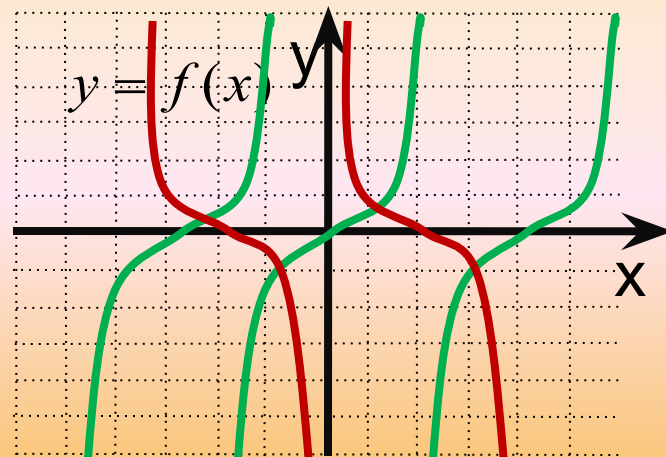
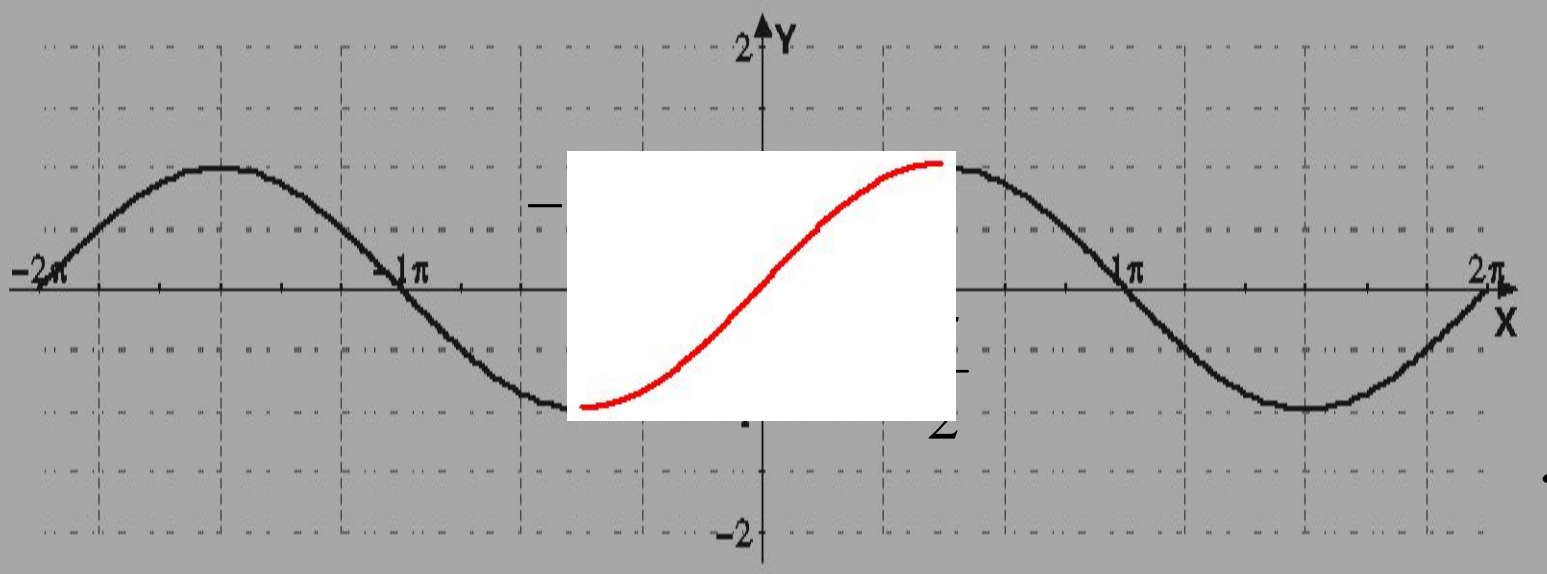




**Обратные функции.
Свойства взаимно
обратных функций.**

Основные вопросы:

1. Функция $y = \arcsin x$, её свойства и график.
2. Функция $y = \arccos x$, её свойства и график.
3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$, её свойства и график.
4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$, её свойства и график.



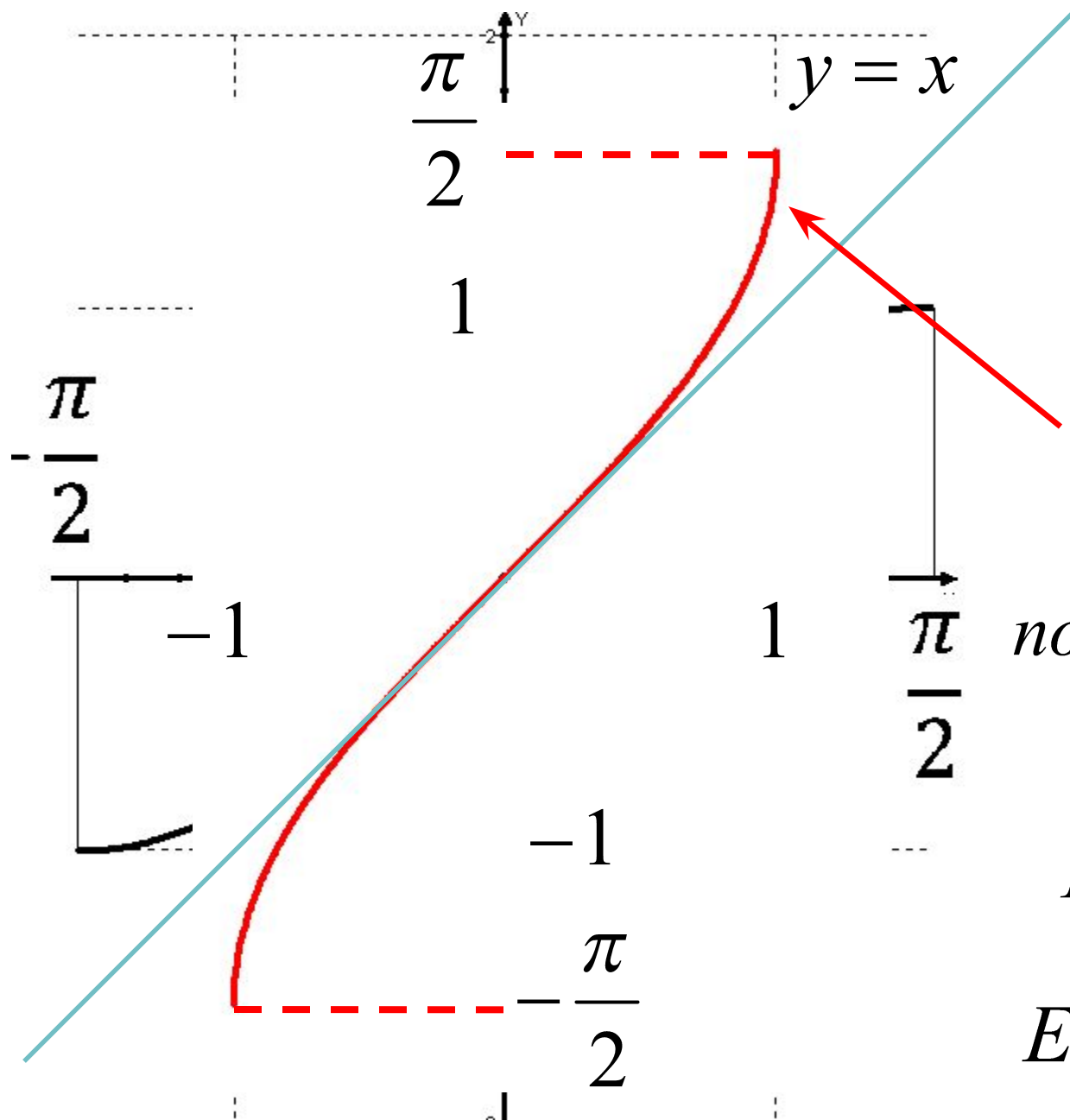
$$y = \sin x$$

$$D(y) = (-\infty; \infty), \quad E(y) = [-1; 1].$$

Рассмотрим функцию $y = \sin x$,

если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$

тогда функция возрастает,
значит существует ей обратная.



$$y = \sin x$$

Выразим x

$$x = \arcsin y$$

переобозначим

x и y .

получим функцию

$$y = \arcsin x$$

$$D(y) = [-1; 1]$$

$$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

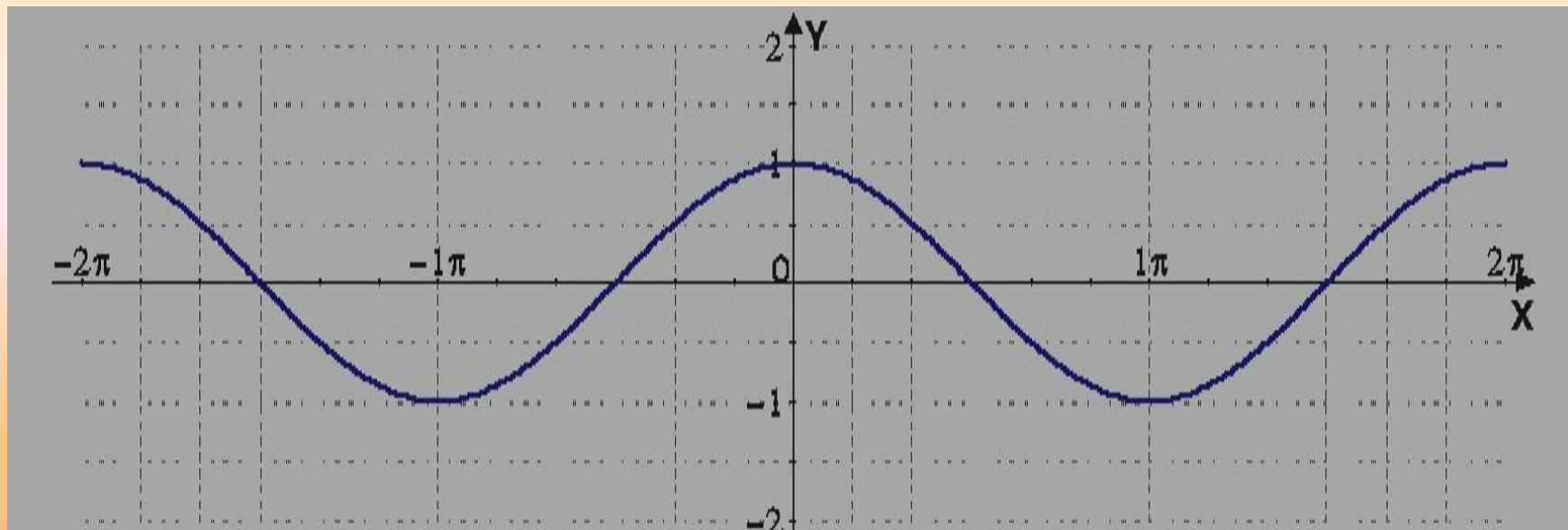
Функция, обратная функции *sin*

x

- **Арксинусом** числа *a* называется число *b* из $[-\pi/2; \pi/2]$ такое, что $\sin b = a$.

Обозначение: **$\arcsin b = a$** .

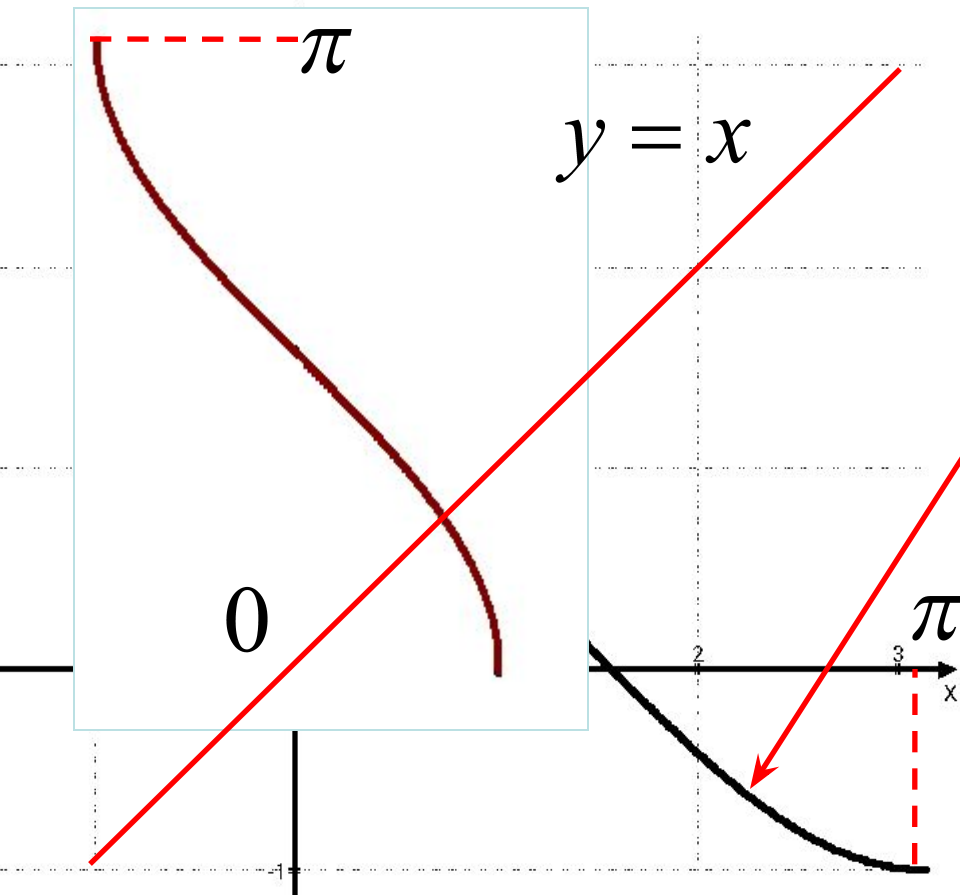
- $D(\arcsin x) = [-1; 1]$
- $E(\arcsin x) = [-\pi/2; \pi/2]$
- Функция $y = \arcsin x$ **нечетная** $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- Функция $y = \arcsin x$ непрерывная на $[-1; 1]$
- Функция $y = \arcsin x$ **возрастает** на области определения
- График функции $y = \arcsin x$ **симметричен** части графика $y = \sin x$ при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ относительно прямой $y = x$



$$y = \cos x$$

$$D(y) = (-\infty; \infty)$$

$$E(y) = [-1; 1]$$

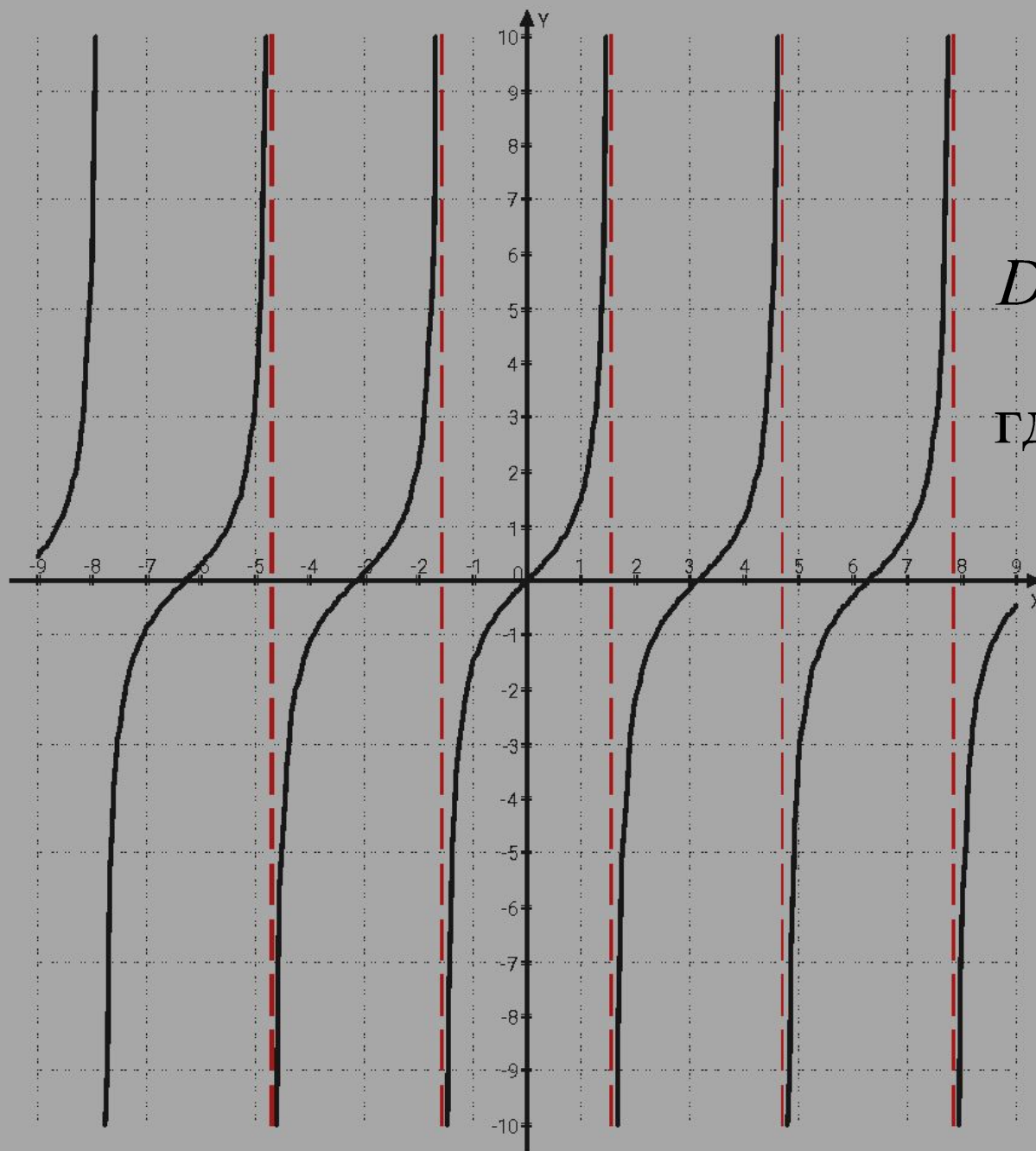


*Выберем промежуток,
на котором функция
 $y = \cos x$ монотонна.*

*Рассмотрим
 $y = \cos x$
на промежутке $[0; \pi]$
 $E(y) = [-1; 1]$
Выразим x
 $x = \arccos y$
переобозначим x и y .
 $y = \arccos x$
 $D(y) = [-1; 1]$
 $E(y) = [0; \pi]$*

Функция, обратная функции $\cos$

- **Арккосинусом** числа a называется число b из $[-1; 1]$ такое, что $\cos b = a$
- Обозначение: $\arccos b = a$
- $D(\arccos x) = [-1; 1]$
- $E(\arccos x) = [0; \pi]$
- Функция $y = \arccos x$ не является четной и нечетной
 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
- Функция $y = \arccos x$ непрерывная на $[-1; 1]$
- Функция $y = \arccos x$ убывает на области определения
- График функции $y = \arccos x$ симметричен части графика $y = \cos x$ при $x \in [0; \pi]$ относительно прямой $y = x$



$$y = \operatorname{tg} x$$

$$D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

где n - целое.

$$E(y) = R.$$

Выберем промежуток,

$$y = x$$

на котором функция

$y = \operatorname{tg} x$ ~~монотонна.~~

это промежуток

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Выразим x

$$x = \operatorname{arctg} y$$

переобозначим x и y .

$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$D(y) = (-\infty; +\infty), \quad E(y) : |y| < \frac{\pi}{2}$$



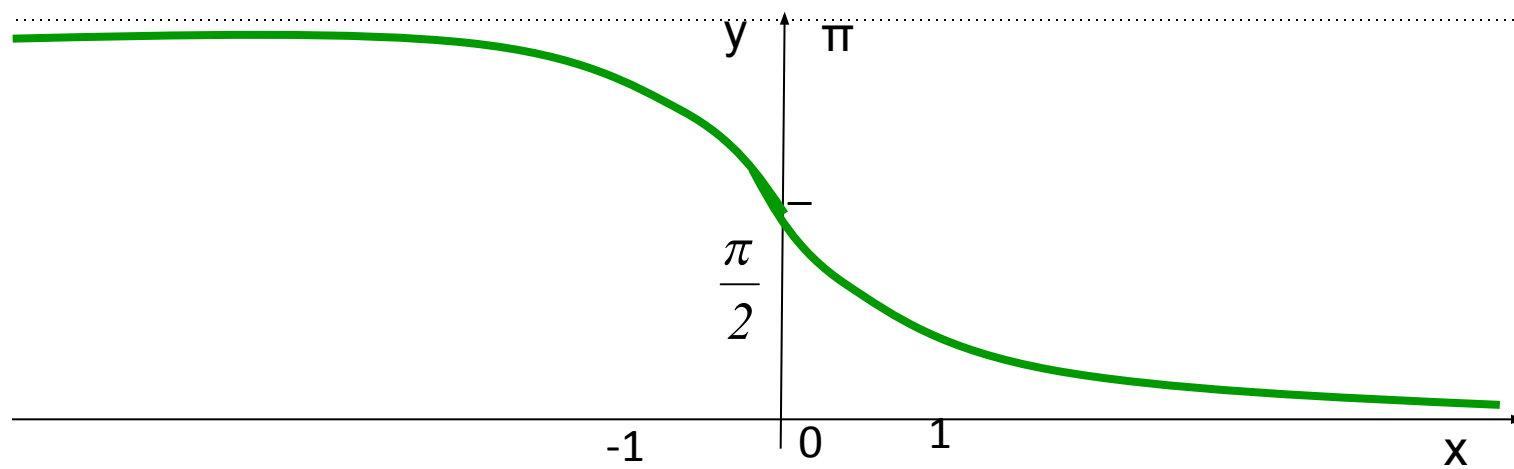
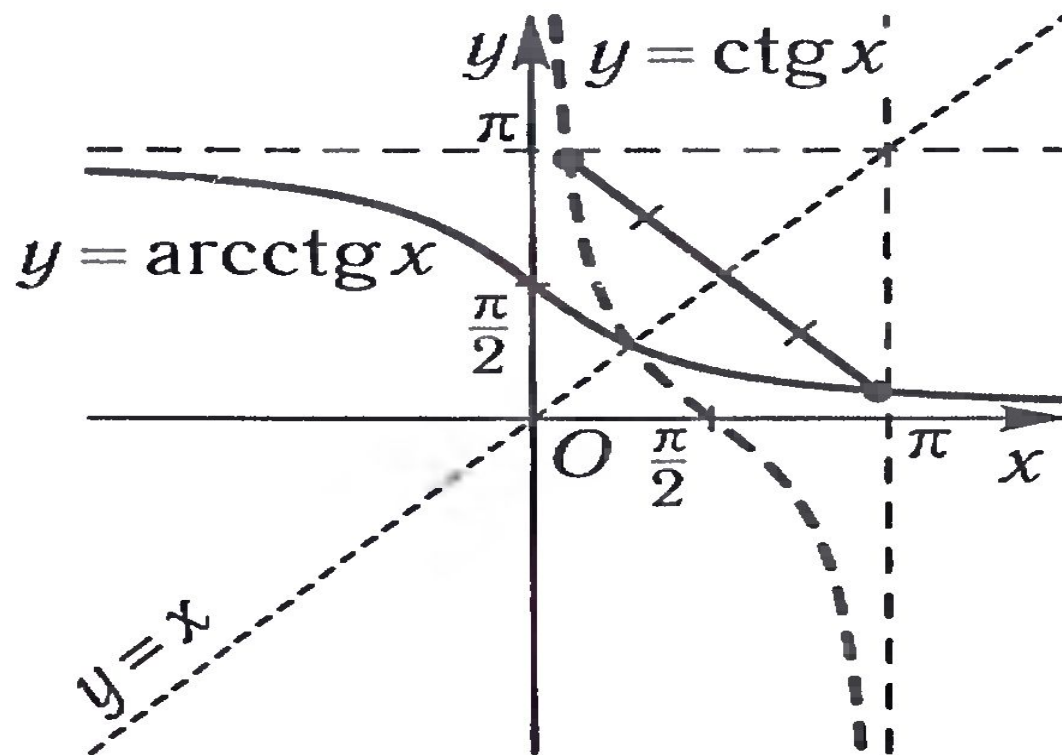
Функция, обратная функции

$\text{tg } x$

- **Арктангенсом** числа a называется число b из $(-\pi/2; \pi/2)$ такое, что $\text{tg } b = a$

Обозначение: $\text{arctg } b = a$.

- $D(\text{arctg } x) = \mathbb{R}$
- $E(\text{arctg } x) = (-\pi/2; \pi/2)$
- Функция $y = \text{arctg } x$ **нечетная** $\text{arctg } (-x) = -\text{arctg } x$
- Функция $y = \text{arctg } x$ **возрастает** на области определения
- График функции $y = \text{arctg } x$ **симметричен** части графика $y = \text{tg } x$ при $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ относительно прямой $y = x$



Функция, обратная функции *ctg*

- **Арккотангенсом** числа a называется число b из $(0; \pi)$ такое, что $\text{ctg } b = a$

Обозначение: $\text{arcctg } b = a$.

- $D(\text{arcctg } x) = \mathbb{R}$
- $E(\text{arcctg } x) = (0; \pi)$
- Функция $y = \text{arcctg } x$ не является четной и нечетной $\text{arcctg } (-x) = \pi - \text{arcctg } x$
- Функция $y = \text{arcctg } x$ убывает на области определения
- График функции $y = \text{arcctg } x$ симметричен части графика $y = \text{ctg } x$ при $x \in (0; \pi)$ относительно прямой $y = x$

Вычислим: а) $\arcsin\left(\sin\frac{31\pi}{6}\right)$;

■ а) Равенство $\arcsin(\sin x) = x$ верно только для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому, чтобы воспользоваться данной формулой, сначала приведем аргумент в промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, вычитая или прибавляя целое число, кратное 2π :

$$\arcsin\left(\sin\frac{31\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{31\pi}{6} - 4\pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

а затем, воспользовавшись формулой $\sin(\pi - x) = \sin x$, «загоним» аргумент в нужный промежуток. Итак, получаем

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6},$$

так как $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вычислим: б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)\right)$.

б) Действуем аналогично, только сначала будем приводить аргумент в промежуток $[0; \pi]$:

$$\begin{aligned}\arccos\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)\right) &= \arccos\left(\cos\left(-\frac{25\pi}{3} + 8\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3},\end{aligned}$$

так как $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$. 

Задача 1 Сравнить числа:

1) $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\arcsin \frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{3} \right)$ и $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right)$.

► 1) Так как $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ и функция $y = \arcsin x$ возраста-

ет, то $\arcsin \frac{1}{3} > \arcsin \frac{1}{4}$.

2) Так как $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрас-

тает, то $\operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{3} \right) < \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right)$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\arccos(2x + 1) = \frac{3\pi}{4}$.

- Так как $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$, то по определению арккосинуса числа данное уравнение равносильно уравнению $2x + 1 = \cos \frac{3\pi}{4}$, откуда $2x + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. ◁

Задача 3 Найти область определения функции

$$y = \arcsin \frac{x-1}{3}.$$

► Так как функция $y = \arcsin x$ определена при $-1 \leq x \leq 1$, то функция $y = \arcsin \frac{x-1}{3}$ определена для тех значений x , для которых выполняются неравенства $-1 \leq \frac{x-1}{3} \leq 1$. Отсюда

$$-3 \leq x - 1 \leq 3, \quad -2 \leq x \leq 4. \quad \triangleleft$$

Преобразование выражений

Вычислить :

$$1) 24\sqrt{3}\operatorname{tg}(\arcsin 0,5); \quad 2) 4\sqrt{2}\cos(\operatorname{arccotg}1);$$

$$3) 12\sqrt{7}\operatorname{ctg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right).$$

Решение :

$$1) 24\sqrt{3}\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 24\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 24.$$

$$2) 4\sqrt{2}\cos \frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$

$$3) \sin \alpha = -\frac{3}{4}, \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$12\sqrt{7}\operatorname{ctg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = -12\sqrt{7}\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right) =$$

$$= -12\sqrt{7} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = 28.$$

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1. Решить уравнение $\arccos(2x + 1) = \frac{3\pi}{4}$.

Так как $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$, то по определению арккосинуса
числа данное уравнение равносильно уравнению

$$2x + 1 = \cos \frac{3\pi}{4}, \text{ откуда } 2x + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

2. Решить уравнение $2(\arcsin x)^2 - 5 \arcsin x + 2 = 0$.

Пусть $\arcsin x = t$, причем $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда

$$2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}, \text{ но } 2 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arcsin x = \frac{1}{2}, x = \sin \frac{1}{2}.$$

Домашнее
задание:

- 1) $\arcsin 1 + \arccos 1 + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1$;
- 2) $\arcsin 0 + \arcsin 1 + \arcsin (-1)$;
- 3) $\arccos 0 + \arccos 1 + \arccos (-1)$;
- 4) $\operatorname{arctg} (-1) + \operatorname{arcctg} (-1)$;
- 5) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} 0$;
- 6) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg} 0$;
- 7) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arcctg} 1$;
- 8) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

$$1) \sin \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right);$$

$$2) \operatorname{ctg} \left(\arccos 1 + 2\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right);$$

$$3) \cos \left(2\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right);$$

$$4) \sin^2 \left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \arccos \frac{1}{2} \right).$$