Ротатабельное планирование

когда нет достоверной информации об ориентации поверхности отклика, наиболее разумным является использование центральных композиционных планов, отвечающих требованию ротатабельности, т. е. планов, позволяющих получать модель, способную предсказывать значение параметра оптимизации с одинаковой точностью независимо от направления на равных расстояниях от центра плана.

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	Уровни			Интервалы варьирования
	верхний +1	основной 0	нижний −1	
x_1 — скорость резания, м/мин	314	205	96	109
x_2 — подача, мм/об	0,7	0,5	0,3	0,2
x_3 — глубина резания, мм	0,75	0,5	0,25	0,25

План эксперимента типа 2^3

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y (Rz)
1	+	−	−	−	+	+	+	−	2,16
2	+	+	−	−	−	−	+	+	2,65
3	+	−	+	−	−	+	−	+	3,80
4	+	+	+	−	+	−	−	−	4,70
5	+	−	−	+	+	−	−	+	2,22
6	+	+	−	+	−	+	−	−	2,48
7	+	−	+	+	−	−	+	−	4,20
8	+	+	+	+	+	+	+	+	4,89

Коэффициенты уравнения регрессии определяли по формулам

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j}{N}; \quad b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j}{N}; \quad b_{il} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{lj} y_j}{N}.$$

После подстановки значений коэффициентов уравнение приняло вид

$$y = 3{,}3875 + 0{,}2925x_1 + 1{,}01x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}105x_1x_2 - $$
$$- 0{,}055x_1x_3 + 0{,}0875x_2x_3 + 0{,}0025x_1x_2x_3.$$

Ротатабельность центрального композиционного плана достигается выбором величины «звездного» плеча α. Величину звездного плеча для «ядра», содержащего полный факторный эксперимент, определяют из соотношения

$$\alpha = 2^{\frac{k}{4}},$$

а для «ядра», содержащего дробную реплику,

$$\alpha = 2^{\frac{k-p}{4}}.$$

Результаты опытов в центре плана и в «звездных» точках

Содержание плана	Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y
Опыты в центре плана	1	+	0	0	0	0	0	0	2,31
	2	+	0	0	0	0	0	0	2,08
	3	+	0	0	0	0	0	0	2,12
	4	+	0	0	0	0	0	0	2,32
	5	+	0	0	0	0	0	0	2,36
	6	+	0	0	0	0	0	0	2,12
Опыты в «звездных» точках	7	+	−1,682	0	0	2,828	0	0	3,55
	8	+	+1,682	0	0	2,828	0	0	4,50
	9	+	0	−1,682	0	0	2,828	0	1,80
	10	+	0	+1,682	0	0	2,828	0	5,15
	11	+	0	0	−1,682	0	0	2,828	2,32
	12	+	0	0	+1,682	0	0	2,828	2,56

Среднее арифметическое значение параметра оптимизации $\bar{y}$ в центре плана

$$\bar{y} = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0=6} y_u = 2,218.$$

Дисперсия $s_y{}^2$ воспроизводимости эксперимента

$$s_y^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{u=1}^{n_0=6} (y_u - \bar{y})^2 = 0,015456.$$

Разность между значением параметра оптимизации $\bar{y}$ в центре плана и величиной свободного члена b_0

$$|\bar{y} - b_0| = |2,218 - 3,3875| = 1,1695.$$

Полученная разность во много раз превышает ошибку s_y эксперимента:

$$s_y = +\sqrt{s_y^2} = 0,1241.$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 +$$
$$+ b_{123}x_1x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2.$$

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии находят по формулам

$$s^2\{b_0\} = \frac{2A\lambda^2(k+2)}{N}s_y^2; \tag{81}$$

$$s^2\{b_i\} = \frac{c}{N}s_y^2;$$

$$s^2\{b_{il}\} = \frac{c^2}{\lambda N}s_y^2;$$

$$s^2\{b_{ii}\} = \frac{Ac^2[(k+1)\lambda - (k-1)]}{N}s_y^2.$$

$$A = \frac{1}{2\lambda[(k+2)\lambda - k]}; \qquad c = \frac{N}{\sum\limits_{j=1}^{N} x_{ij}^2}. \qquad \lambda = \frac{k(n_c + n_0)}{(k+2)n_c}$$

где n_0 — число опытов в центре плана (число нулевых точек); $n_c = N - n_0$; N — общее число опытов; k — число факторов.

$$b_0=2,1956;\quad b_1=0,2882;\quad b_2=0,9819;\quad b_3=0,0646;\quad b_{12}=0,105;$$
$$b_{13}=-0,055;\quad b_{23}=0,0875;\quad b_{123}=0,0025;\quad b_{11}=0,6663;$$
$$b_{22}=0,4594;\quad b_{33}=0,0833.$$

После подстановки значений коэффициентов в уравнение (94) оно получило вид

$$y=2,1956+0,2882x_1+0,9819x_2+0,0646x_3+$$
$$+0,105x_1x_2-0,055x_1x_3+0,0875x_2x_3+0,0025x_1x_2x_3+$$
$$+0,6663x_1^2+0,4594x_2^2+0,0833x_3^2. \qquad (95)$$

Дисперсии коэффициентов, вычисленные по формулам (81), (82), (83), (84), имели следующие зачения:

$$s^2\{b_0\}=0,00258;\quad s^2\{b_i\}=0,001131;\quad s^2\{b_{il}\}=0,00193;$$
$$s^2\{b_{ii}\}=0,00107.$$

$$b_0 = 2{,}26; \; b_{11} = 0{,}6555; \; b_{22} = 0{,}4389; \; b_1 = 0{,}2882; \quad b_2 = 0{,}9819$$

Таким образом, математическая модель, полученная в результате ротатабельного планирования второго порядка, приняла вид