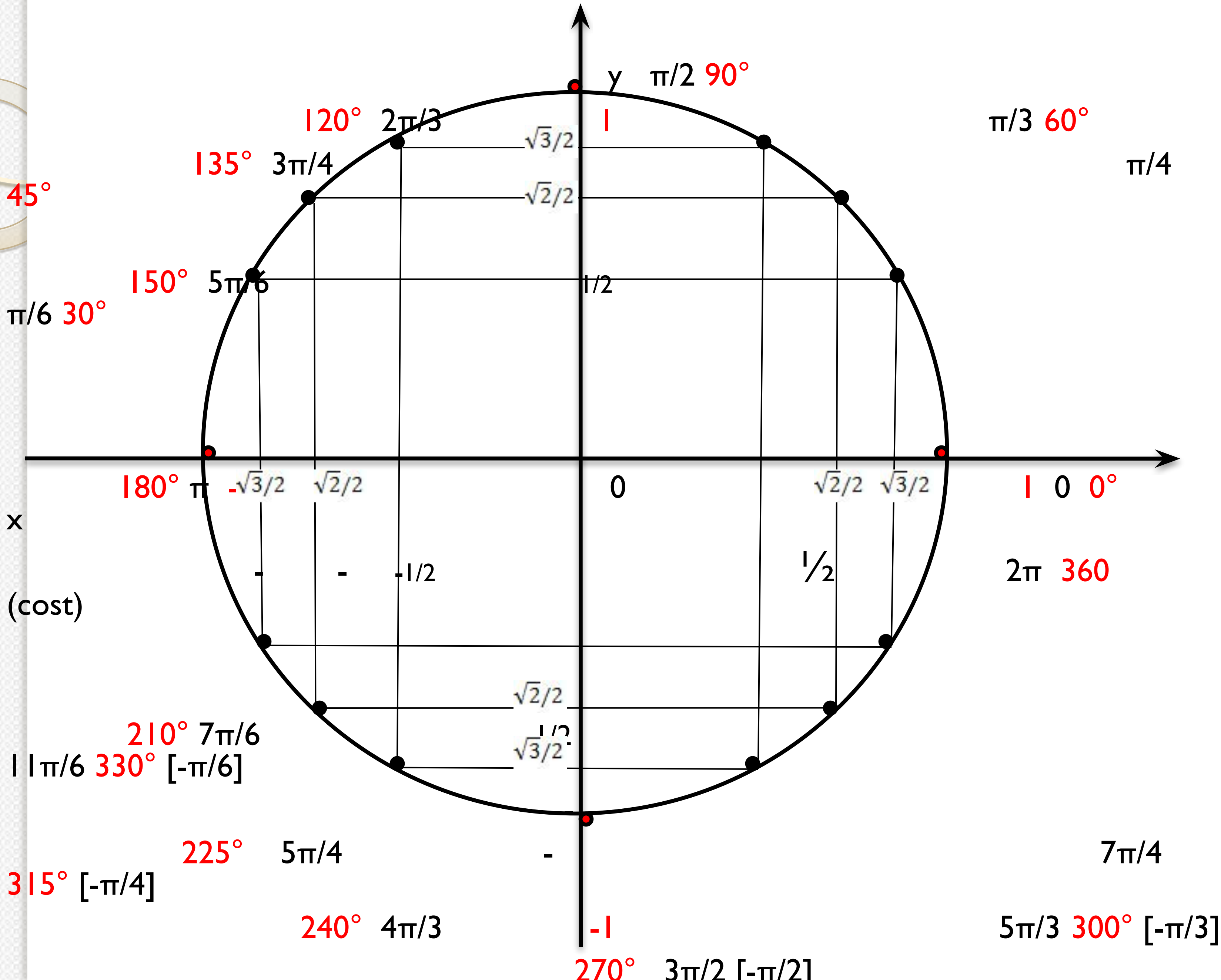
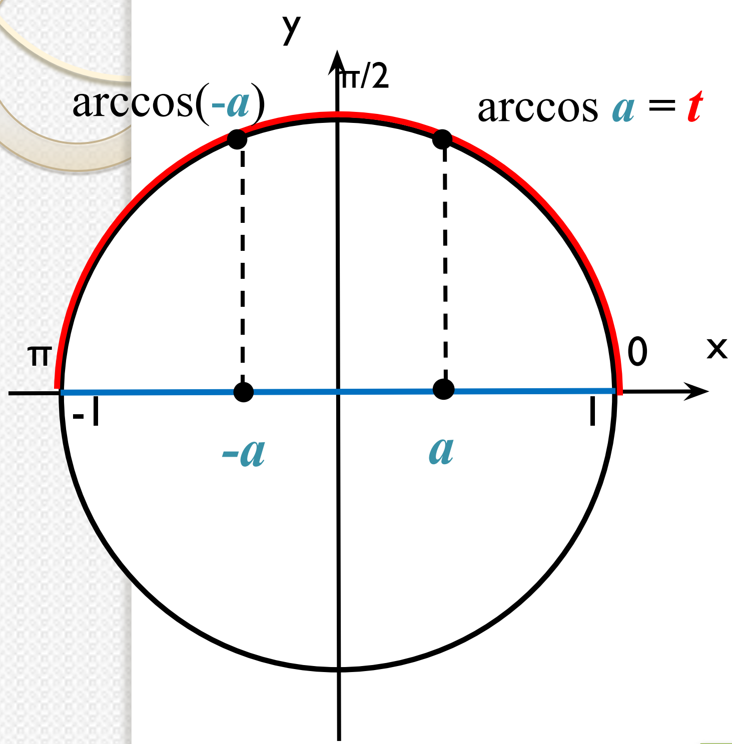
# Простейшие
# тригонометрически
# е
# Уравнения.
# Решение
# Тригонометрическ
# их

# Повторим значения синуса и косинуса



# Арккосинус




Арккосинусом числа $a$ называется такое число (угол) $t$ из $[0;\pi]$, что

$\cos t = a$.

Причём, $|a| \leq 1$.

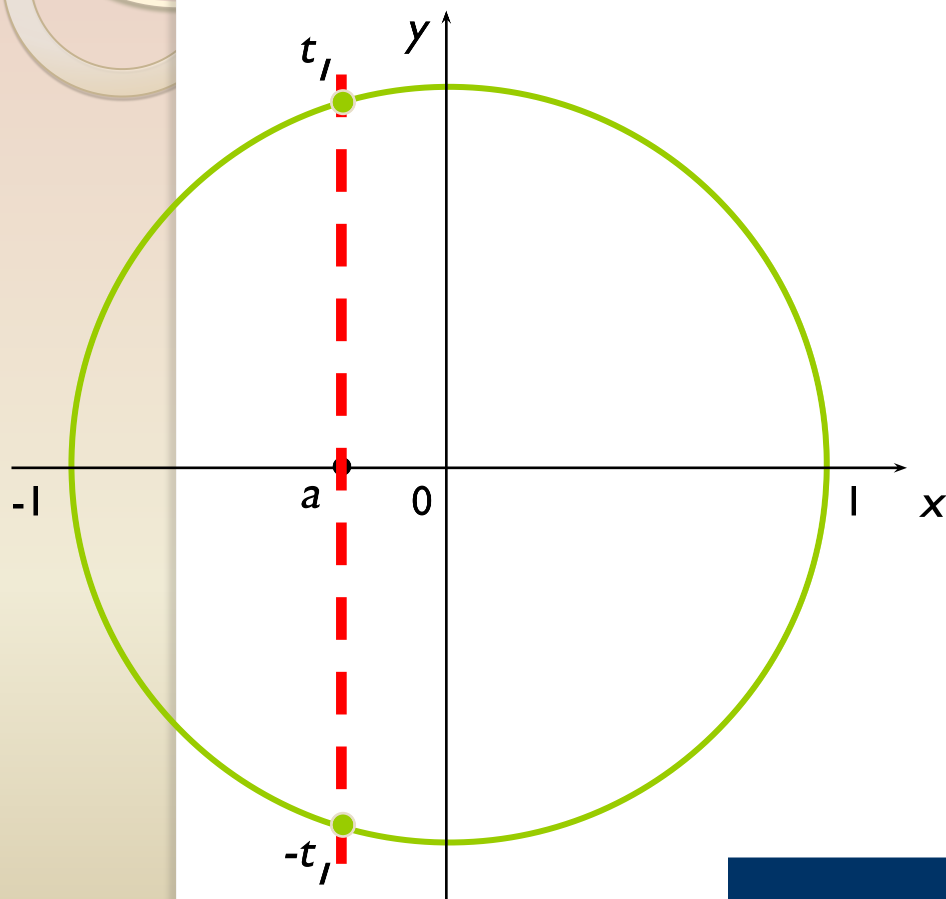
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Примеры:

1) $\arccos(-1)$ $= \pi$

2) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ $= \frac{\pi}{6}$

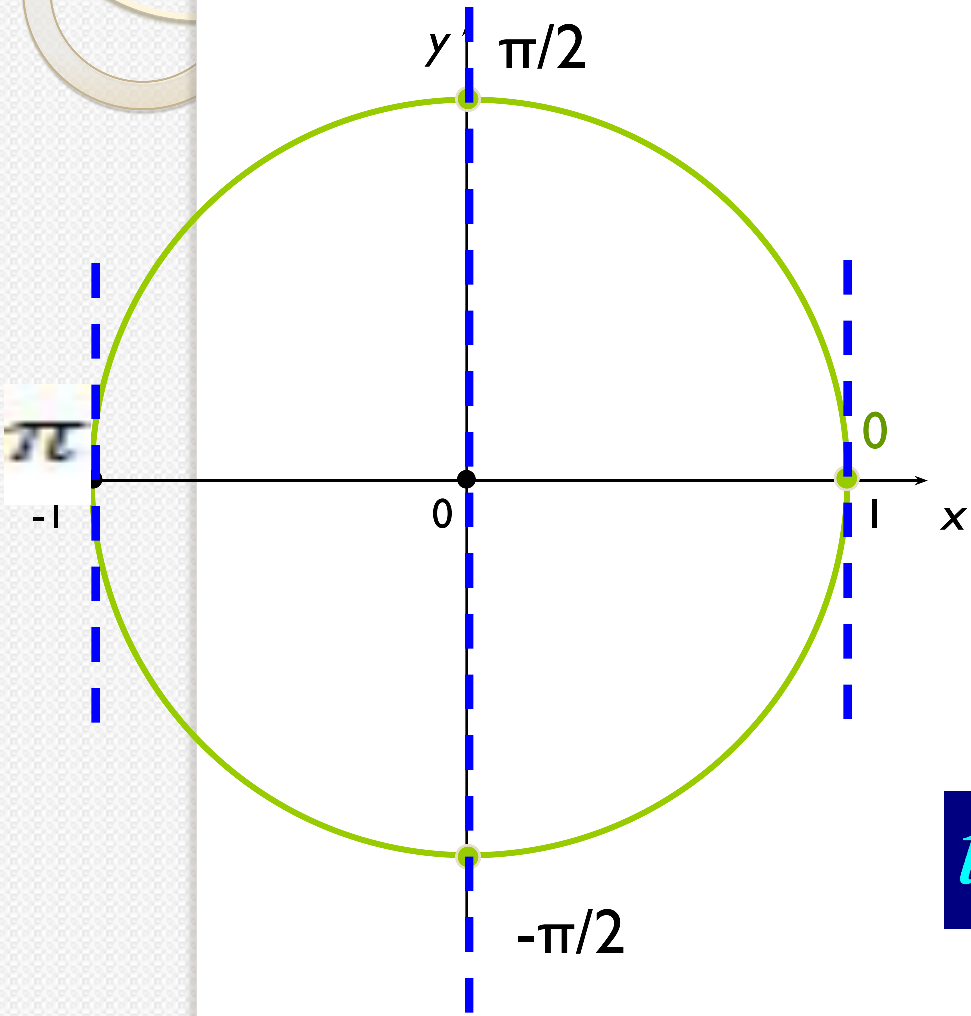
# Уравнение cost = a




1. Проверить условие | a | ≤ 1
2. Отметить точку *a* на оси абсцисс.
3. Построить перпендикуляр в этой точке.
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные точки – решение уравнения *cost = a.*
6. Записать **общее решение уравнения.**

$$t = \pm t_1 + 2\pi n, \quad n \in Z$$

# Частные случаи уравнения cost = a




**cost = 1**

$$t = 2\pi n, \quad n \in Z$$

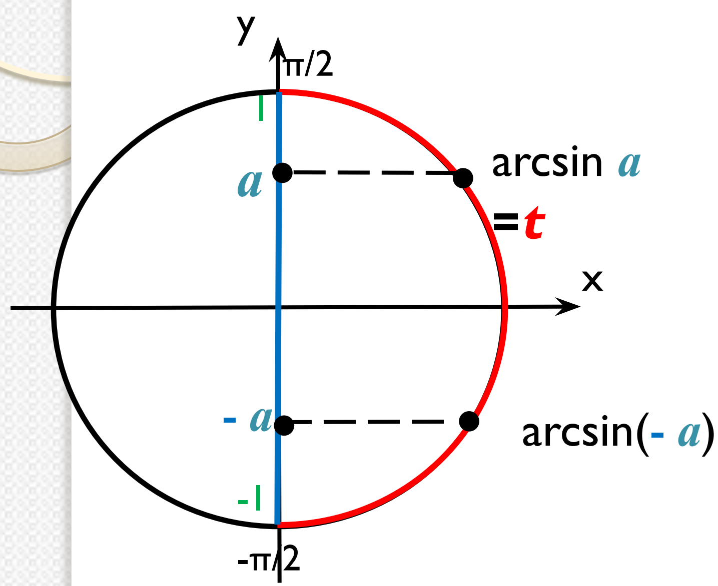
**cost = 0**

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

**cost = -1**

$$t = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

# Арксинус




Арксинусом числа *a* называется такое число (угол) **t** из **[-π/2;π/2]**, что ***sin t*** = *a***.**
Причём, | *a* |≤ **1**.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

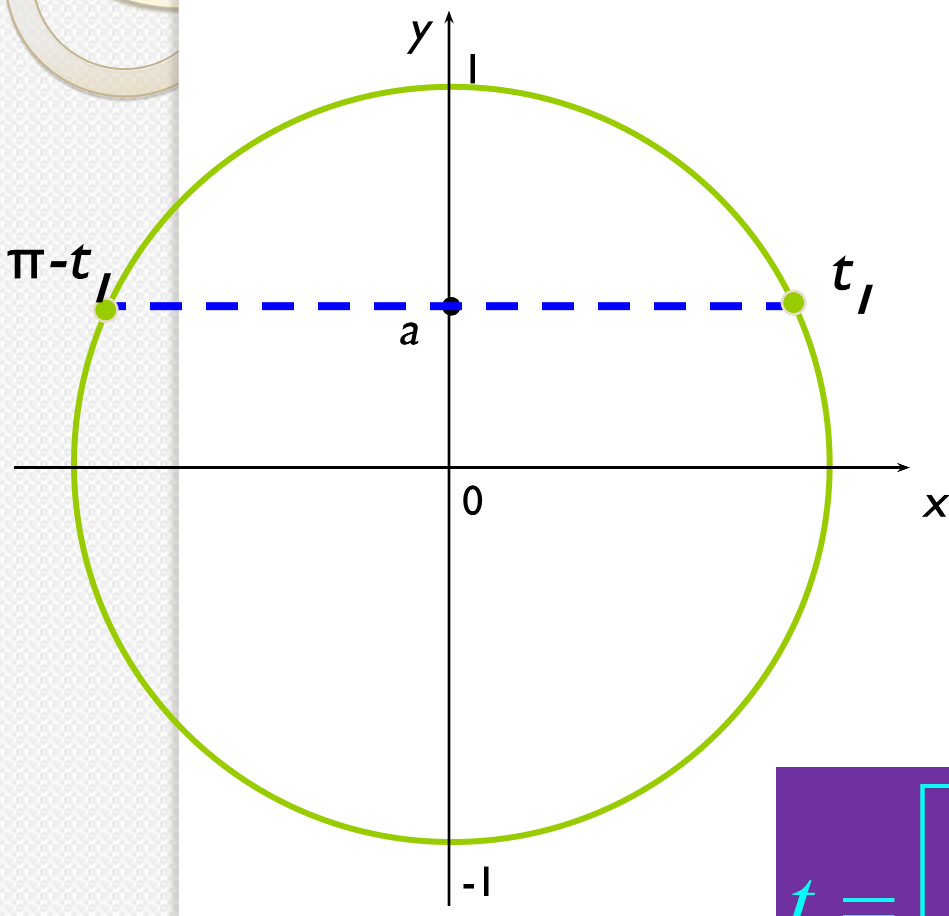
Примеры:

$$1)\ arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$2) arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$3) arcsin 0 = 0$$

# Уравнение *sint = a*




1. Проверить условие | *a* | ≤ 1

2. Отметить точку *a* на оси ординат.

3. Построить перпендикуляр в этой точке.

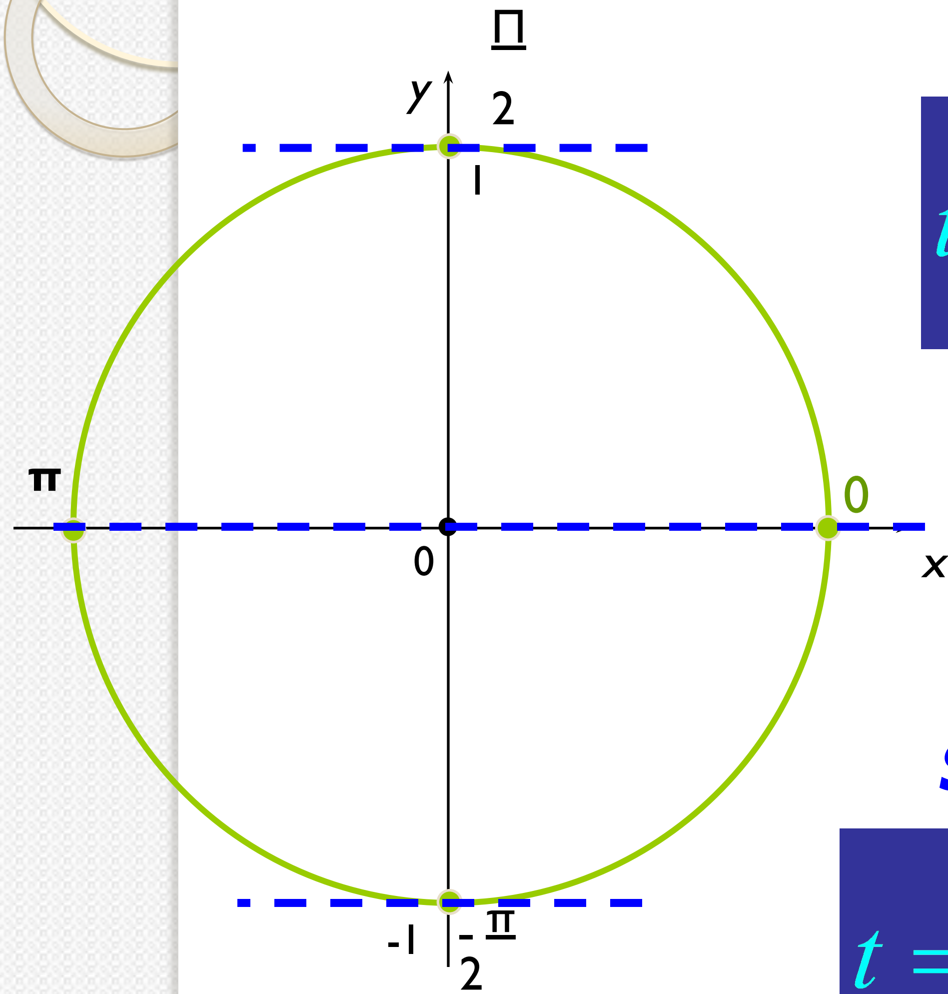
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.

5. Полученные точки – решение уравнения ***sint = a.***

6. Записать **общее решение уравнения.**

$$t = \left[\begin{array}{ll} t_1 + 2\pi n, & n \in Z \\ \pi - t_1 + 2\pi n, & n \in Z \end{array}\right.$$

# Частные случаи уравнения sint = a




**sint = 1**

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

**sint = 0**

$$t = \pi n, \quad n \in Z$$

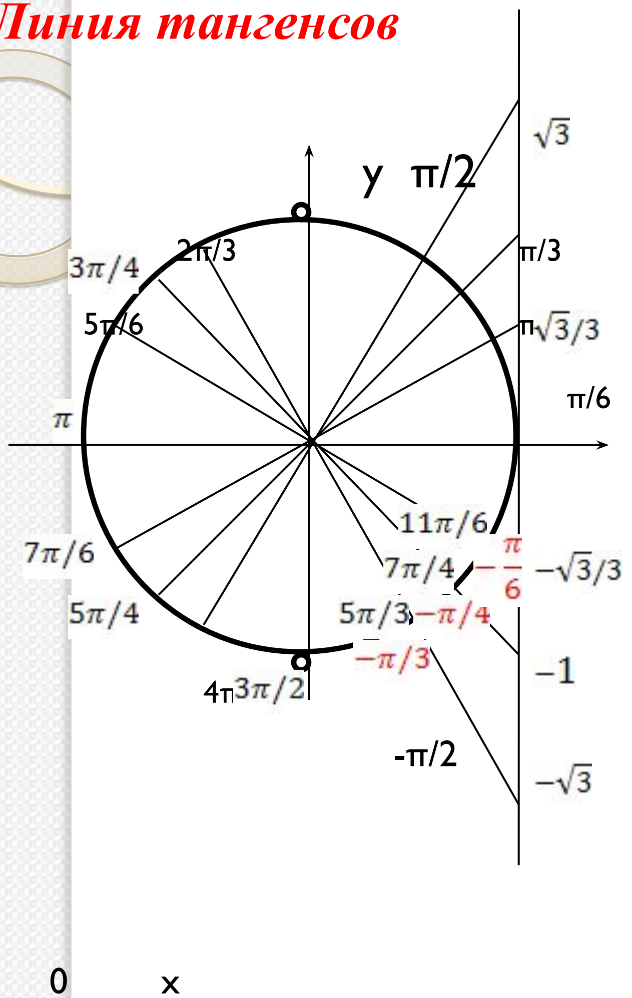
**sint = -1**

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

# Повторим значения тангенса и котангенса

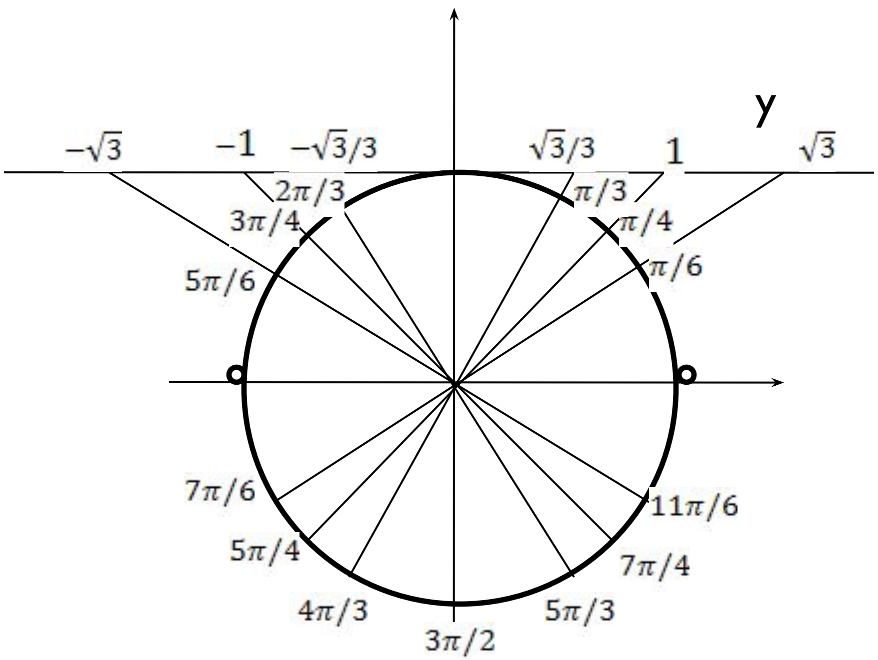
*Линия тангенсов*

tg t ЄR , но t ‡ $\pi/2$ + π k, kЄZ




ctg t ЄR, но t ‡ 0 + πk, kЄZ

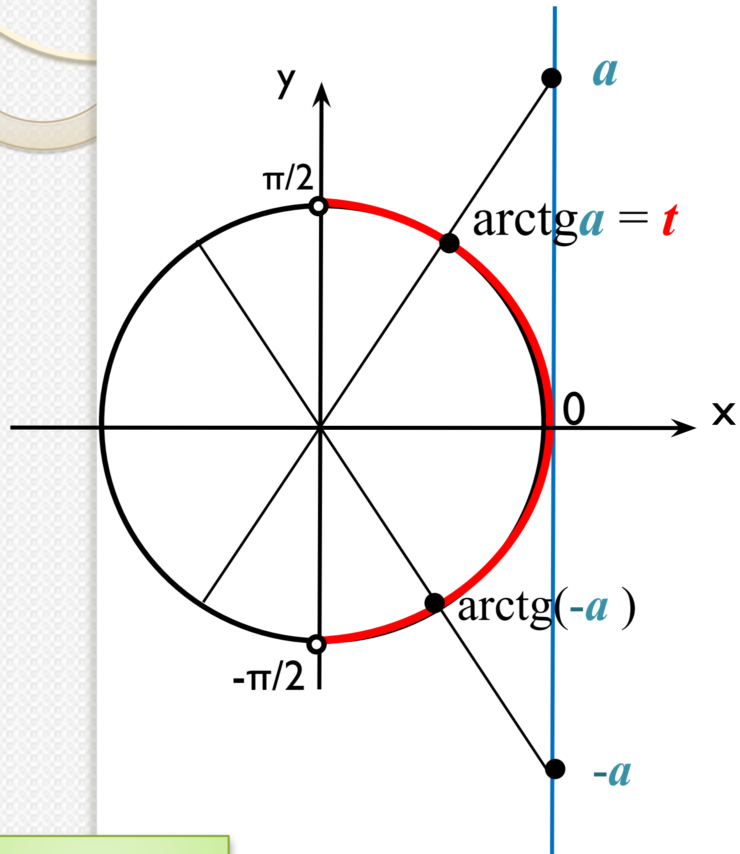
**Линия котангенсов**



# Арктангенс

Арктангенсом числа *a* называется такое число (угол) *t* из (-π/2;π/2), что $tg\ t = a$.

Причём, $a \in R$.



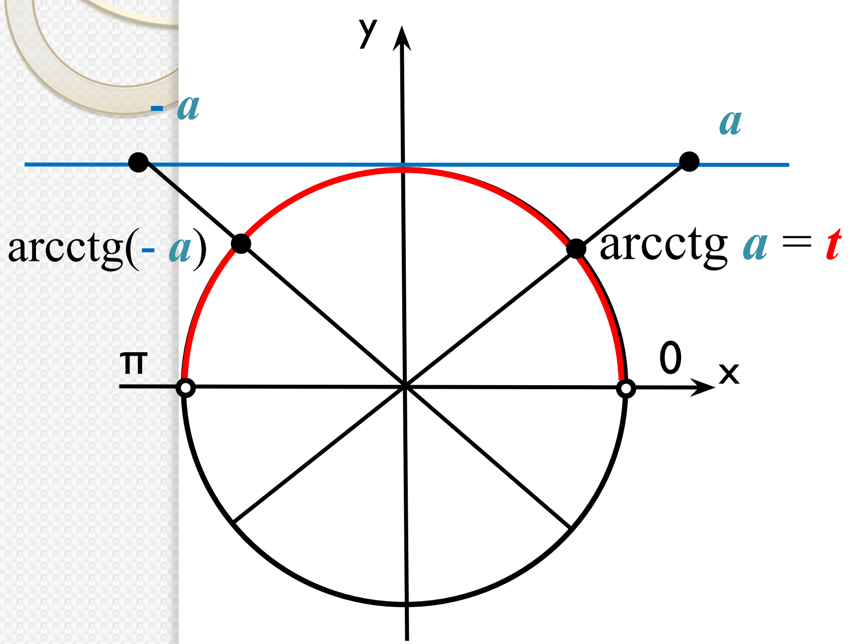

$\arctg(-a) = -\arctg a$

Примеры:

1) arctg√3/3 = π/6

2) arctg(-1) = -π/4

# Арккотангенс




Арккотангенсом числа *a* называется такое число (угол) **t** из (0;π), что ctg *t* = *a*. Причём, *a* ЄR .

arcctg(- *a*) = π – arcctg *a*

Примеры:

1) arcctg(-1) = 3π/4

2) arcctg√3 = π/6

# Формулы корней простых тригонометрических уравнений

**1.cost = *a* ,** где |***a***| ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = arccos\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -arccos\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

**или**

$$t = \pm arccos\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1)<u>cost=0</u>
t = π/2+πk, kЄZ

2)<u>cost=1</u>
t = 0+2πk, kЄZ

3)<u>cost = -1</u>
t = π+2πk, kЄZ

**2.sint = *a*, *где* | *a* |≤ 1**

$$\left[\begin{array}{l} t = arcsin\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - arcsin\boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

**или**

$$t = (-1)^k arcsin\boldsymbol{a} + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1)<u>sint=0</u>
t = 0+πk, kЄZ

2)<u>sint=1</u>
t = π/2+2πk, kЄZ

3)<u>sint = - 1</u>
t = - π/2+2πk, kЄZ

**3. tgt = *a*, *a*ЄR**

t = arctg ***a*** + πk, kЄZ

**4. ctgt = *a*, *a*ЄR**

t = arcctg ***a*** + πk, kЄZ

# Методы решения простейших тригонометрических уравнений

**Простейшие тригонометрические уравнения**

***Sin t=a;***
***Cos t=a*;**
где ***t=f(x)***

**Введение новой переменной**

**Разложение на множители**

$6sin^2x + sinx = 2;$

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$

$2cosx - 3sinxcosx = 0$

# Решение простейших уравнений

**1) cost= - ½;**

**t= ±arccos(-1/2)+2πk, kЄZ**
**t= ±2π/3+2πk, kЄZ**

**2) sint = 0;**

**Частный случай:**
**t = 0+πk, kЄZ**

**3) tgt = 1;**

**t = arctg1+πk, kЄZ**
**t = π/4+πk, kЄZ.**

**4) ctgt =** $-\sqrt{3}$

**t = arcctg(**$-\sqrt{3}$**)+πk, kЄZ**
**t = 5π/6+πk, kЄZ.**

# Решение простейших уравнений

**1) $tg2x = -1$**

**$2x = arctg\ (-1) + \pi k,\ k \in Z$**
**$2x = -\pi/4 + \pi k,\ k \in Z$**
**$x = -\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$**

**Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$.**

**2) $\cos(x+\pi/3) = ½$**

**$x+\pi/3 = \pm\arccos 1/2 + 2\pi k,\ k \in Z$**
**$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$**
**$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$**

**Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$**

**3) $\sin(\pi – x/3) = 0$**
**упростим по формулам приведения**
**$\sin(x/3) = 0$**
**частный случай**
**$x/3 = \pi k,\ k \in Z$**
**$x = 3\pi k,\ k \in Z$.**
**Ответ: $3\pi k,\ k \in Z$.**

# Другие тригонометрические уравнения

## 1.Сводимые к квадратным

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда

$a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

## 2.Однородные

1)Первой степени:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получим: простое уравнение

$$a \cdot \mathrm{tg} x + b = 0 \text{ или } \mathrm{tg} x = m$$

2)Второй степени:

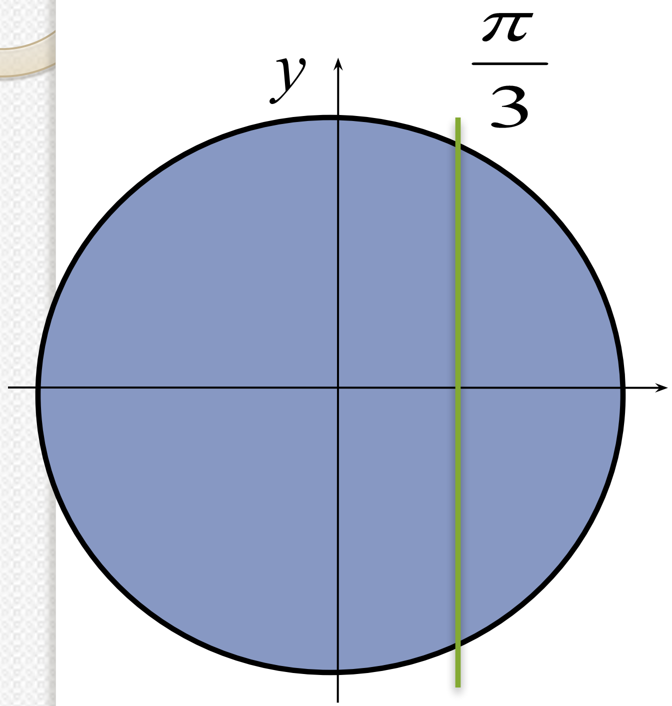
$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$.

Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \mathrm{tg}^2 x + b \cdot \mathrm{tg} x + c = 0.$$

# Найти наименьший положительный корень

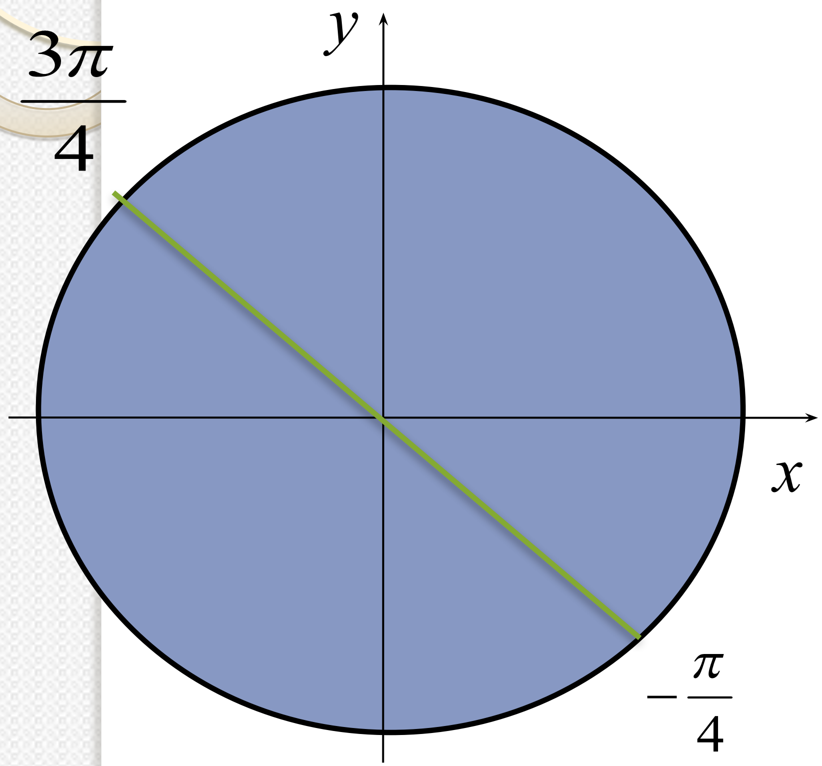



$$\cos\frac{\pi x}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{3}$$

$$x=1$$

# Найти наименьший положительный корень

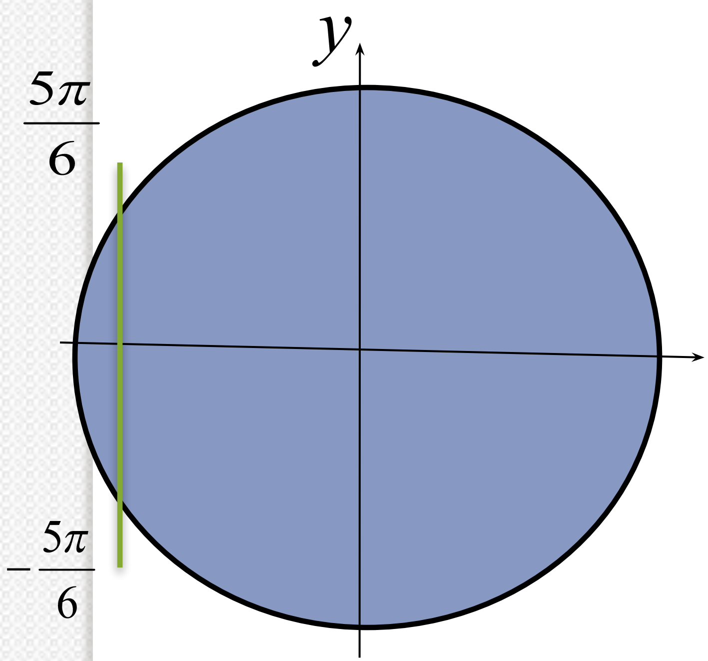



$$tg\frac{\pi x}{12} = -1$$

$$\frac{\pi x}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 9$$

Найти наибольший отрицательный корень

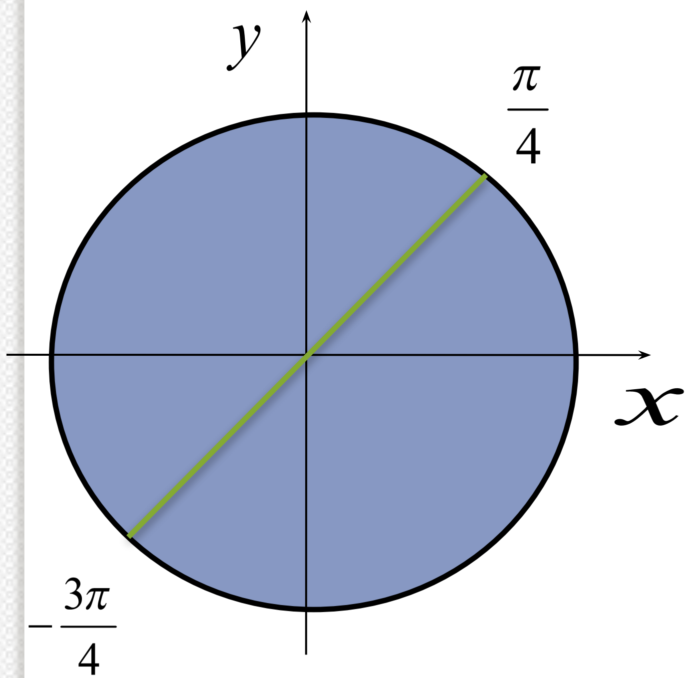



$$\cos\frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi x}{3} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$x = -2{,}5$$

# Найти наибольший отрицательный корень



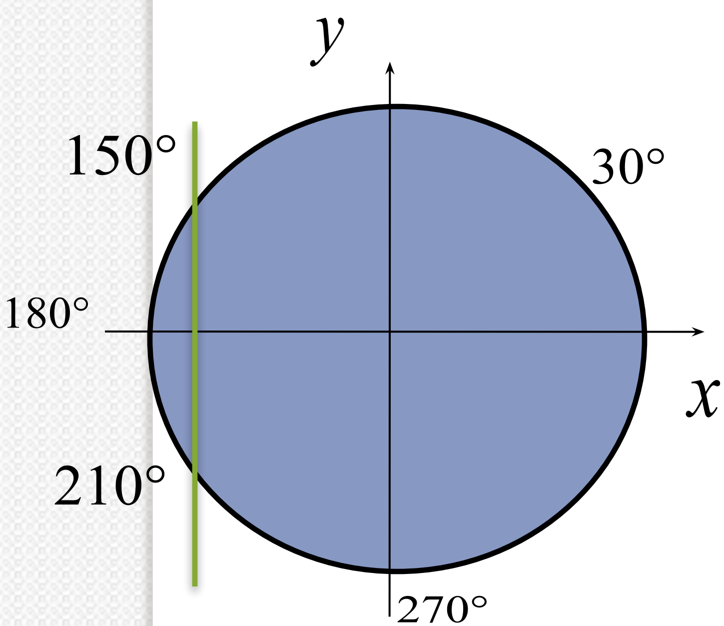

$$tg\frac{\pi x}{10} = 1$$

$$\frac{\pi x}{10} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$x = -7{,}5$$

$$2\cos x = -\sqrt{3}$$

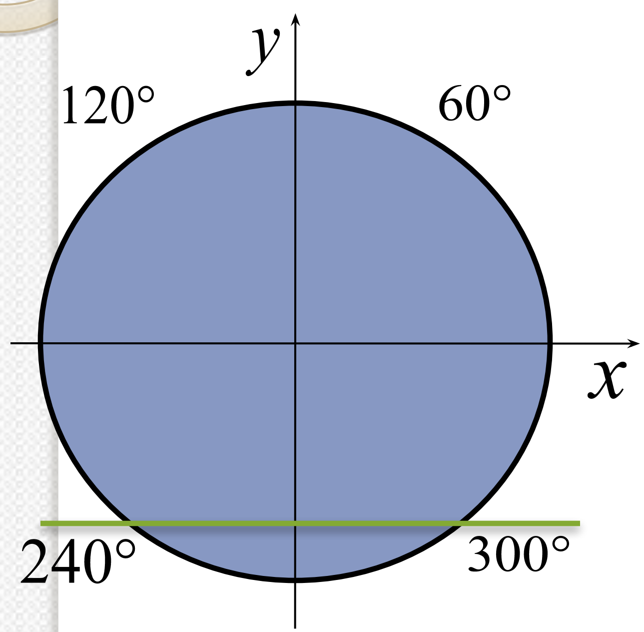
$$[180;270]$$




$$210°$$

Найти наименьший положительный корень

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

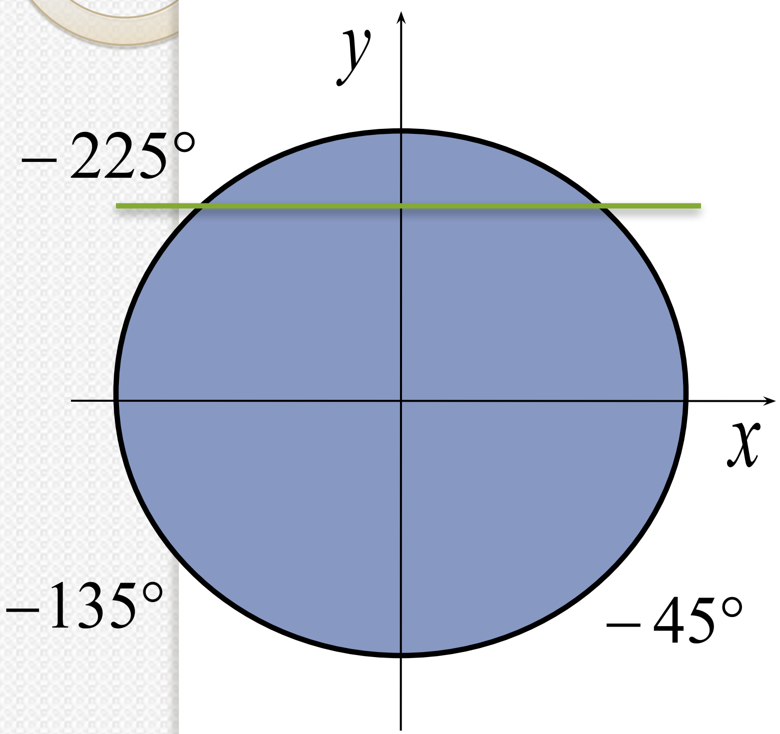



$$2x = 240$$

$$x = 120$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

Наибольшее отрицательное (в градусах)




$$3x = -225$$

$$x = -75$$

**<u>Памятка по решению простейших тригонометрических уравнений!</u>**

I. При решении уравнения вида $\sin t = -1$, $\sin t = 1$, $\sin t = 0$ или $\cos t = -1$, $\cos t = 1$, $\cos t = 0$ используем формулы для <u>частного</u> решения

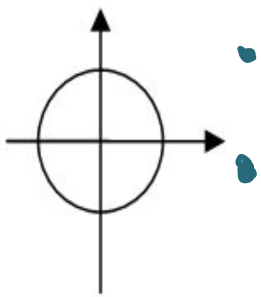
Для этого надо:

1. Записать уравнение.
2. Справа от него <u>построить</u> окружность и <u>отметить</u> точку (две точки) соответствующую решению уравнения.
3. Записать решение уравнения! Если отмечена одна точка, то прибавляем $2\pi k$, если две – то $\pi k$.

**Образец:**

$\cos t = 0$

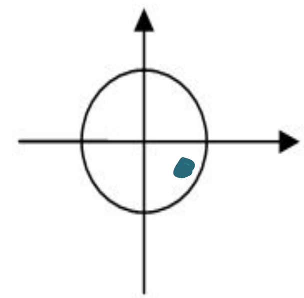
$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$



Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$\sin t = -1$

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$



Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

II. При решении уравнения вида $\sin t = a$ и $\cos t = a$, где $a \in [-1;1]$, <u>причем</u> $a \neq \pm 1;0$, применяем формулы для <u>общего</u> решения:

$\sin t = a$

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

$\cos t = a$

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

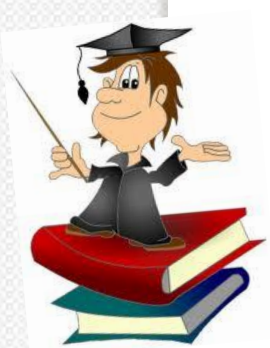
# Самостоятельная работа

**I вариант (БУ)** | **II вариант (ПУ)**

**Решите уравнения:**

| I вариант (БУ) | II вариант (ПУ) |
|---|---|
| 1. $cos3x+4=0$ | 1. $2sin2x-1=0$ |
| 2. $sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ | 2. $2cos^2x+5cos(x+\pi)+2=0$ |
| 3. $4cos^2x-4cosx+1=0$ | 3. $cos^2x-sin^25-cos^25=0$ |

**В ответе запишите букву (код ответа) соответствующую ответу вашего решения.**



| | a=1 | a=0 | a= -1 | $\lvert a\rvert<1$, $a\neq 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $sint=a$ | $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ | $t=\pi k$ | $t=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ | $t=(-1)^k arcsina+\pi k$ |
| $cost=a$ | $t=2\pi k$ | $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$ | $t=\pi+2\pi k$ | $t=\pm arccosa+2\pi k$ |

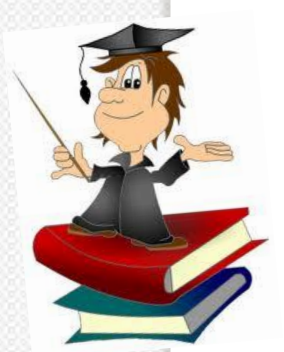
# Самостоятельная работа

**I вариант (БУ)** | **II вариант (ПУ)**

**Решите уравнения:**

| I вариант (БУ) | II вариант (ПУ) |
|---|---|
| 1. $cos3x + 4 = 0$ | 1. $2sin2x - 1 = 0$ |
| 2. $sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ | 2. $2cos^2x + 5cos(x + \pi) + 2 = 0$ |
| 3. $4cos^2x - 4cosx + 1 = 0$ | 3. $cos^2x - sin^2 5 - cos^2 5 = 0$ |

**В ответе запишите букву (код ответа) соответствующую ответу вашего решения.**




Ответы:

# I вариант:

# УРА

# II вариант: