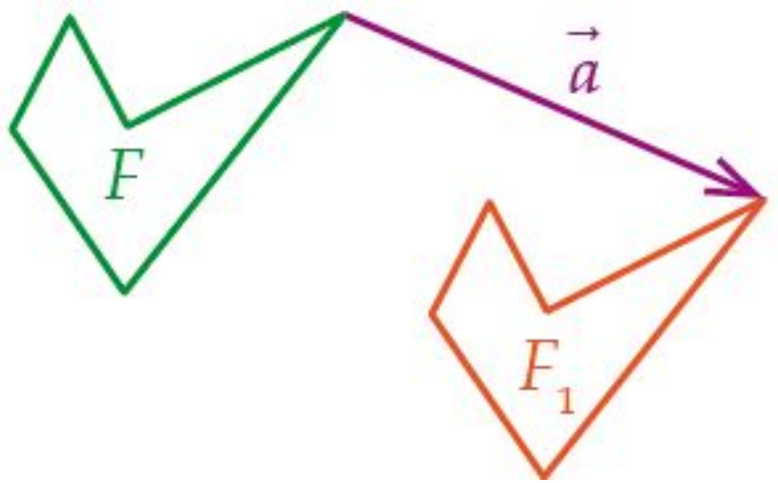


Paralēlā pārnese (3. piemērs)



Paralēlās pārneses 1. īpašība

1. Visiem figūras F punktiem izmantojot paralēlo pārnesi, iegūst figūrai F vienādu figūru F_1.

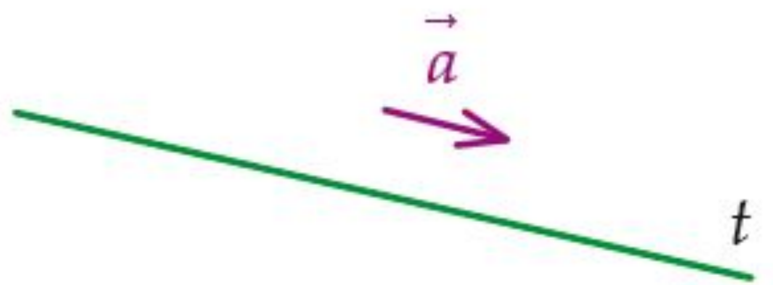


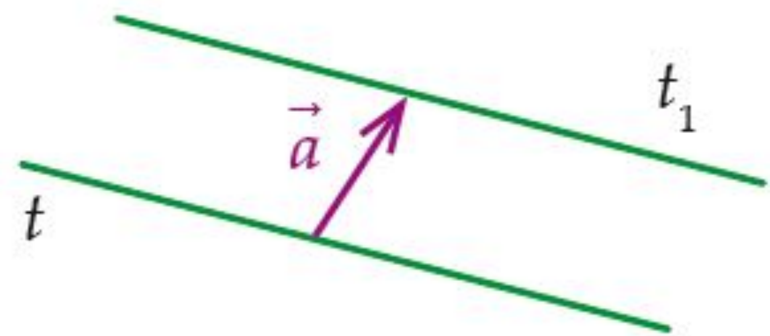
2.5. att.

$F = F_1$

Paralēlās pārneses 2. īpašība

2. Paralēlajā pārnesē taisne attēlojas sevī vai par sev paralēlu taisni.



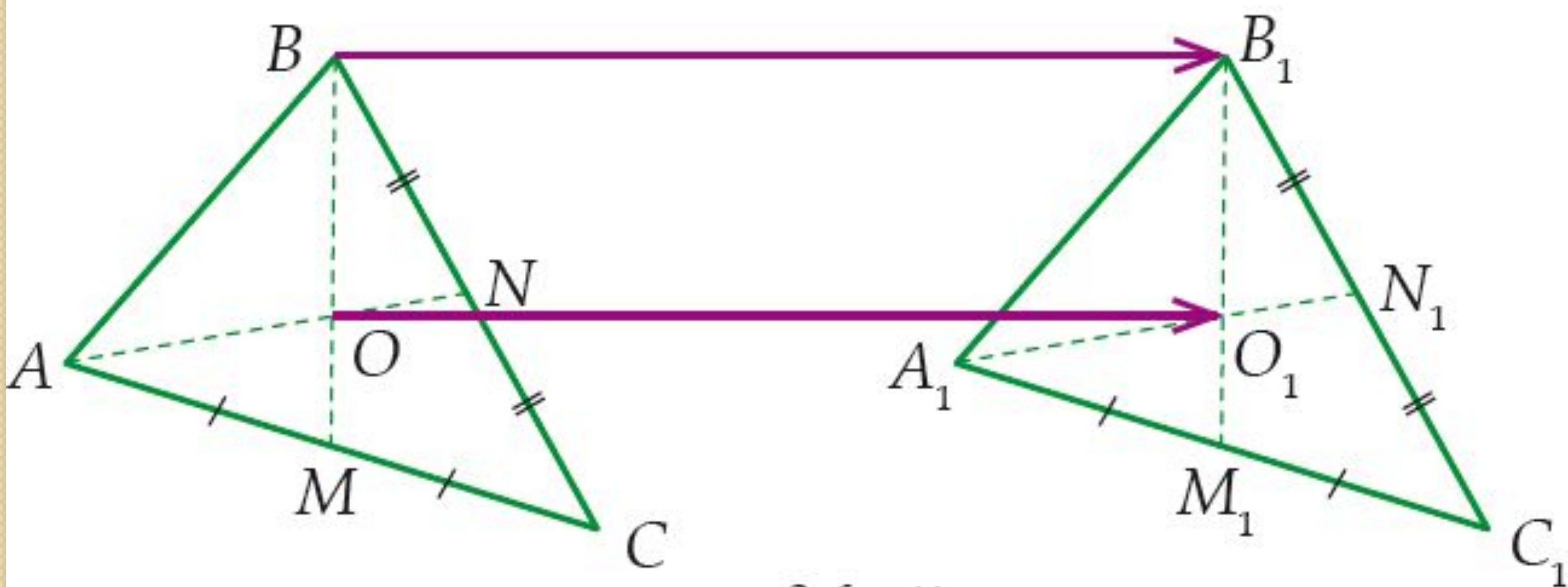


Ja paralēlās pārneses vektors $\vec{a}$ atrodas uz taisnes ***t*** *vai ir tai paralēls, tad* taisne attēlojas sevī.

Katru plaknes punktu pārvietojot par vektoru $\vec{a}$, iegūst dotajai taisnei ***t*** *paralēlu taisni* t_1.

Paralēlās pārneses 3. īpašība

3. Ja paralēlajā pārnesē figūra $F \to F_1$, un punkts $P \to P_1$, kur $P \in F$ un $P_1 \in F_1$, tad punktu P un P_1 ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 ir vienāda.

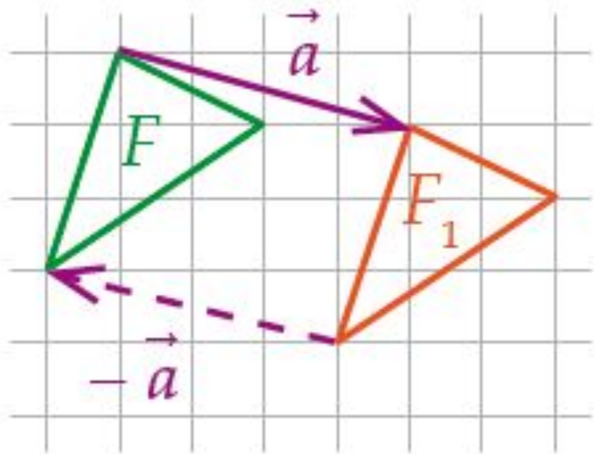


2.6. att.

Paralēlajā pārnesē par vektoru $\overrightarrow{BB_1}$ ΔABC *mediānu krustpunkts* O *attēlojas par* $\Delta A_1B_1C_1$ *mediānu krustpunktu* O_1.

Paralēlās pārneses 4. īpašība

4. Ja paralēlajā pārnesē par vektoru $\vec{a}$ figūra $F \to F_1$, tad figūra $F_1 \to F$, paralēlajā pārnesē par vektoru $-\vec{a}$.



2.7. att.

Tā kā paralēlā pārnese ir plaknē definēta funkcija, kas pašu plakni attēlo sevī, tad katram punktam $\boldsymbol{P_1}$ *eksistē* tikai viens vienīgs punkts ***P****, kura attēls ir punkts* $\boldsymbol{P_1}$ *(**lai P → P1**).*

Aksiālā simetrija

Aksiālās simetrijas jēdziens

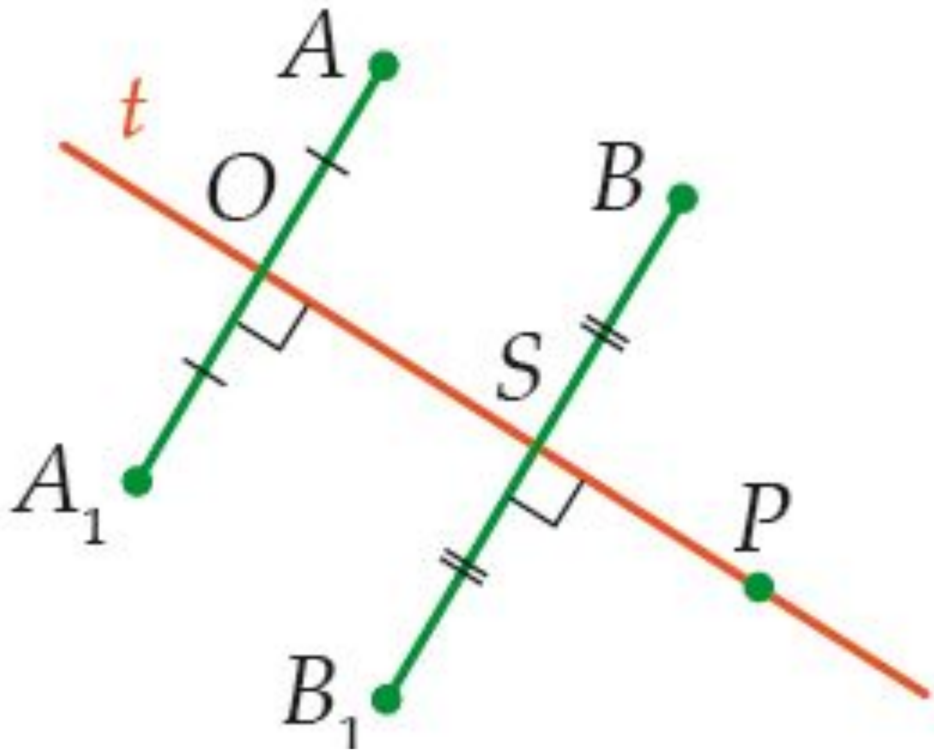
Aksiālā simetrija pret asi t ir pārveidojums, kurā

- katrs punkts P, kas atrodas uz taisnes t, attēlojas sevī,
- katrs punkts A, kas nepieder taisnei t, attēlojas par tādu punktu A_1, ka taisne t ir AA_1 vidusperpendikuls.

Taisni t sauc par **aksiālās simetrijas asi**.

Lai aksiālā simetrija būtu definēta, jābūt uzdotai simetrijas asij t.

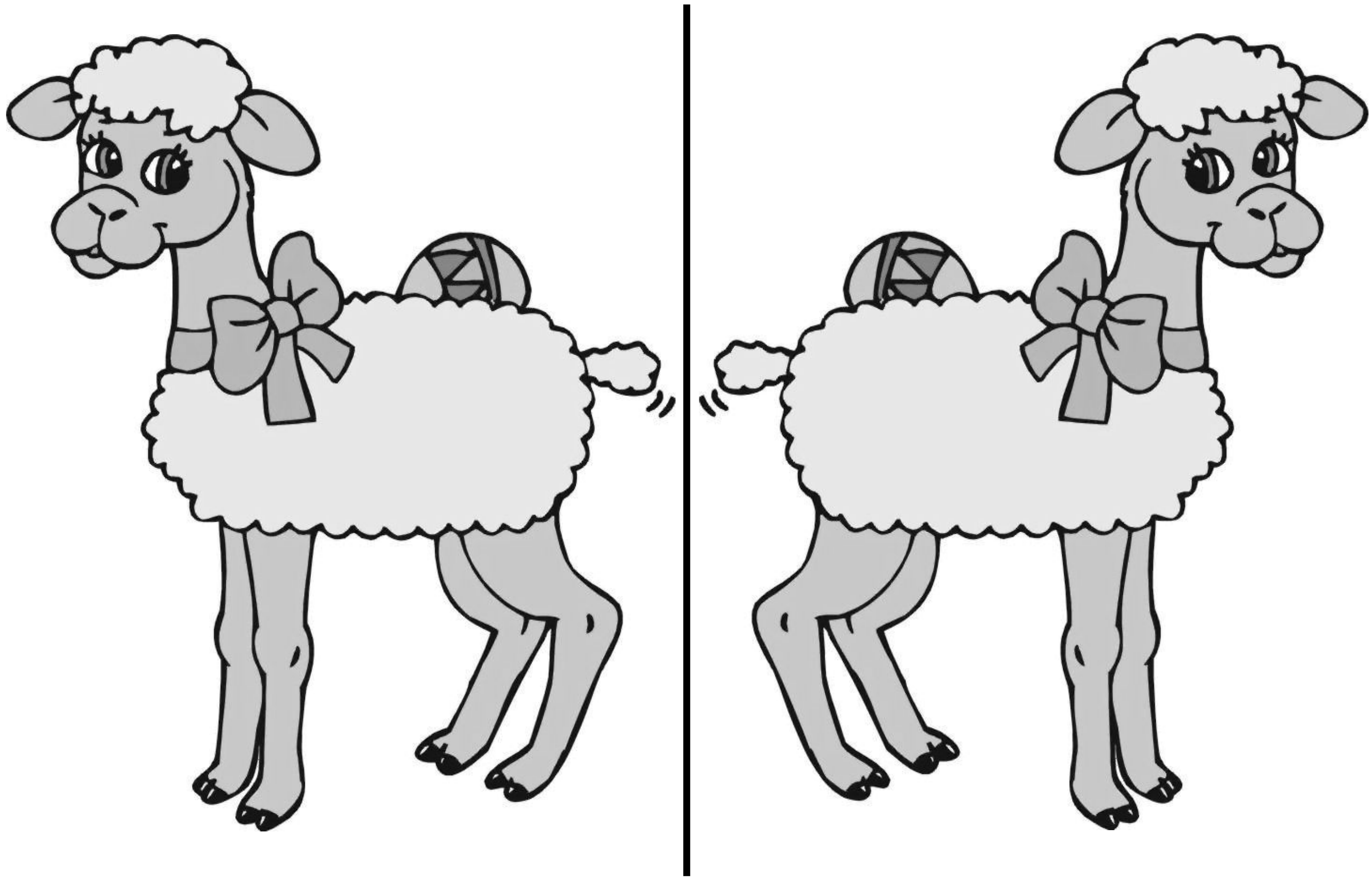
Aksiālā simetrija (1. piemērs)



<u>Aksiālajā simetrijā pret asi t:</u>

- ***A* → *A1*, *jo* *AA1* ∈ *t* un *AO = OA1*,**
- ***B* → *B1*, *jo* *BB1* ∈ *t* un *BS = SB1*,**
- ***P* → *P*, *jo* *P* ∈ *t*.**

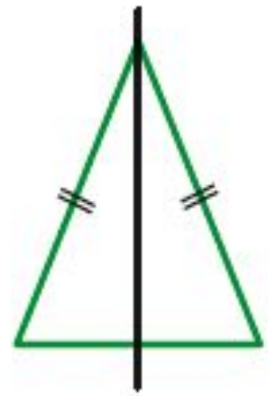
Aksiālā simetrija (2. piemērs)



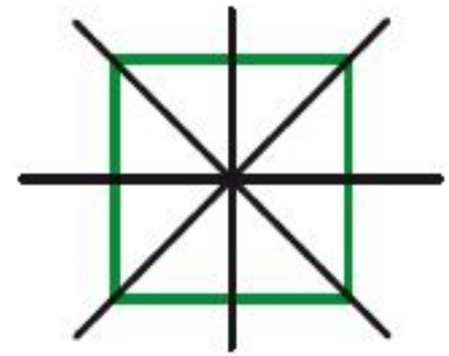
Aksiālā simetrija (3. piemērs)

Kur mēs sastopamies ar aksiālo simetriju?

Riņķim simetrijas asis iet caur riņķa centru.



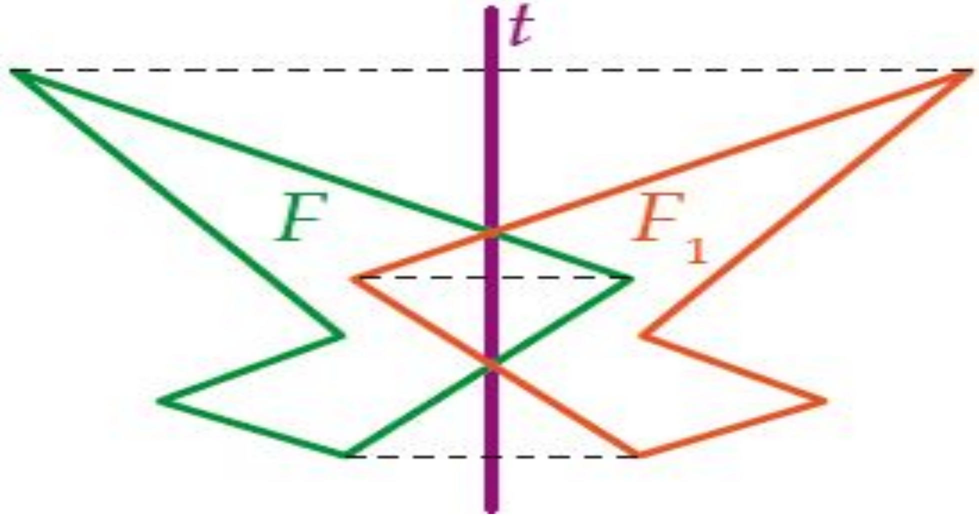
Vienādsānu trijstūrim simetrijas ass satur pret pamatu novilkto augstumu.



Kvadrātam simetrijas ass satur diagonāli vai iet caur kvadrāta malu viduspunktiem.

Aksiālās simetrijas 1. īpašība

1. Visiem figūras F punktiem pielietojot aksiālo simetriju attiecībā pret taisni t, iegūst figūrai F vienādu figūru F_1.



2.10. att.

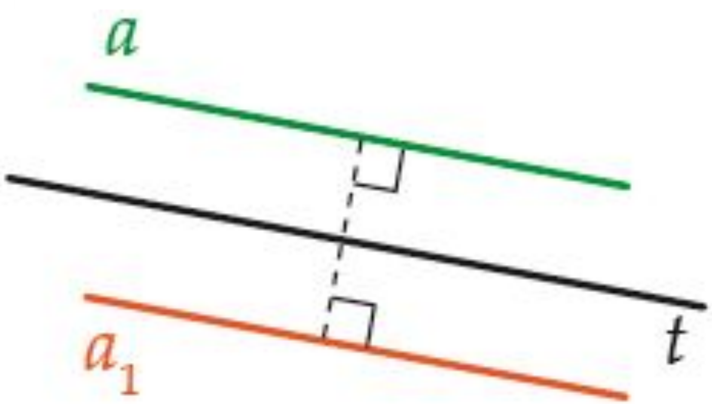
$F = F_1$

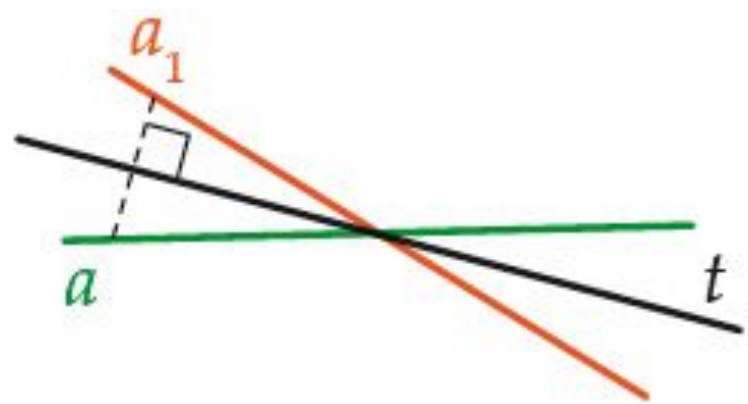
Aksiālajā simetrijā tiek iegūts figūras spoguļattēls, simetrijas asij ***t "izpildot spoguļa lomu"*** - *figūras daļas* abās simetrijas ass pusēs apmainās vietām, bet punkti uz simetrijas ass savu pozīciju saglabā.

Aksiālās simetrijas 2. īpašība

2. Aksiālajā simetrijā taisne a attēlojas par taisni a_1.

Ja taisne ***a*** *ir paralēla simetrijas asij* ***t****, tad tā attēlojas* par tai paralēlu taisni ***a****$_1$* *(****a*** *→* ***a1****,* ***a*** ∥ ***a1*** ∥ ***t****). Ja taisne* ***a*** krusto simetrijas asi ***t****, tad arī tās attēls* ***a****$_1$* *krusto asi* ***t*** *un* krustpunkts atrodas uz simetrijas ass.





Taisnes ***a****,* ***a****$_1$* *un* ***t*** *ir* savstarpēji paralēlas, kā arī taisnes ***a*** *un* ***a****$_1$* atrodas vienādos attālumos no simetrijas ass ***t****.*

Ja taisne ***a*** *nav paralēla* taisnei ***t****, tad arī taisne* ***a****$_1$* nav paralēla taisnei ***t****, bez* tam ***t*** *ir taišņu* ***a*** *un* ***a****$_1$* *veidoto* leņķu bisektrise. Pamato šo faktu patstāvīgi.

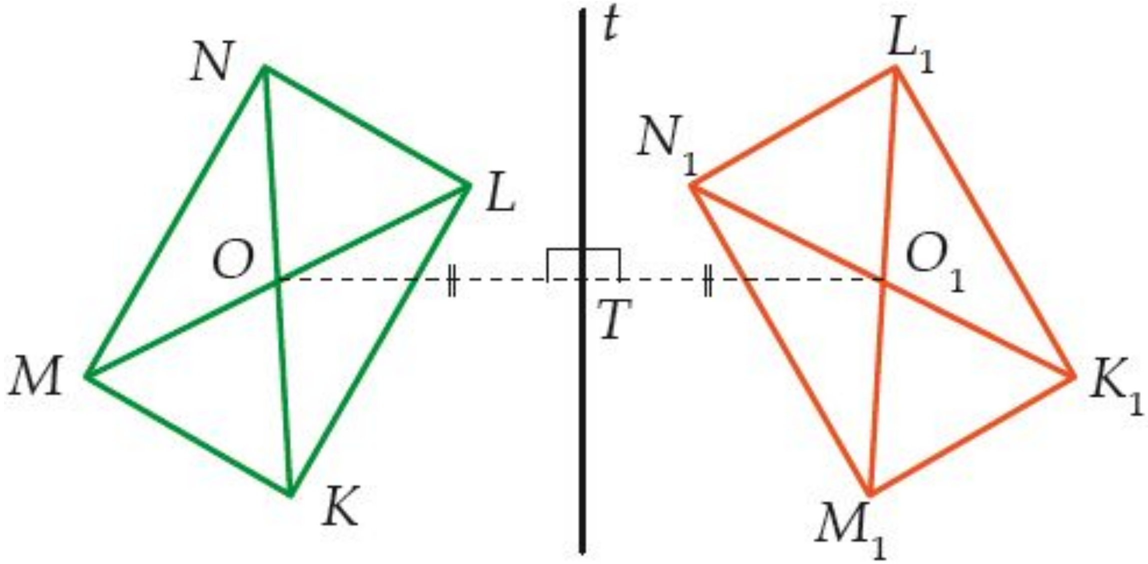
Aksiālās simetrijas 3. īpašība

3. Ja aksiālajā simetrijā figūra $F \to F_1$, tad arī $F_1 \to F$ pret to pašu simetrijas asi.

Tā kā simetrijā pret asi pusplaknes attēlojas viena par otru, tad acīmredzami, ka, konstruējot figūras attēlu simetrijā pret šo pašu asi, iegūs sākotnējo figūru.

Aksiālās simetrijas 4. īpašība

4. Ja aksiālajā simetrijā figūra $F \to F_1$ un punkts $P \to P_1$, kur $P \in F$ un $P_1 \in F_1$, tad punktu P un P_1 ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 ir vienāda.



Taisnstūra MNLK *diagonāļu krustpunkts* ***O*** *simetrijā* pret taisni ***t*** *attēlojas par taisnstūra* $\boldsymbol{M_1N_1L_1K_1}$ *diagonāļu* krustpunktu $\boldsymbol{O_1}$ *(**skat. 2.11. att**.).*

Pagrieziens

Pagrieziena jēdziens

Pagrieziens par α grādu lielu leņķi ap centru O noteiktā virzienā ir pārveidojums, kurā katrs punkts P attēlojas par tādu punktu P_1, ka $\sphericalangle POP_1 = \alpha$ un $PO = PO_1$, bet pagrieziena centrs O attēlojas sevī.

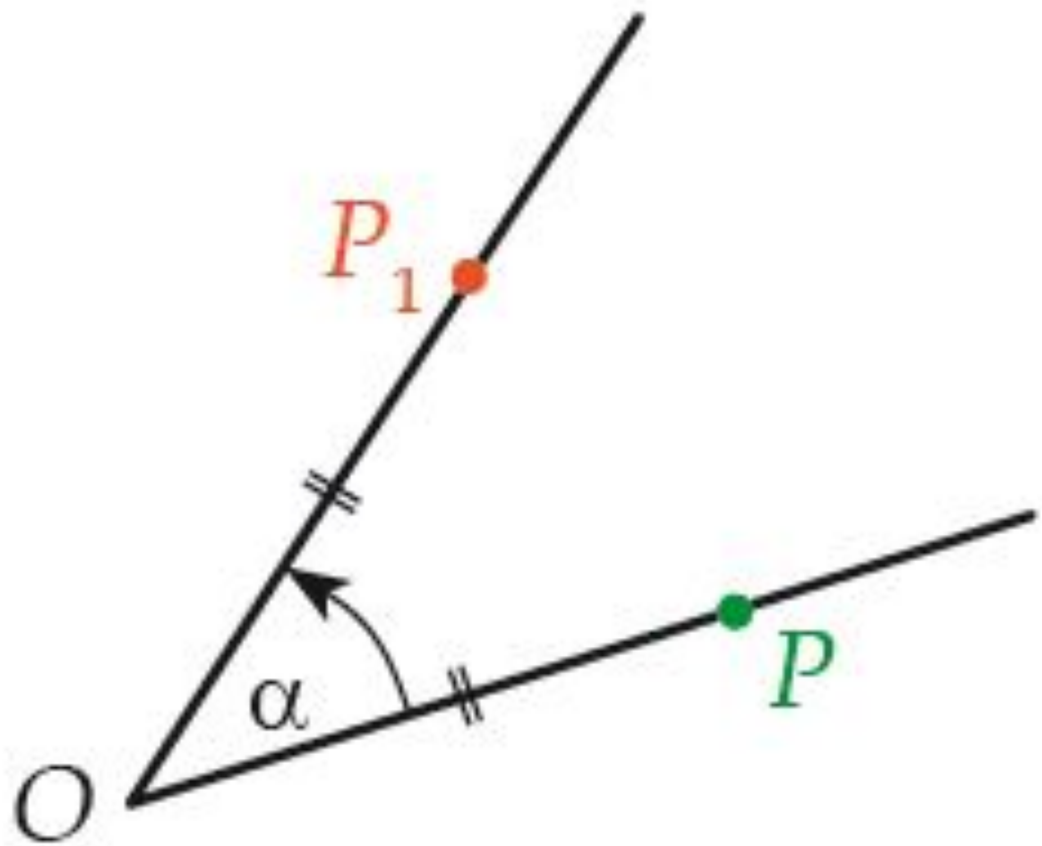
Lai pagrieziens būtu definēts, jābūt uzdotam

1) pagrieziena leņķim,
2) pagrieziena centram,
3) pagrieziena virzienam.

Īsāk pagriezienu ap centru O par leņķi α var pierakstīt arī:

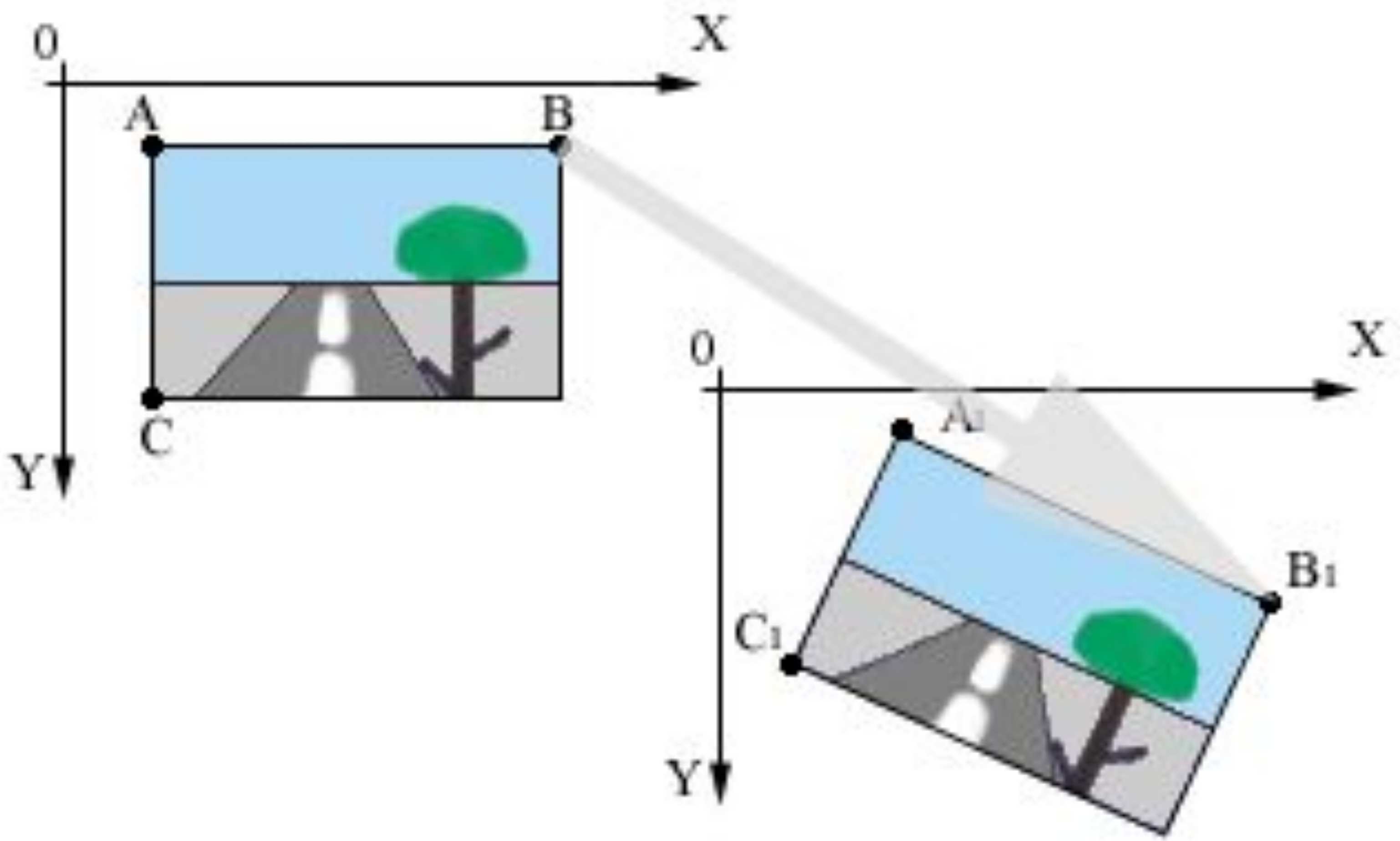
pagrieziens $(O; \alpha)$.

Pagrieziens (1. piemērs)



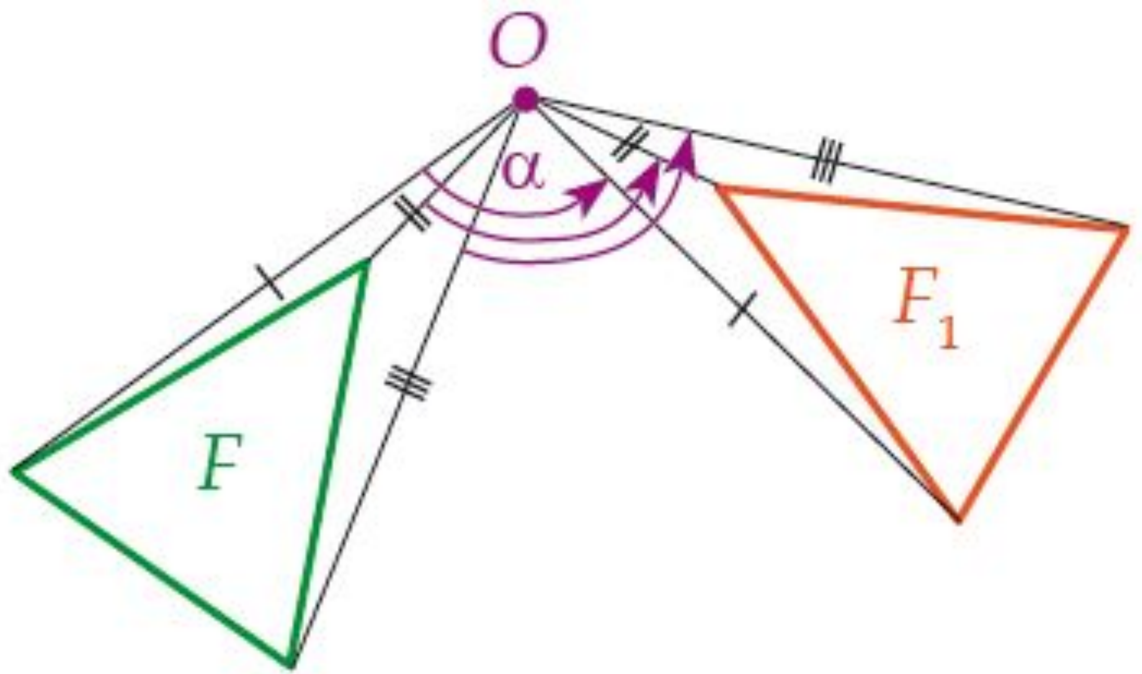
Pagriezienā (***O***; ***a***) *punkta* ***P*** attēls ir $\boldsymbol{P_1}$, *jo* $\boldsymbol{POP_1 = a}$ *un* $\boldsymbol{PO = P_1O}$.

Pagrieziens (2. piemērs)



Pagrieziena 1. īpašība

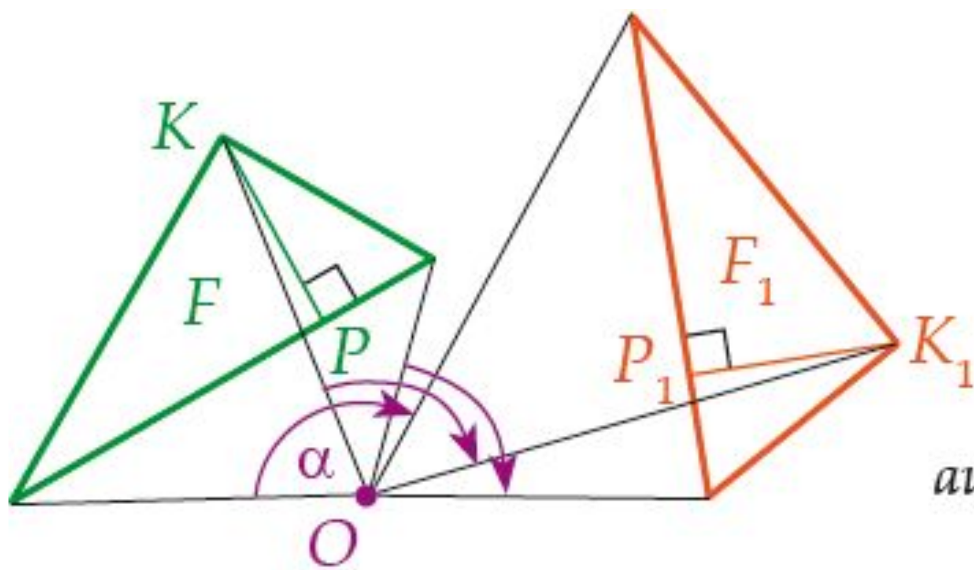
1. Visiem figūras F punktiem pielietojot pagriezienu $(O; \alpha)$, iegūst figūrai F vienādu figūru F_1.



2.16. att.
$F = F_1$

Pagrieziena 2. īpašība

2. Ja pagriezienā $(O; \alpha)$ figūra $F \to F_1$ un punkts $P \to P_1$, kur $P \in F$ un $P_1 \in F_1$, tad punktu P un P_1 ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 ir vienāda.



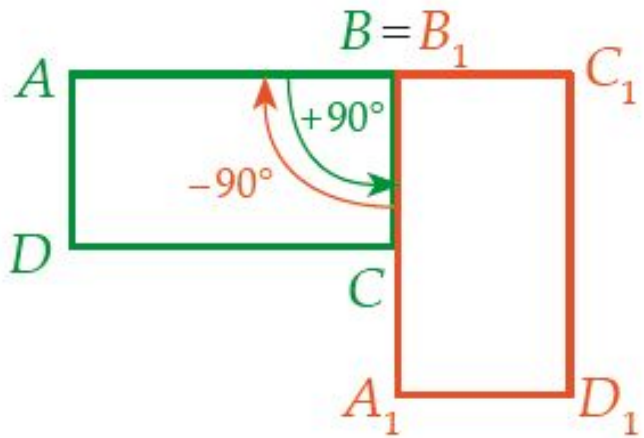
2.17. att.

Figūra $F \to F_1$

augstums $KP \to$ *augstumu* K_1P_1

Pagriezienа 3. īpašība

3. Ja pagriezienā $(O; \alpha)$ $F \to F_1$, tad $F_1 \to F$ pagriezienā $(O; -\alpha)$.



2.18. att.

Apskatīsim taisnstūra ***ABCD*** *pagriezienu par* ***90° leņķi*** (***B; + 90°***) (**skat. 2.18. att**.). *Pēc pagrieziena definīcijas* $\boldsymbol{B \to B_1}$ ($\boldsymbol{B_1 = B}$)*. Tā kā pagrieziena leņķis sakrīt ar taisnstūra* virsotnes leņķa lielumu, tad $\boldsymbol{BA \to B_1A_1}$*, kur* $\boldsymbol{B_1A_1}$ pārklājas ar *BC.*
Tagad apskatīsim taisnstūra $\boldsymbol{A_1B_1C_1D_1}$ *pagriezienu*
par – **90° leņķi** ($\boldsymbol{B_1}$; ***–90°***)**.** *Skaidrs, ka šajā pagriezienā* $\boldsymbol{B_1 \to B}$ *un* $\boldsymbol{B_1A_1 \to BA}$*.*

Pagrieziena 4. īpašība

4. Taisne t pagriezienā $(O; \alpha)$ attēlojas par taisni t_1.

Ja taisne t pagriezienā $(O; \alpha)$ attēlojas par taisni t_1, tad leņķis starp taisnēm t un t_1 ir vienāds ar α.

Pagrieziens par ± 180° un ± 360°

Ja pagrieziena leņķis ir 360° vai −360°, tad figūra F attēlojas sevī ($F \to F$), neatkarīgi no pagrieziena centra izvēles.

Ja pagrieziena leņķis ir 180° vai −180°, tad figūra F attēlojas par tai centrāli simetrisku figūru.

Pagrieziens par ±180° ir centrālā simetrija.

Homotētija

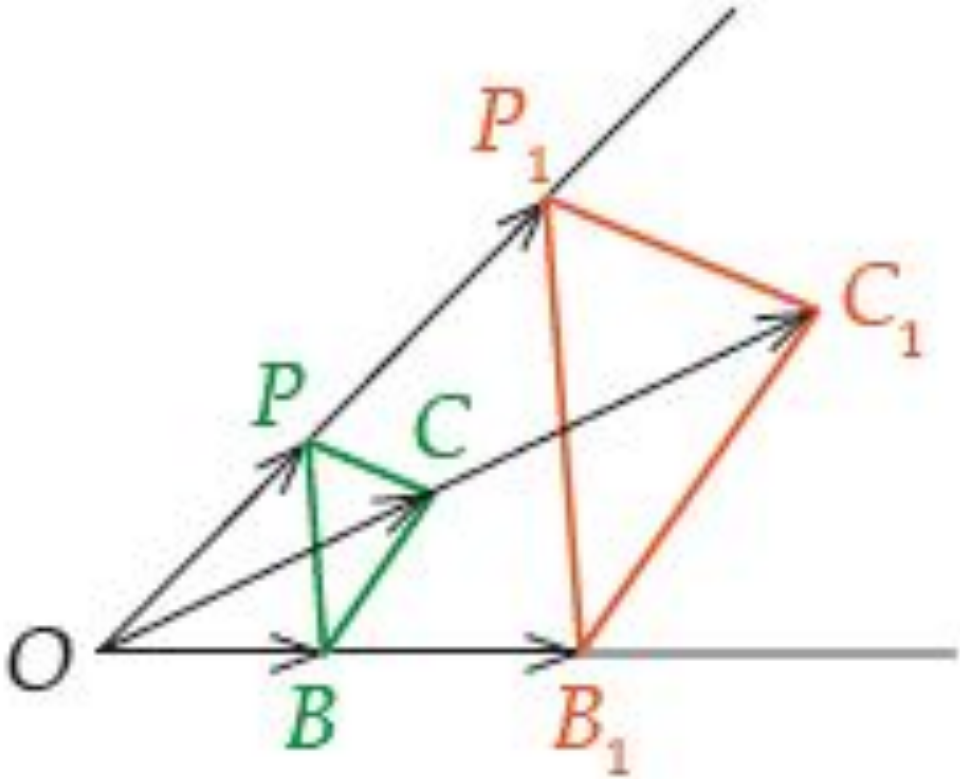
Homotētijas jēdziens

Homotētija ar centru O un koeficientu k ir pārveidojums, kurā katrs punkts P attēlojas par tādu punktu P_1, ka $\overrightarrow{OP_1} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, kur $k \neq 0$.

Lai homotētija būtu definēta, jābūt uzdotam homotētijas koeficientam k un homotētijas centram O.
Homotētiju var pierakstīt arī:

homotētija $(O; k)$.

Homotētija (1. piemērs)



Homotētijā (***O***; ***k***) punkta ***P*** *attēls ir* ***P**$_1$*, *jo* $\boldsymbol{\overrightarrow{OP} = K \cdot \overrightarrow{OP_1}}$.

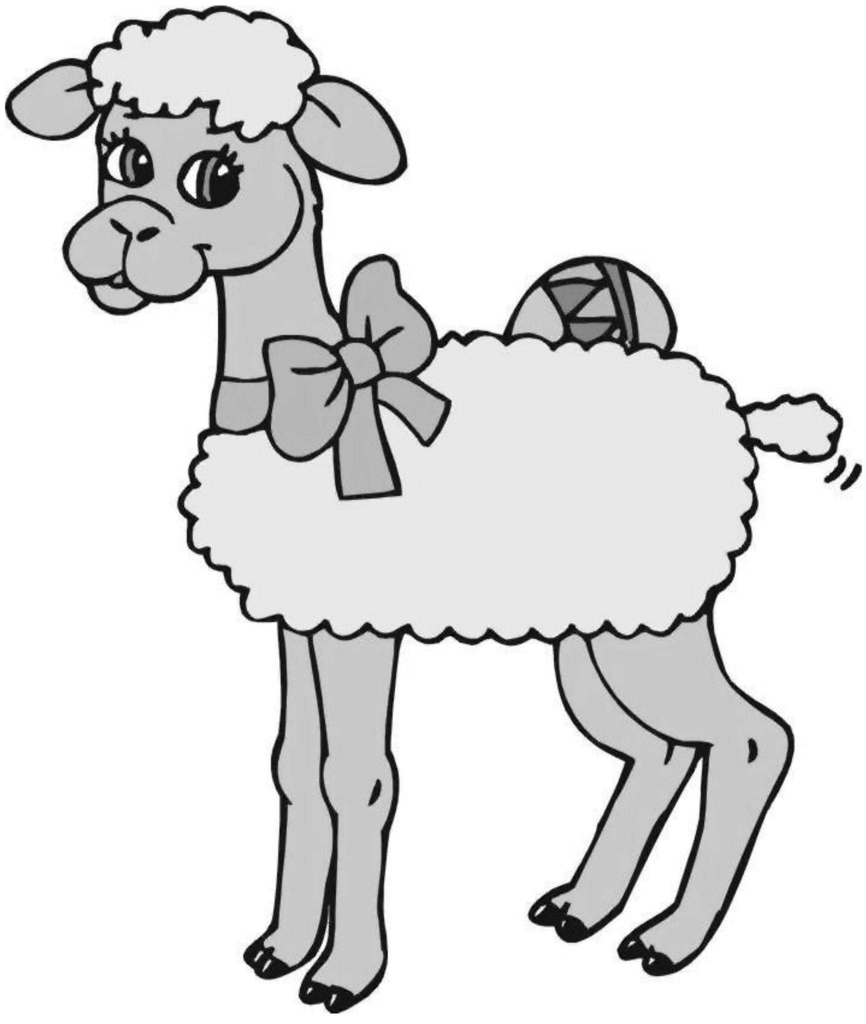
Attiecīgi

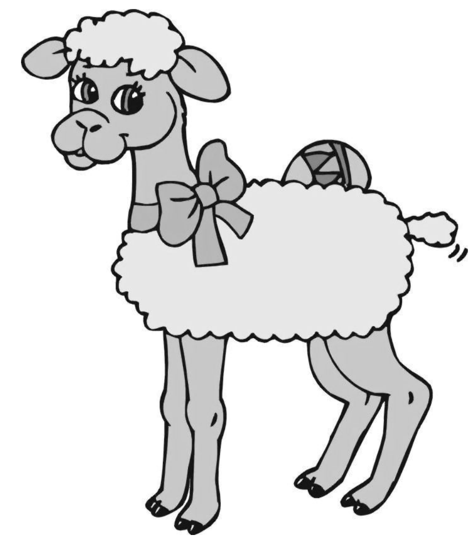
B → *B*$_1$, *jo* $\boldsymbol{\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{OB}}$

un

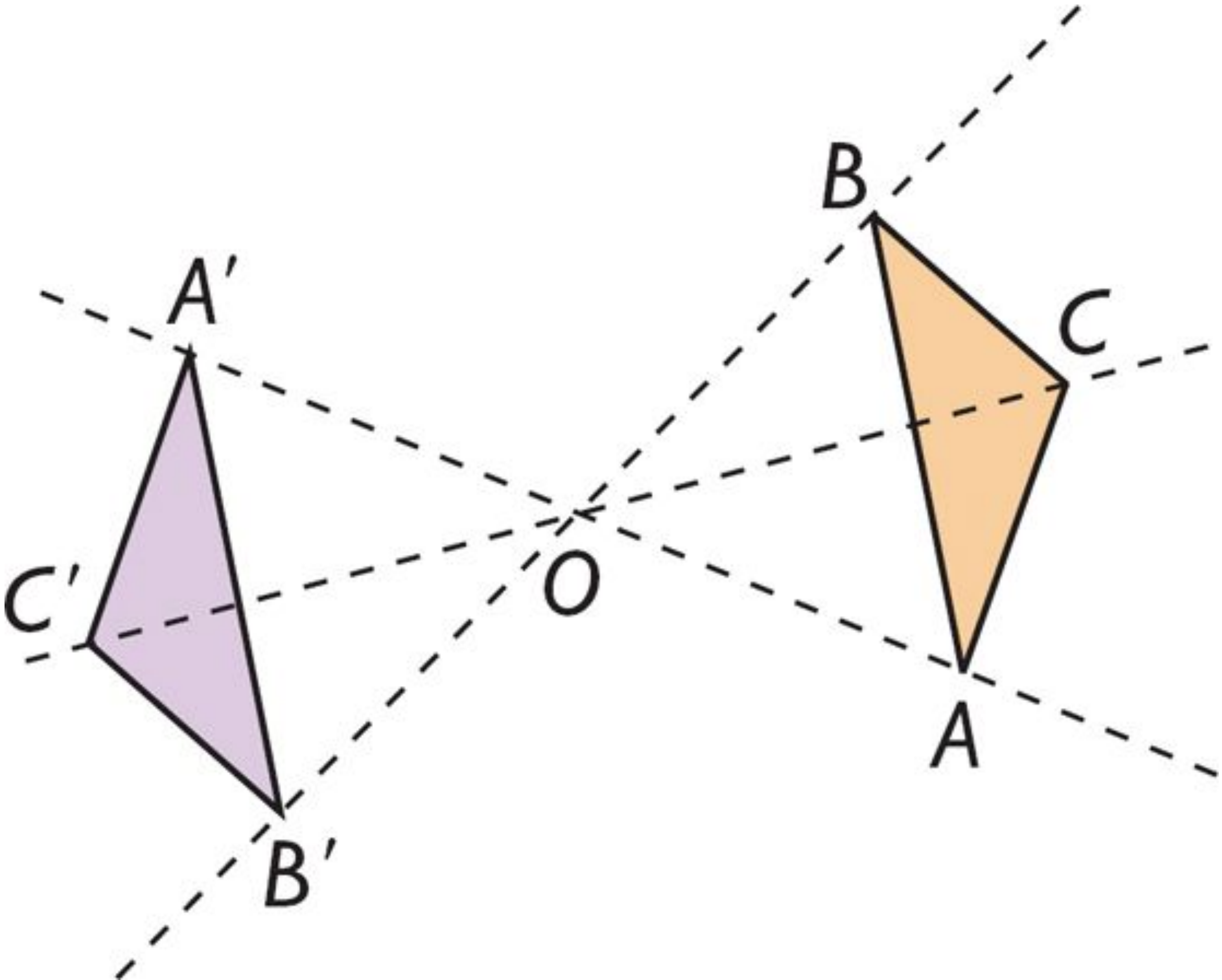
C → ***C**$_1$*, *jo* $\boldsymbol{\overrightarrow{OC_1} = k \cdot \overrightarrow{OC}}$

Homotētija (2. piemērs)





Homotētija (3. piemērs)



No ka ir atkarīga homotētija?

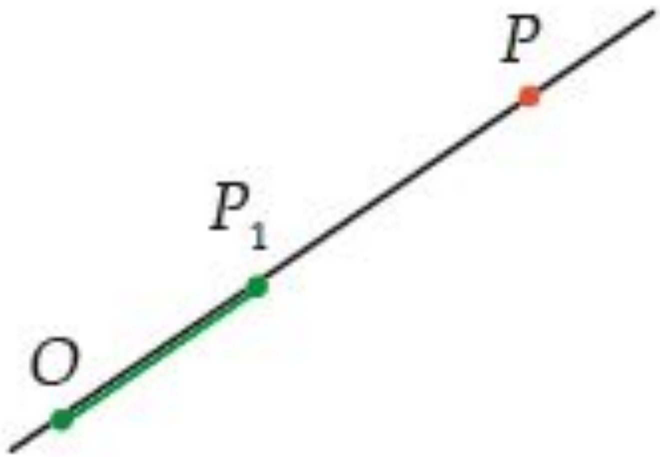
Homotētijā, atkarībā no koeficienta ***k vērtības***, *veicot* attēla konstrukciju, svarīgi ņemt vērā, ka iespējami dažādi punkta ***P*** *attēla* ***P***$_1$ *novietojumi.*

Lai konstruētu punkta P attēlu P_1 homotētijā $(O; k)$, rīkojas šādi:

- ja punkts P sakrīt ar homotētijas centru O, tad punkts P attēlojas sevī;
- ja punkts P nesakrīt ar homotētijas centru O (skat. 2.25.—2.26. att.), tad konstruē staru OP un,

ja $k > 0$, tad	ja $k < 0$, tad
uz stara OP atliek nogriezni $OP_1 = k \cdot OP$	uz staram OP pretēja stara atliek $OP_1 = \lvert k \rvert \cdot OP$

Attēlojums atkarībā no *k* vērtības



$OP_1 = k \cdot OP$, ja ***$k > 0$*** (pie tam šinī situācijā ***$k < 1$***, *(paskaidro, kāpēc* tas tā ir)).

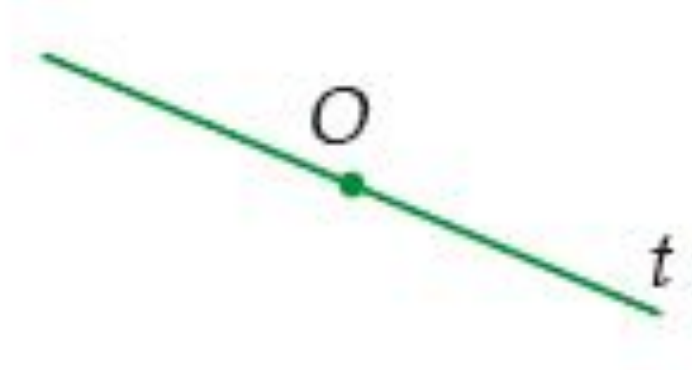
$OP_1 = k \cdot OP$, ja ***$k < 0$*** (pie tam šinī situācijā ***$|k| > 1$***, *(paskaidro, kāpēc* tas tā ir)).

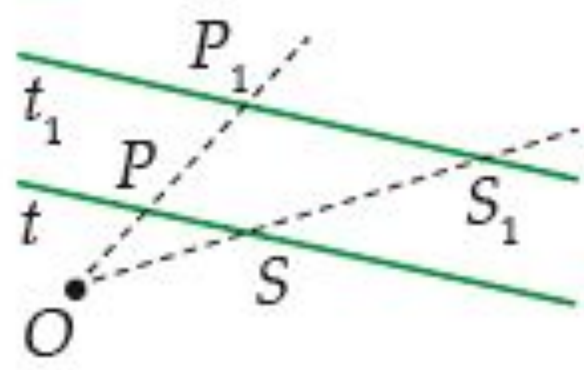
Homotētijas 1. īpašība

1. Visiem figūras F punktiem pielietojot homotētiju $(O; k)$, iegūst figūrai F līdzīgu figūru F_1. Proti, $F \sim F_1$ ar līdzības koeficientu $|k|$.

Homotētijas 2. īpašība

2. Homotētijā taisne attēlojas sevī vai par sev paralēlu taisni.



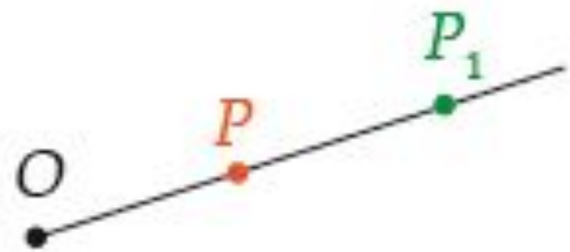


Ja ***homotētijas centrs*** atrodas uz taisnes ***t****, tad taisnes* ***stars attēlojas par tam pretēju staru***, un taisne attēlojas sevī.

Tā kā trijstūri Δ***OPS*** ir līdzīgi ΔOP_1S_1, *tad* $t \parallel t_1$.

Homotētijas 3. īpašība

3. Ja homotētijā $(O;\,k)$ punkts $P \to P_1$, tad homotētijā $\left(O;\frac{1}{k}\right)$ punkts $P_1 \to P$.



2.24. att.

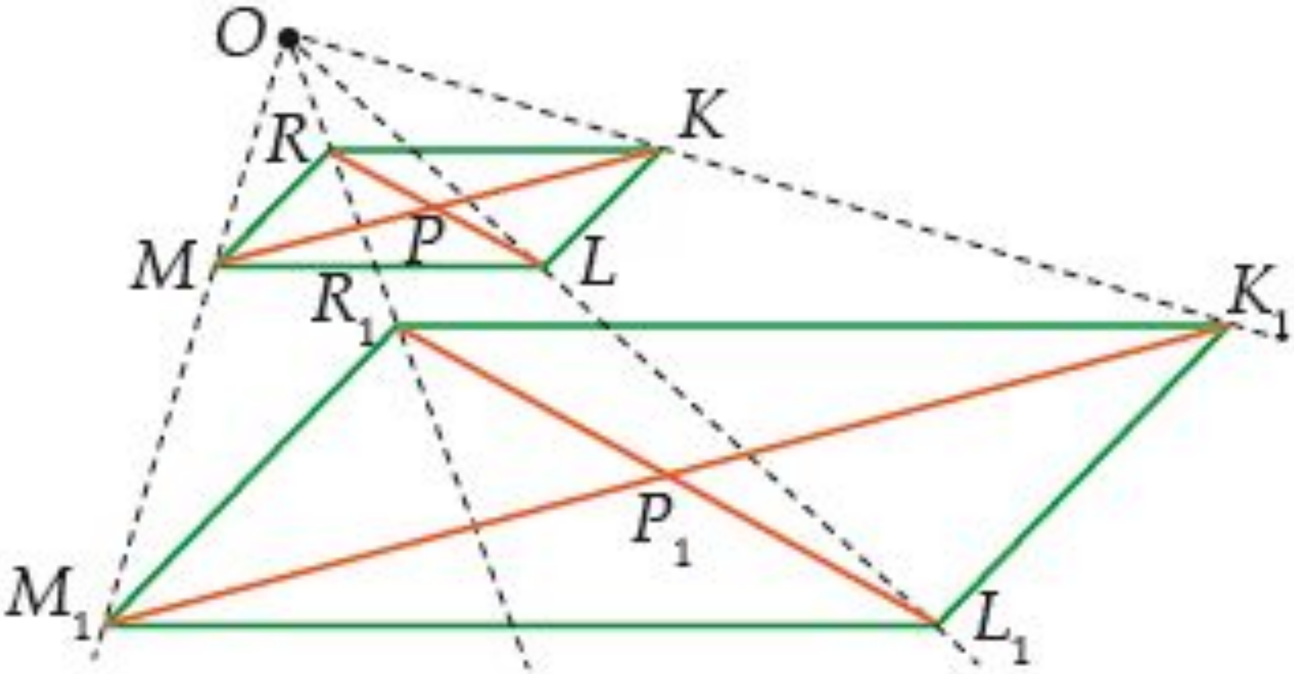
2.25. att.

Acīmredzot, ja homotētijā (***O***; ***k***), *kur* ***k > 0***, *punkts* $P \to P_1$, *tad* $\overrightarrow{OP_1}=k\cdot\overrightarrow{OP}$, no kurienes $\overrightarrow{OP}=1/k\cdot\overrightarrow{OP_1}$ un tāpēc $P_1 \to P$ *homotētijā* (***O***;***1/k***) (***skat. 2.24. att.***).

Ja homotētijā (***S***; ***k***), *kur* ***k < 0***, *punkts* $A \to A_1$, *tad* $\overrightarrow{SA_1}=|k|\cdot\overrightarrow{SA}$, no kurienes $\overrightarrow{SA}=1/|k|\cdot\overrightarrow{SA_1}$ un tāpēc $A_1 \to A$ homotētijā (***O***; ***1/k***) (***skat. 2.25. att.***).

Homotētijas 4. īpašība

4. Ja homotētijā $(O; k)$ figūra $F \to F_1$ un punkts $P \to P_1$, kur $P \in F$ un $P_1 \in F_1$, tad punktu P un P_1 ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 ir vienāda.



2.26. att.

PALDIES PAR UZMANĪBU!