

**Метод
математической
индукции**

Содержание:

1. Введение.

2. Основная часть и примеры.

3. Заключение.

Знаменитый математик XVII в. П.Ферма
проверив, что числа



Пьер Ферма
1601—1665

$$2^{2^0} + 1 = 3$$

$$2^{2^1} + 1 = 5$$

$$2^{2^2} + 1 = 17$$

$$2^{2^3} + 1 = 257$$

$$2^{2^4} + 1 = 65537$$

простые, сделал по индукции
предположение, что для всех
 $n=1,2,3,\dots$ числа вида

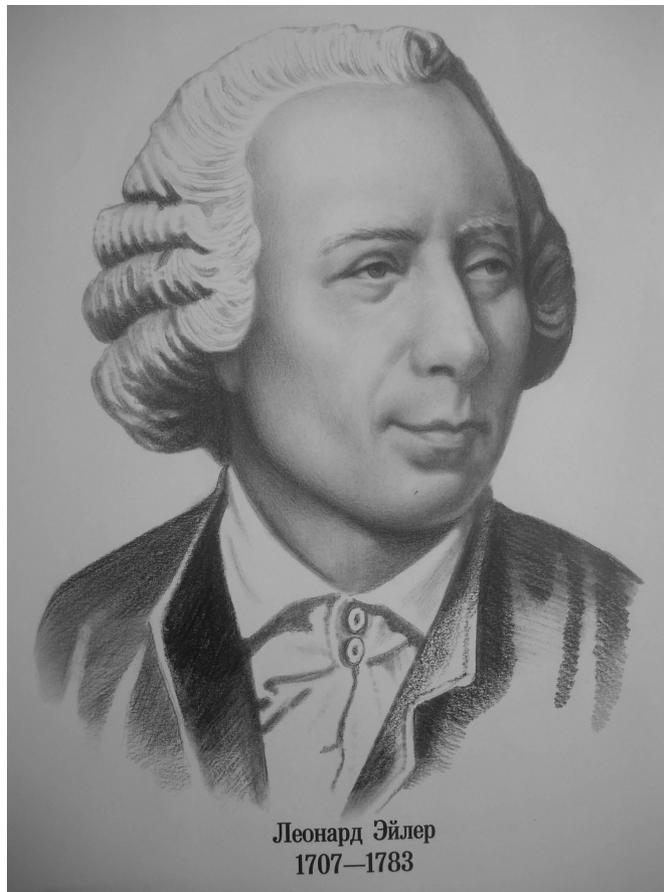
простые. $2^{2^n} + 1$



В XVIII веке Л.Эйлер нашел, что при $n=5$

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

составное число



Введение

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. Дедуктивный метод рассуждений - это рассуждение от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом – частный результат. Индукция применяется при переходе от частных результатов к общим, т.е. является методом, противоположным дедуктивному.

Основная часть

По своему первоначальному смыслу слово “индукция” применяется к рассуждениям, при помощи которых получают общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений. Простейшим методом рассуждений такого рода является полная индукция. Вот пример подобного рассуждения.

Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах $4 < n < 20$ представим в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

$$\begin{aligned} 4 &= 2 + 2; & 6 &= 3 + 3; & 8 &= 5 + 3; \\ 10 &= 7 + 3; & 12 &= 7 + 5; & 14 &= 7 + 7; \\ 16 &= 11 + 5; & 18 &= 13 + 5; & 20 &= 13 + 7. \end{aligned}$$

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

Таким образом, полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев.

Иногда общий результат удаётся предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая неполная индукция).

Полная индукция имеет в математике лишь ограниченное применение. Многие интересные математические утверждения охватывают бесконечное число частных случаев, а провести проверку для бесконечного числа случаев мы не в состоянии. Неполная же индукция часто приводит к ошибочным результатам.

Во многих случаях выход из такого рода затруднений заключается в обращении к особому методу рассуждений, называемому методом математической индукции.

Принцип математической индукции.

Если предложение $A(n)$, зависящее от натурального числа n , истинно для $n=1$ и из того, что оно истинно для $n=k$ (где k -любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k+1$, то предположение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n .

Если предложение $A(n)$ истинно при $n=r$ и если $A(k) \rightarrow A(k+1)$ для любого $k > r$, то предложение $A(n)$ истинно для любого $n > r$.

Док-во по методу математической индукции проводится следующим образом. Сначала доказываемое утверждение проверяется для $n=1$, т.е. устанавливается истинность высказывания $A(1)$. Эту часть доказательства называют **базисом индукции**. Затем следует часть док-ва, называемая **индукционным шагом**. В этой части доказывают справедливость утверждения для $n=k+1$ в предположении справедливости утверждения для $n=k$, т.е. доказывают, что $A(k) \rightarrow A(k+1)$.

Алгоритм доказательства методом математической индукции

1. Проверяют справедливость гипотезы для наименьшего из натуральных чисел при котором гипотеза имеет смысл (базис индукции).
2. Сделав предположение, что гипотеза верна для некоторого значения k , стремятся доказать справедливость ее для $k+1$ (индукционный шаг).
3. Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе принципа математической индукции можно утверждать, что высказанная гипотеза справедлива для любого натурального числа n .



Метод математической индукции в решении задач на делимость.

Пример 1

Доказать, что при любом n , $7^n - 1$ делится на 6 без остатка.

Решение:

1) Пусть $n=1$, тогда $X_1 = 7^1 - 1 = 6$ делится на 6 без остатка. Значит при $n=1$ утверждение верно.

2) Предположим, что при $n=k$, $7^k - 1$ делится на 6 без остатка.

3) Докажем, что утверждение справедливо для $n=k+1$.

$$X_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7$$

$$7^k - 7 + 6 = 7(7^k - 1) + 6.$$

Первое слагаемое делится на 6, поскольку $7^k - 1$ делится на 6 по предположению, а вторым слагаемым является 6. Значит $7^n - 1$ кратно 6 при любом натуральном n . В силу метода математической индукции утверждение доказано.

Применение метода к суммированию рядов.

Пример 2

Доказать, что

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^n = (x^{n+1}-1)/(x-1), \text{ где } x \neq 1$$

Решение:

1) При $n=1$ получаем

$$1+x = (x^2-1)/(x-1) = (x-1)(x+1)/(x-1) = x+1$$

следовательно, при $n=1$ формула верна; А(1) ИСТИННО.

2) Пусть k -любое натуральное число и пусть формула верна при $n=k$, т.е.

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^k=(x^{k+1}-1)/(x-1).$$

Докажем, что тогда выполняется равенство $1+x+x^2+x^3+\dots+x^k+x^{k+1}=(x^{k+2}-1)/(x-1)$.

В самом деле

$$\begin{aligned} 1+x+x^2+x^3+\dots+x^k+x^{k+1} &= (1+x+x^2+x^3+\dots+x^k)+x^{k+1} \\ &= (x^{k+1}-1)/(x-1)+x^{k+1} \\ &= (x^{k+2}-1)/(x-1). \end{aligned}$$

Итак, $A(k) > A(k+1)$.

На основании принципа математической индукции заключаем, что формула верна для любого натурального числа n .

Применения метода к доказательству неравенств.

Пример 3

Доказать, что при $n > 2$ справедливо неравенство $1 + (1/2^2) + (1/3^2) + \dots + (1/n^2) < 1,7 - (1/n)$.

Решение:

1) При $n=3$ неравенство верно

$$1 + (1/2^2) + (1/3^2) = 245/180 < 246/180 = 1,7 - (1/3).$$

2) Предположим, что при $n=k$

$$1 + (1/2^2) + (1/3^2) + \dots + (1/k^2) = 1,7 - (1/k).$$

3) Докажем справедливость неравенства при $n=k+1$

$$(1 + (1/2^2) + \dots + (1/k^2)) + (1/(k+1)^2) < 1,7(1/k) + (1/(k+1)^2).$$

Докажем, что

$$1,7 - (1/k) + (1/(k+1)^2) < 1,7 - (1/k+1) \cup \\ (1/(k+1)^2) + (1/k+1) < 1/k \cup (k+2)/(k+1)^2 < 1/k \cup \\ k(k+2) < (k+1)^2 \cup k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1.$$

Последнее очевидно, а поэтому

$$1 + (1/2^2) + (1/3^2) + \dots + (1/(k+1)^2) < 1,7 - (1/k+1).$$

В силу метода математической индукции неравенство доказано.

Метод в применение к другим задачам.

Пример 4

Доказать, что число диагоналей выпуклого n -угольника равно $n(n-3)/2$.

Решение:

1) При $n=3$ утверждение справедливо, ибо в треугольнике

$A_3 = 3(3-3)/2 = 0$ диагоналей;

$A_2 A(3)$ истинно.

2) Предположим, что во всяком

выпуклом k -угольнике имеет ся $A_k = k(k-3)/2$ диагоналей.

3) Докажем, что тогда в выпуклом

A_{k+1} $(k+1)$ -угольнике число диагоналей $A_{k+1} = (k+1)(k-2)/2$.

Пусть $A_1 A_2 A_3 \dots A_k A_{k+1}$ - выпуклый $(k+1)$ -угольник. Проведём в нём диагональ $A_1 A_k$. Чтобы подсчитать общее число диагоналей этого $(k+1)$ -угольника нужно подсчитать число диагоналей в k -угольнике $A_1 A_2 \dots A_k$, прибавить к полученному числу $k-2$, т.е. число диагоналей $(k+1)$ -угольника, исходящих из вершины A_{k+1} , и, кроме того, следует учесть диагональ $A_1 A_k$. Таким образом, $k+1 = k + (k-2) + 1 = k(k-3)/2 + k - 1 = (k+1)(k-2)/2$.

Итак, $A(k) > A(k+1)$. Вследствие принципа математической индукции утверждение верно для любого выпуклого n -угольника.

Заключение

В частности изучив метод математической индукции, я повысила свои знания в этой области математики, а также научилась решать задачи, которые раньше были мне не под силу.

В основном это были логические и занимательные задачи, т.е. как раз те, которые повышают интерес к самой математике как к науке. Решение таких задач становится занимательным занятием и может привлечь в математические лабиринты всё новых любознательных. Поэтому, это является основой любой науки.



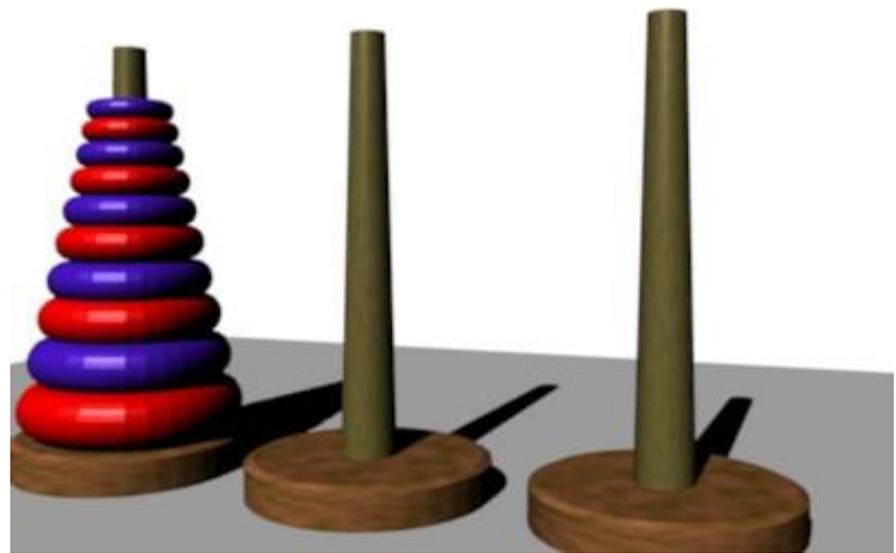
«Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции, является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику»

А.Н. Колмогоров



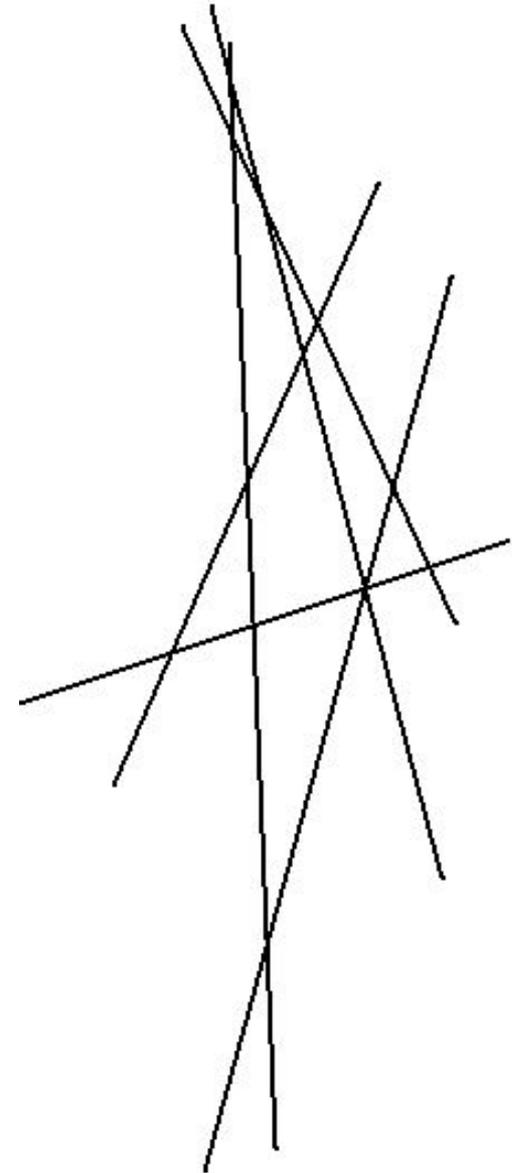
Ханойские башни

Есть три стержня и колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стержня на другой?



Пересечение прямых

Докажите, что любые n прямых, расположенных на одной плоскости, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках.



Докажите тождество

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{3}$$

- 1. [БАЗА] Проверим, работает ли эта формула при $n=1$:

$$1^2 = \frac{1(1 + \frac{1}{2})(1 + 1)}{3} = 1,$$

- 2. [ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ] Предположим, что тождество верно при $n=k$, то есть

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + \frac{1}{2})(k + 1)}{3}$$

- 3. [ШАГ] Шаг индукции будет соответствовать проверке этого тождества при $n=k+1$, то есть нужно доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + \frac{3}{2})(k + 2)}{3}$$

- 4. [ВЫВОД] Тождество верно для любого .

Группа 1.

Задача 1. Докажите, что при каждом натуральном n , начиная с $n=3$, существует выпуклый n -угольник, имеющий ровно три острых угла.

Задача 2. Доказать, что

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2.$$

Задача 3. Доказать, что $(11^{n+2} + 12^{2n+1})$ делится на 133 без остатка.

Группа 2.

Задача 1. Плоскость разделена на части n прямыми. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, что соседние куски будут раскрашены в разные цвета.

Задача 2. Доказать, что

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^n=(x^{n+1}-1)/(x-1).$$

Задача 3. Доказать, что при любом n $7^n - 1$ делится на 6 без остатка.

Группа 3.

Задача 1. Докажите что сумма углов выпуклого n -угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$ (или $(n-2)\pi$ радиан). В частности для треугольника получаем $(3-2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$ а для четырехугольника $(4-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$

Задача 2. Доказать, что при любом n справедливо утверждение:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6.$$

Задача 3. Доказать, что $3^{3n-1} + 2^{4n-3}$ при произвольном натуральном n делится на 11.

Группа 4.

Задача 1. Чему равно количество кусочков, на которые n прямых (не проходящих через одну точку) делят плоскость на части? Одна прямая — на две части, две — на четыре. А пятнадцать прямых?

Задача 2. Доказать, что

$$1^3-2^3+3^3-4^3+\dots+(2n-1)^3-(2n)^3=-n^2(4n+3)$$

) для любого натурального n .

Задача 3. Доказать, что $11^{2n} - 1$ при произвольном натуральном n делится на 6 без остатка.

Рефлексия

