Неопределённый интеграл

Содержание

1. Первообразная и неопределённый интеграл
2. Основные свойства неопределённого интеграла
3. Таблица интегралов
4. Методы интегрирования:
 - непосредственное интегрирование;
 - метод замены переменной;
 - интегрирование по частям

Первообразная и неопределённый интеграл

Функция $F(x)$ называется **<u>первообразной</u>** для функции $f(x)$ в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка её производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \;\; a \le x \le b.$$

Отыскание первообразной функции по заданной её производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)dx$ есть действие, обратное дифференцированию, - **<u>интегрирование</u>**.

Совокупность первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)dx$ называется **<u>неопределённым интегралом</u>** и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad если \quad d[F(x) + C] = f(x)dx.$$

Здесь, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, C – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределённого интеграла

1. ***Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:***
$$\int dF(x) = F(x) + C.$$
2. ***Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:***
$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$
3. ***Неопределённый интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределённых интегралов этих функций:***
$$\int [f(x) + \varphi(x)]d(x) = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$$
4. ***Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределённого интеграла:***
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$
5. ***Если*** $\int f(x)dx = F(x) + C$ **и** $u = \varphi(x)$ ***- любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то***
$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C;$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

1. данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;
2. данный интеграл после применения свойств *3)* и *4)* приводится к одному или нескольким табличным интегралам;
3. данный интеграл после элементарны тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств *3)* и *4)* приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Непосредственное интегрирование

Найдите следующие интегралы:

$$1) \int 5dx.$$

Решение:

На основании свойства *4)* постоянный множитель 5 можно вынести за знак интеграла и, используя формулу 1, получим: $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C.$

$$2) \int 6x^2 dx.$$

Решение:

Используя свойство *4)* и формулу 2, получим:

$$\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 2x^3 + C.$$

$$3) \int 4\left(x^2 - x + 3\right)dx.$$

Решение:

Используя свойства *3)* и *4)* и формулы 2 и 1, имеем:

$$\int 4\left(x^2 - x + 3\right)dx = 4\int x^2\,dx - 4\int x\,dx + 12\int dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C.$$

Постоянная интегрирования С равна алгебраической сумме трёх постоянных интегрирования, так как каждый интеграл имеет свою произвольную постоянную $(C_1 - C_2 + C_3 = C)$

Непосредственное интегрирование

Найдите следующие интегралы:

$$4)\int 2(3x-1)^2\,dx.$$

Решение:

$$\int 2(3x-1)^2\,dx=\int\left(18x^2-12x+2\right)dx=18\int x^2dx-12\int x\,dx+2\int dx=6x^3-6x^2+2x+C.$$

$$5)\int\frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx.$$

Решение:

$$\int\frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx=\int\left(x^2+3x+4\right)dx=\int x^2dx+3\int x\,dx+4\int dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x+C.$$

Задачи для самостоятельной работы:

$1.\ \int 4x^3dx;\quad 2.\ \int(2x-1)^3dx;\quad 3.\ \int\frac{x^2-x}{3x}dx.$

Метод замены переменной

Сущность интегрирования методом замены переменной (способом подстановки) заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования.

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x=\varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получим $dx=\varphi'(u)du$. Подставляя в подынтегральное выражение вместо x и dx их значения, выраженные через u и du, имеем

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du=\int F(u)du.$$

После того как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u=\psi(x)$ он приводится к переменной x.

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$1)\int (3x+2)^5 dx\ .$$

Решение:

Введём подстановку $3x+2=u$. Дифференцируя, имеем $3dx=du$, откуда $dx=\frac{1}{3}du$. Подставив в данный интеграл вместо $3x+2$ и dx их выражения, получим:

$$\int (3x+2)^5 dx=\frac{1}{3}\int u^5 du=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^6}{6}+C=\frac{1}{18}u^6+C.$$

Заменив *u* его выражением через *x*, находим:

$$\int (3x+2)^5 dx=\frac{1}{18}u^6+C=\frac{1}{18}(3x+2)^6+C.$$

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$2)\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx\ .$$

Решение:

Введём подстановку $2x^3+1=u$. Дифференцируя, имеем $6x^2dx=du$, откуда $x^2dx=\frac{1}{6}du$. Таким образом,

$$\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx=\frac{1}{6}\int u^4du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}+C=\frac{1}{30}u^5+C=\frac{1}{30}\left(2x^3+1\right)^5+C.$$

$$3)\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^3}\ .$$

Решение:

Введём подстановку $x^2+1=u$. Дифференцируя, имеем $2xdx=du$, откуда $xdx=\frac{1}{2}du$. Таким образом,

$$\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\int\left(x^2+1\right)^{-3}x\,dx=\frac{1}{2}\int u^{-3}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4u^2}+C=-\frac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}+C.$$

Метод замены переменной

Найдите следующие интегралы:

$$4)\int \frac{x^2\,dx}{5x^3+1}\,.$$

Решение:

Введём подстановку $5x^3+1=u$. Дифференцируя, имеем $15x^2dx=du$, откуда $x^2dx=\frac{1}{15}du$. Таким образом,

$$\int \frac{x^2\,dx}{5x^3+1}=\frac{1}{15}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{15}\ln u+C=\frac{1}{15}\ln\left|5x^3+1\right|+C.$$

Задачи для самостоятельной работы:

$$1.\int(7-2x)^3dx\,;\quad 2.\int\left(x^2+3\right)^5x\,dx\,;\quad 3.\int\frac{x^3\,dx}{\left(5x^4+3\right)^5}\,.$$

Интегрирование по частям

Интегрируя обе части равенства $d(u\,v) = u\,dv + v\,du$, получим

$$\int d(u\,v) = \int u dv + \int v\,du; \quad u\,v = \int u\,dv + \int v\,du,$$

откуда

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (14)$$

С помощью этой формулы вычисление интеграла $\int u dv$ сводится к вычислению интеграла $\int v\,du$, если последний окажется проще исходного.

Интегрирование по частям

Найдите следующие интегралы:

1) $\int x\sin x\,dx$.

Решение:

Пусть $u = x,\;\; dv = \sin x\,dx;$ тогда $du = dx$, $\int dv = \int \sin x\,dx$, т.е. $v = -\cos x.$

Используя формулу (14), получим:

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2) $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}.$

Решение:

Пусть $u = \ln x,\;\; dv = \frac{dx}{x^2};$ тогда $du = \frac{dx}{x},\; \int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x};\;\; v = -\frac{1}{x}.$

Используя формулу (14), получим:

$$\int \frac{\ln x\,dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Интегрирование по частям

Найдите следующий интеграл:

$$3)\ \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx.$$

Решение:

1. Пусть $u=\sqrt{x^2+a^2},\ dv=dx;$ тогда $du=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}},\ v=x.$
   По формуле (14) получим:

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

2. В числителе подынтегральной функции последнего интеграла прибавим и вычтем a^2 и представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

3. Последний интеграл находим по формуле (11):

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}-\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

Интегрирование по частям

4. Перенеся $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ из правой части в левую, получим:

$$2\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C,$$

или окончательно

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

Задачи для самостоятельной работы:

$$1)\int x\cos x\,dx;\quad 2)\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x};\quad 3)\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$