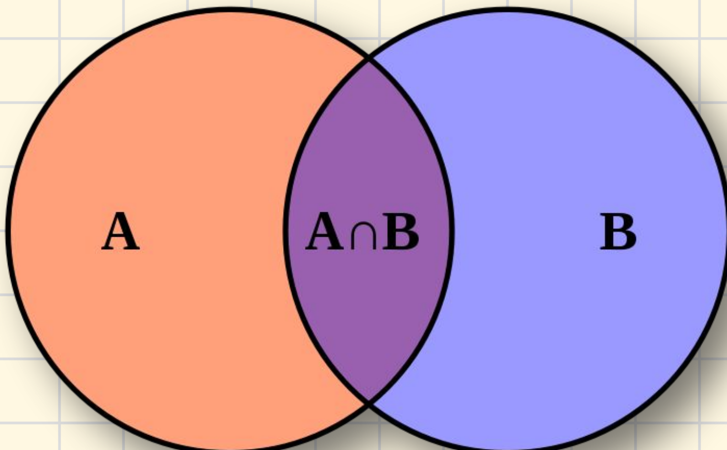
Урюпинский филиал

ГБПОУ “Волгоградский медицинский колледж”

Элементы и множества. Операции над множествами и их свойств.



ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ:

- ***Понятие множества***
- ***Способы задания множества***
- ***Отношения между множествами***
- ***Операции над множествами***

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое»

основатель теории множеств – **Георг Кантор**

(1845—1918) — немецкий математик, логик, теолог, создатель теории бесконечных множеств, оказавшей определяющее влияние на развитие математических наук на рубеже 19— 20 вв.

Понятия теории множеств

Понятие *множества* является одним из наиболее общих и наиболее важных математических понятий. Оно было введено в математику немецким ученым Георгом Кантором (1845-1918).Следуя Кантору, понятие "множество" можно определить так:

- ✔ ***Множество - совокупность объектов, обладающих определенным свойством, объединенных в единое целое.***

- С понятием ***множества*** мы соприкасаемся прежде всего тогда, когда по какой-либо причине ***объединяем по некоторому признаку*** в одну группу какие-то объекты и далее рассматриваем эту группу или совокупность как единое целое.
- ***Множества принято обозначать заглавными латинскими буквами:*** A, B, C, D .
- ***Объекты***, которые образуют множество, называют ***элементами множества*** и для обозначения элементов используют, как правило, ***малые буквы латинского алфавита***.

Примеры множеств:

- множество учащихся в данной аудитории;
- множество людей, живущих на нашей планете в данный момент времени;
- множество точек данной геометрической фигуры; множество чётных чисел;
- множество корней уравнения x2-5x+6=0;
- множество действительных корней уравнения x2+9=0;

Дни недели

понедельник

вторник

среда

пятница

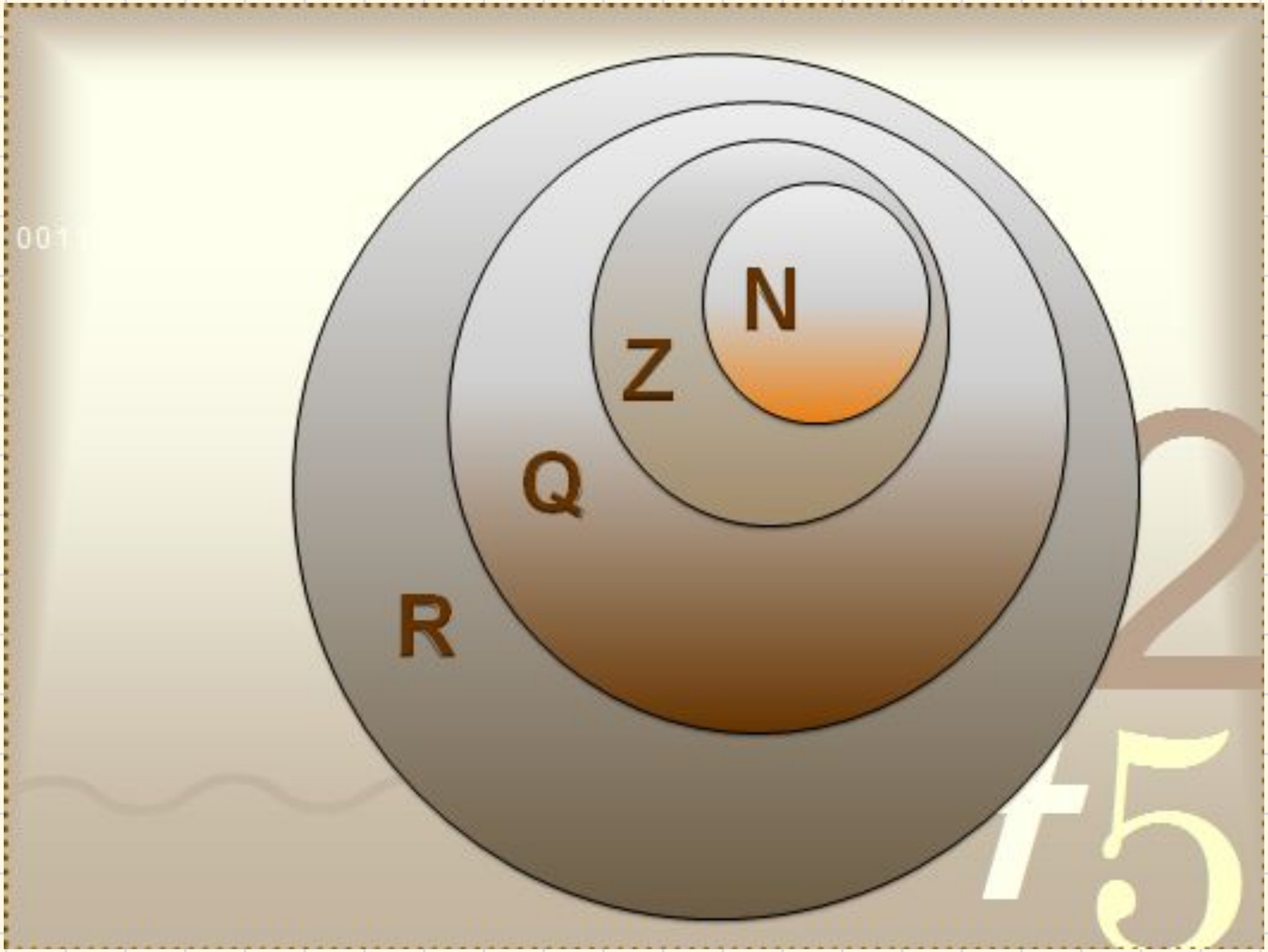
суббота

Музыкальные инструменты

- Если элемент х принадлежит множеству Х, то записывают **х** $\in$ **Х** ($\in$ — принадлежит).
- В противном случае, если ***a*** не принадлежит множеству А, будем использовать обозначение $\notin$: $a \notin A$
- Если множество **А** является частью множества **В**, то записывают **А** $\subset$ **В** ($\subset$ — содержится).

множество	элемент
Множество четырехугольников	Трапеция, параллелограмм, ромб, квадрат, прямоугольник
Пространственные тела	Шар, прямоугольный параллелепипед, призма, пирамида, октаэдр
Натуральные числа	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11…
Квадраты чисел	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ..
Цифры десятичной системы счисления	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двузначные четные числа	10, 12, 14, 16 … 96, 98

- Множества, элементами которых являются числа, называются ***<u>числовыми множествами</u>***.



Обозначения некоторых числовых множеств:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

I - множество иррациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Способы задания множеств

1. Множество может быть задано ***<u>перечислением всех его элементов</u>*** или ***<u>списком</u>***. В этом случае элементы множества записывают внутри фигурных скобок, например: **А={студент А., рабочий Л., школьник М.}**.

2. Множество может быть задано ***<u>описанием свойств его элементов</u>***. Чаще всего при этом используют запись, которую читают следующим образом: «**А есть множество элементов b таких, что для них выполняется свойство В**». Например, **а – четное натуральное число**.

3. Множество может быть задано указанием ***<u>характеристического свойства</u>*** его элементов , то есть такого свойства, *которым обладают все элементы данного множества, и только они*:

$$A = \{x \mid x \in M, \; P(x)\}$$

Здесь x ∈ M означает, что элемент x является элементом известного множества .

Запись P(x) означает, что элемент x обладает свойством P. Свойство P(x) формулируется словами, символами или выражается с помощью уравнения или неравенства.

Примеры

1. Множество целых чисел, которые больше –3, но меньше 4, с помощью характеристического свойства записывается так: $A = \{x \mid x \in Z, -3 < x < 4\}$. Элементами множества A являются только целые числа, которые больше (–3) и меньше 4, то есть числа $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Множество A содержит конечное число элементов и поэтому может быть задано также перечислением элементов:

$$A = \{x \mid x \in Z, \ -3 < x < 4\} = \{-2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3\}$$

2. Число 2,5 принадлежит множеству $C = \{c \mid c \in R, -3 < c \le 2{,}6\}$.

Примеры

3. *Множество решений системы неравенств* $\begin{cases} 2x-1\ge 3, \\ 3-x>-1 \end{cases}$ *можно записать в виде* $A=\{x\,|\,x\in R,\ 2x-1\ge 3;\ 3-x>-1\}$. *Здесь* R *- множество действительных чисел. Неравенство* $2x-1\ge 3$ *- первое характеристическое свойство; неравенство* $3-x>-1$ *- второе характеристическое свойство, которым обладают действительные числа* x *множества* A. *Решая систему неравенств, получим:* $\begin{cases} x\ge 2, \\ x<4, \end{cases}$ $2\le x<4$. *Таким образом, множество* A *- бесконечное числовое множество, состоящее из действительных чисел, заключенных между числами 2 и 4, включая число 2. На числовой оси множество* A *задает отрезок* $[2;\ 4)$, *замкнутый снизу и открытый сверху.*

Рисунок 1.1

Виды множеств:

1 – конечные,

2 – бесконечные,

3 – пустые.

Если элементы множества можно сосчитать, то множество является **КОНЕЧНЫМ**

Пример

Множество гласных букв в слове "***математика***" состоит из трёх элементов – это буквы "**а**", "**е**", "**и**", причем, гласная считается только один раз, т.е. элементы множества при перечислении не повторяются.

Если элементы множества сосчитать невозможно, то множество **БЕСКОНЕЧНОЕ**

Пример

- **Множество натуральных чисел бесконечно.**

Пример

- **Множество точек отрезка [0;1] бесконечно.**

Пример

- **Множество атомов во Вселенной**

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **ПУСТЫМ**.

Символически оно обозначается знаком $\varnothing$

Пример

- **Множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$.**

Пример

- **Множество людей, проживающих на Солнце.**

Мощность множества

- Число элементов конечного множества называют ***мощностью*** этого множества и обозначают символом ***m (A)*** или $|A|$.
- Количество элементов в конечном множестве естественно характеризовать их числом.
- В этом смысле множество чисел {-2, 0, 3,8} и множество букв {с, х, ф, а} **эквивалентны**, так как они ***содержат одинаковое число элементов***.

Пример . ***Определите мощность какого из множеств $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ или $B = \{2, 4, 6, 8\}$ больше.***

- *Решение. Понятие мощности конечных множеств позволяет сравнивать их по количеству элементов.*

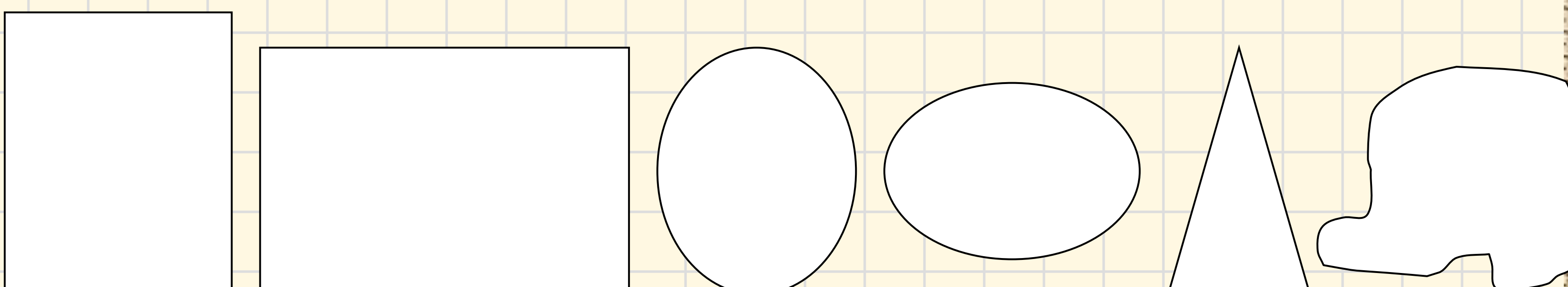
Так, если $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, а

$B = \{2, 4, 6, 8\}$, то $m(A) = 5$, *а* $m(B) = 4$ *и*

потому $m(A) > m(B)$.

Отношения между множествами

- Наглядно отношения между множествами изображают при помощи особых чертежей, называемых **КРУГАМИ ЭЙЛЕРА** (или **диаграммами Эйлера – Венна**).
- Для этого множества, сколько бы они ни содержали элементов, представляют в виде ***кругов*** или ***любых других замкнутых кривых*** (фигур)



- При графическом изображении множеств удобно использовать **диаграммы Венна**, на которых универсальное множество обычно представляют в виде прямоугольника, а остальные множества в ви[де] овалов, заключенных внутри этого прямоугольника

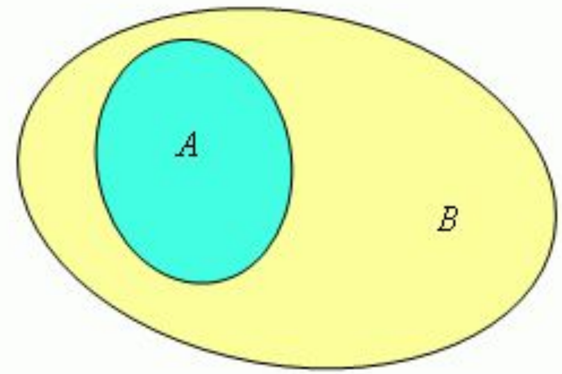


Рис.1

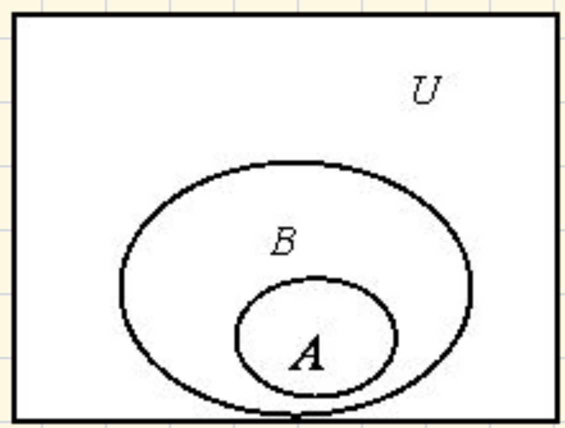


Рис. 1.1

- Множество *A* называется ***подмножеством множества B***, если любой элемент множества *A* принадлежит множеству *B*.
- Эта зависимость между множествами называется ***включением***.
- При этом пишут **A⊂B**, где ⊂ есть знак вложения подмножества.

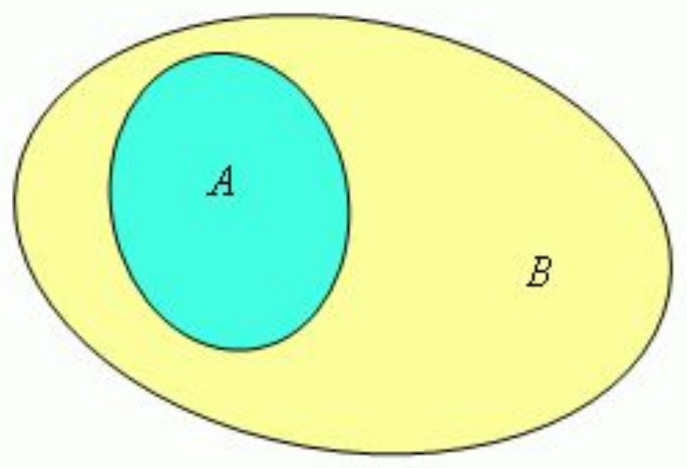


Рис.1

Свойства множеств

- Любое множество является подмножеством самого себя (***рефлексивность***): **A ⊂ B.**
- Для любых множеств A,B,C справедливо свойство ***транзитивности***: если $A \subseteq B$

и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

- Для всякого множества A пустое множество ∅ является его подмножеством: $\varnothing \subset A$

Два множества A и B называются **равными** ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A .

Примеры

1. $A = \{1, 3\}$ *,* $B = \{3, 1\}$*. Множества и состоят из одних и тех же элементов, поэтому они равные:* $\boldsymbol{A = B}$.

2. Множество решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ *есть множество чисел* ***2*** *и* ***3****, то есть* $A = \{2,3\}$.

Множество ***B*** *простых чисел, меньших* ***5****, также состоит из чисел 2 и 3, то есть* $B = \{2,3\}$.

Количество подмножеств

Если мощность множества n, то у этого множества 2^n подмножеств.

A={1,2}

Подмножества A:

{∅}, {1}, {2}, {1,2}.

Количество подмножеств

B={1,3,5}

C={а,и,е,о}

Подмножества В:

{∅}, {1}, {3}, {5}, {1,3}, {1,5}, {5,3}, {1,3,5}

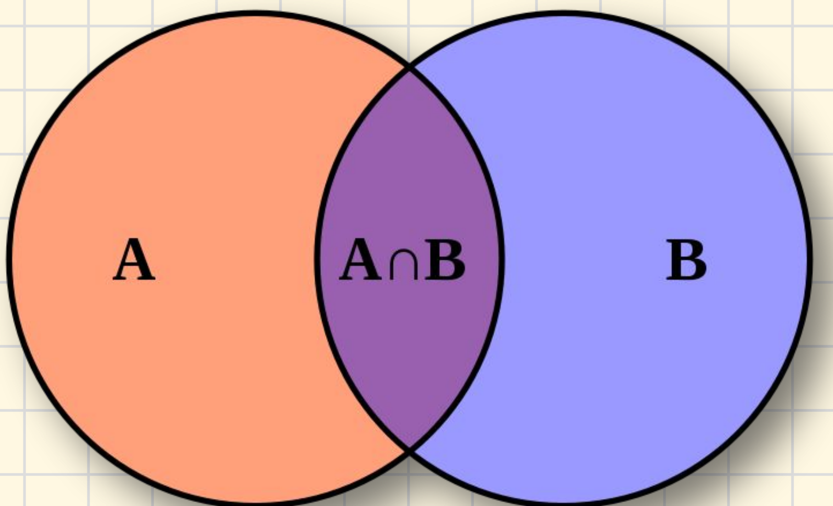
Подмножества С:

{∅}, {а}, {и}, {е}, {о}, {а,и}, {а,е}, {а,о}, {и, е}, {и,о}, {е,о}, {а,и, е}, {а,и,о}, {а,е,о}, {и, е,о}, {а,и,е,о}.

Операции над множествами

- ***Пересечением (произведением)*** множеств A и B называется множество A ∩ B, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

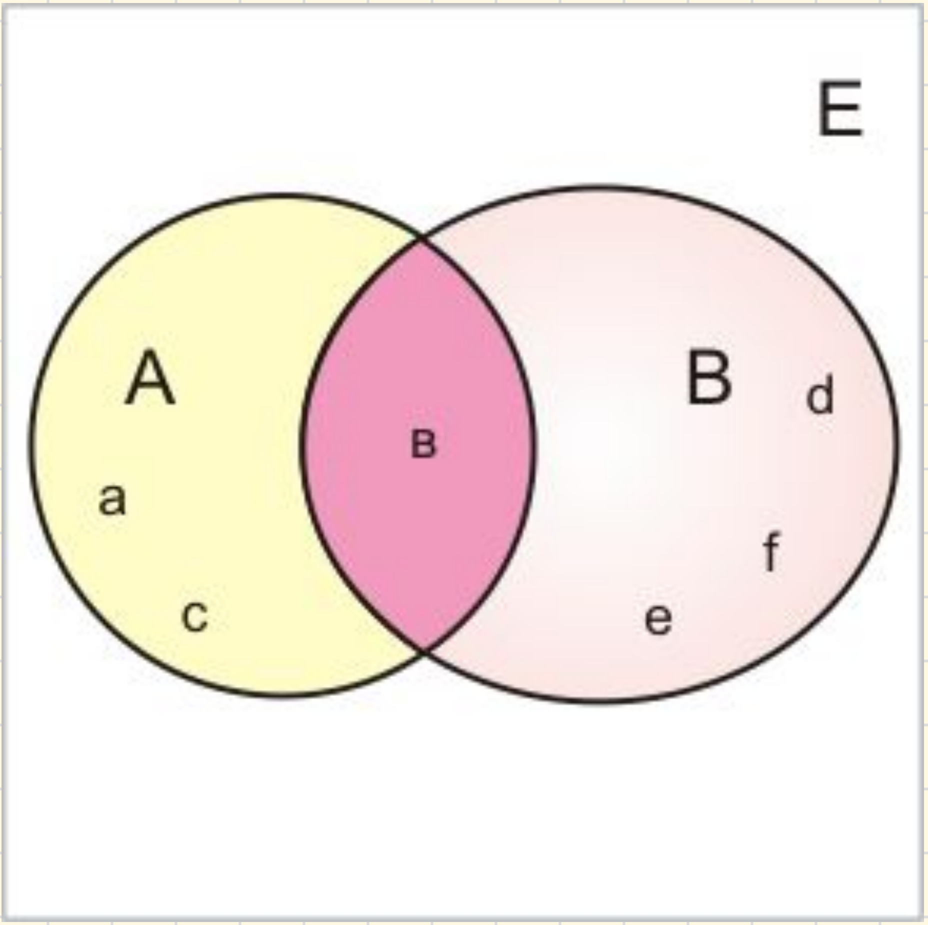
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$



Операции над множествами

пересечение

Например, если A={a,b,c}, B={b,c,f,e},



то A ∩ B = {b}

Операции над множествами

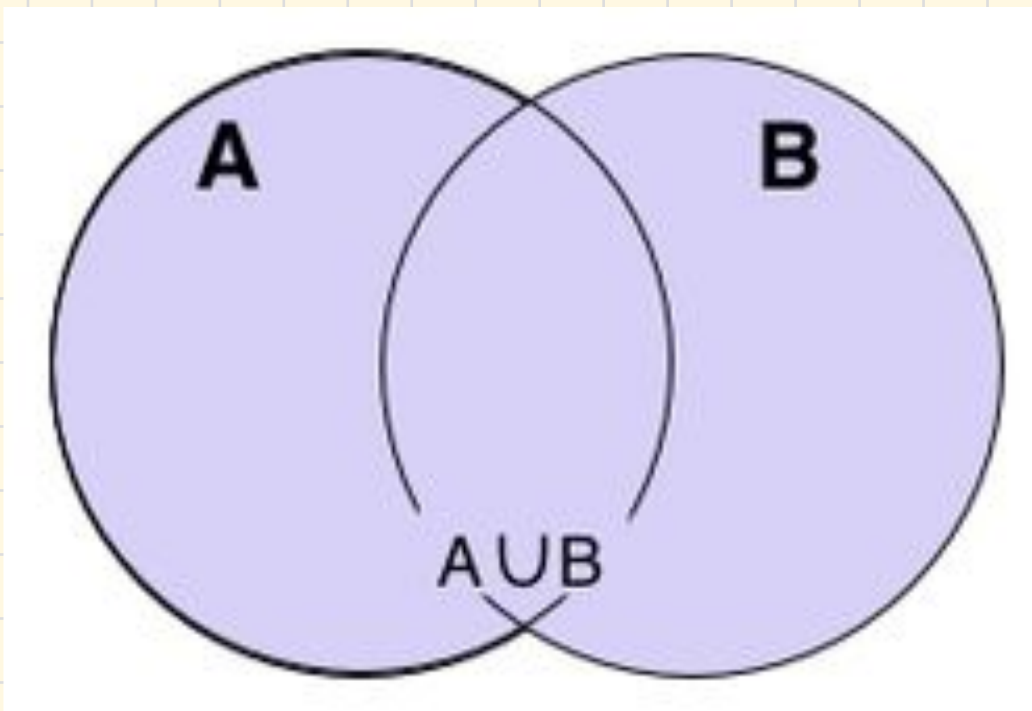
Свойства операции пересечения множеств

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$ - пересечение множества с пустым множеством есть пустое множество 2. $A \cap A = A$ - пересечение множества с самим собой есть само множество	3. $A \cap B = B \cap A$ - операция пересечения множеств коммутативна 4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ - Операция пересечения множеств ассоциативна

Операции над множествами

<u>Объединением</u> (суммой) двух множеств **A** и **B** называется множество **A** ∪ **B**, которое состоит из всех элементов, принадлежащих A **<u>или</u>** B.

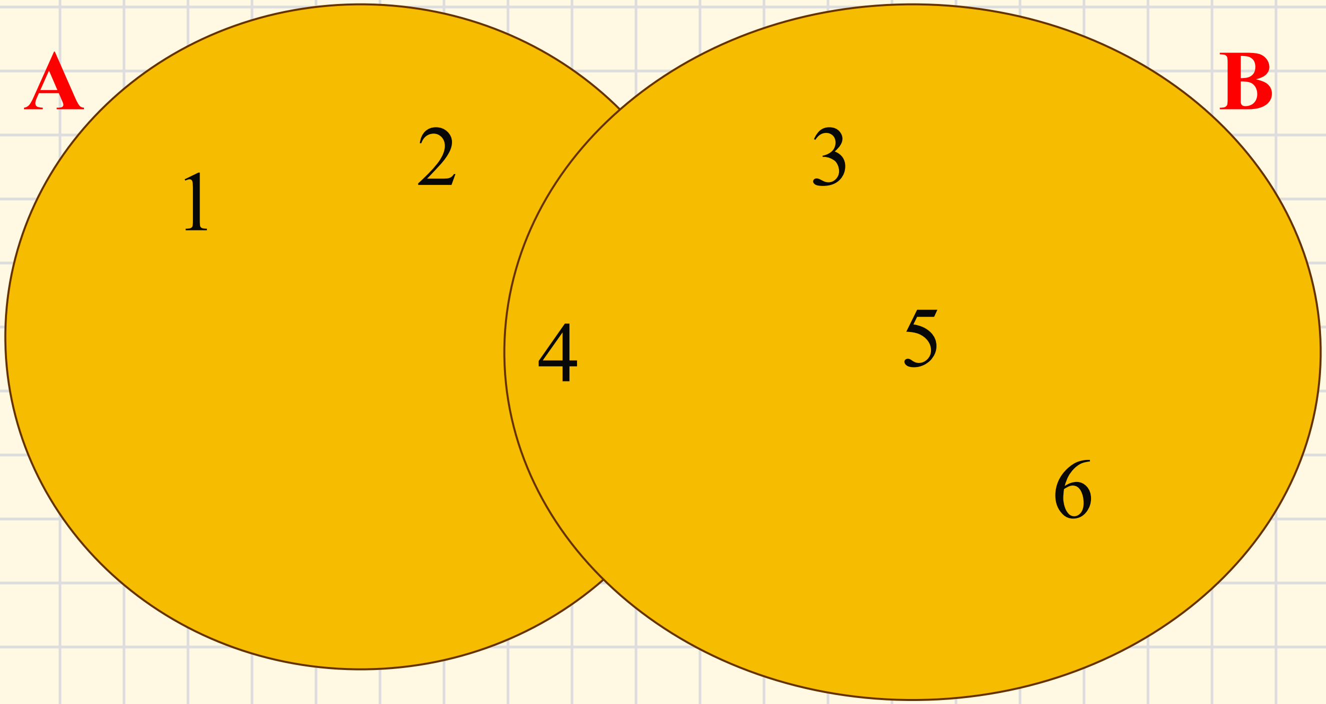
AUB={x | xєA или xєB}



Операции над множествами

объединение

Например, если **A={1,2,4}, B={3,4,5,6},**



то **A ∪ B = {1,2,3,4,5,6}**

Операции над множествами

Свойства операция объединения множеств

1. $A \cup \varnothing = A$, 2. $A \cup A = A$, 3. $A \cup B = B \cup A$ - коммутативность (переместительный закон) 4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ - ассоциативность (распределительный закон)	5. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ - дистрибутивность пересечения, 6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ - дистрибутивность объединения

Операции над множествами

- ***Разностью*** множеств **A** и **B** называется множество **A- B**, элементы которого **принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B**.

$$A - B = \{x \mid x \in A \ и \ x \notin B\}$$

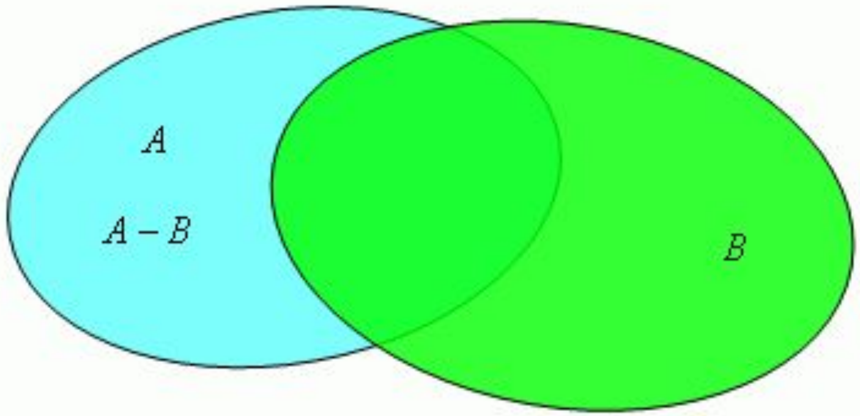
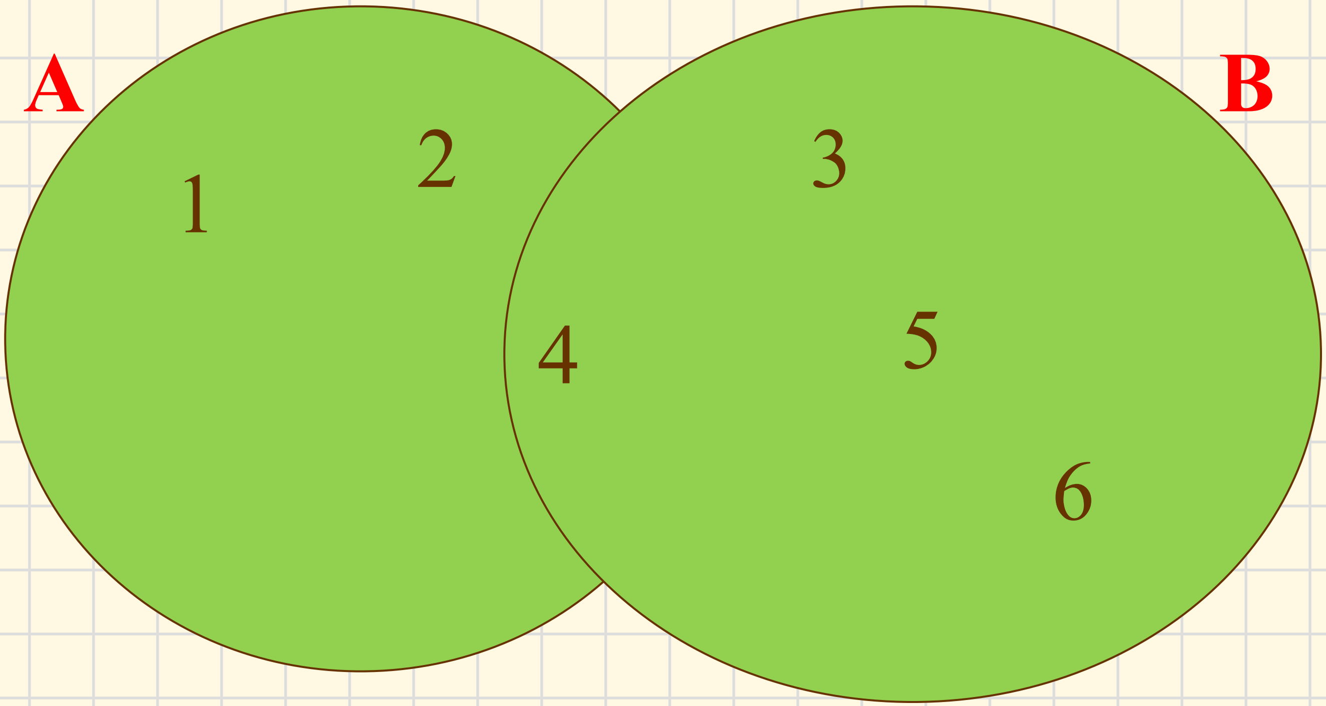


Рис.3

Операции над множествами

разность

Например, если **A={1,2,3,4}, B={3,4,5},**



то **A\B = {1,2}**

Операции над множествами

Свойства операции вычитания множеств

1. $A - \varnothing = A$.
2. $\varnothing - A = \varnothing$.
3. $A - B = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$.

Операции над множествами

Дополнение множества

Часто множества A,B,C … являются подмножествами некоторого более широкого множества **U**, принимаемого за ***универсальное***.

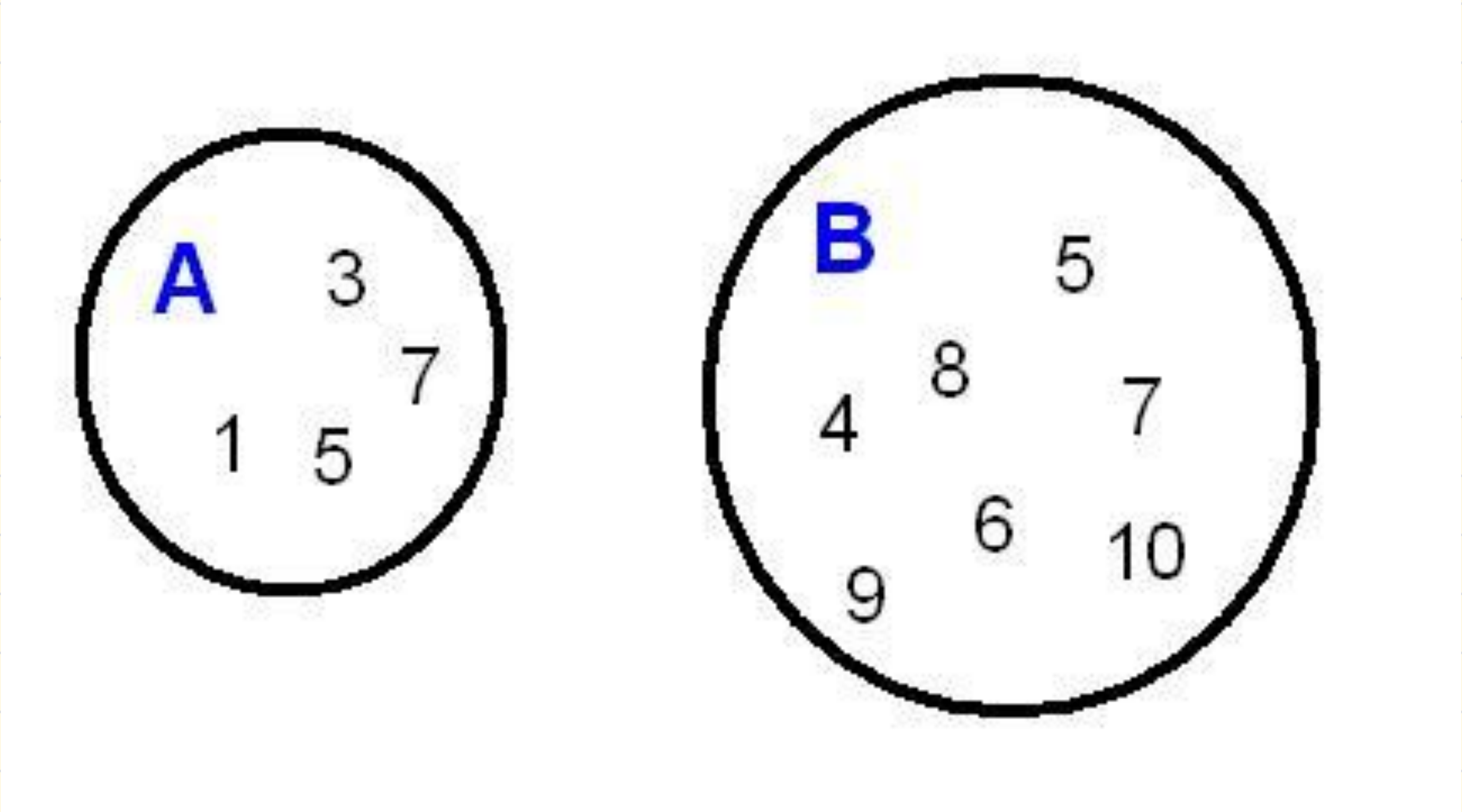
Для совокупности множеств A, B, C,... ***универсальным множеством*** называют каждое множество U такое, что $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$, ...

Операции над множествами

ПРИМЕРЫ:

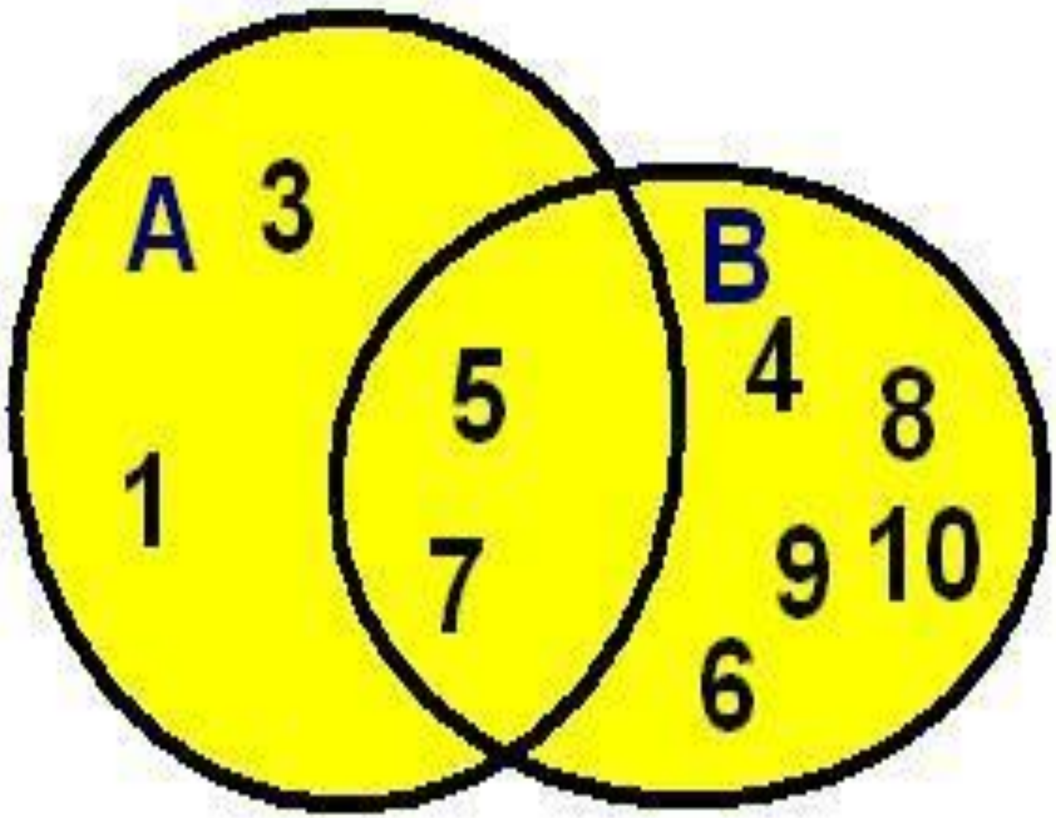
- *Если* ***A*** *- множество параллелограммов,* ***B****- множество трапеций,* ***C*** *- множество ромбов,* ***D*** *- множество прямоугольников,* ***E*** *- множество квадратов, то универсальным множеством* ***U*** *служит множество всех четырехугольников.*
- *Если* ***A*** *- множество треугольников,* ***B****- множество четырехугольников и так далее, то в качестве универсального множества* ***U*** *можно выбрать множество всех многоугольников.*

Задача. Даны множества

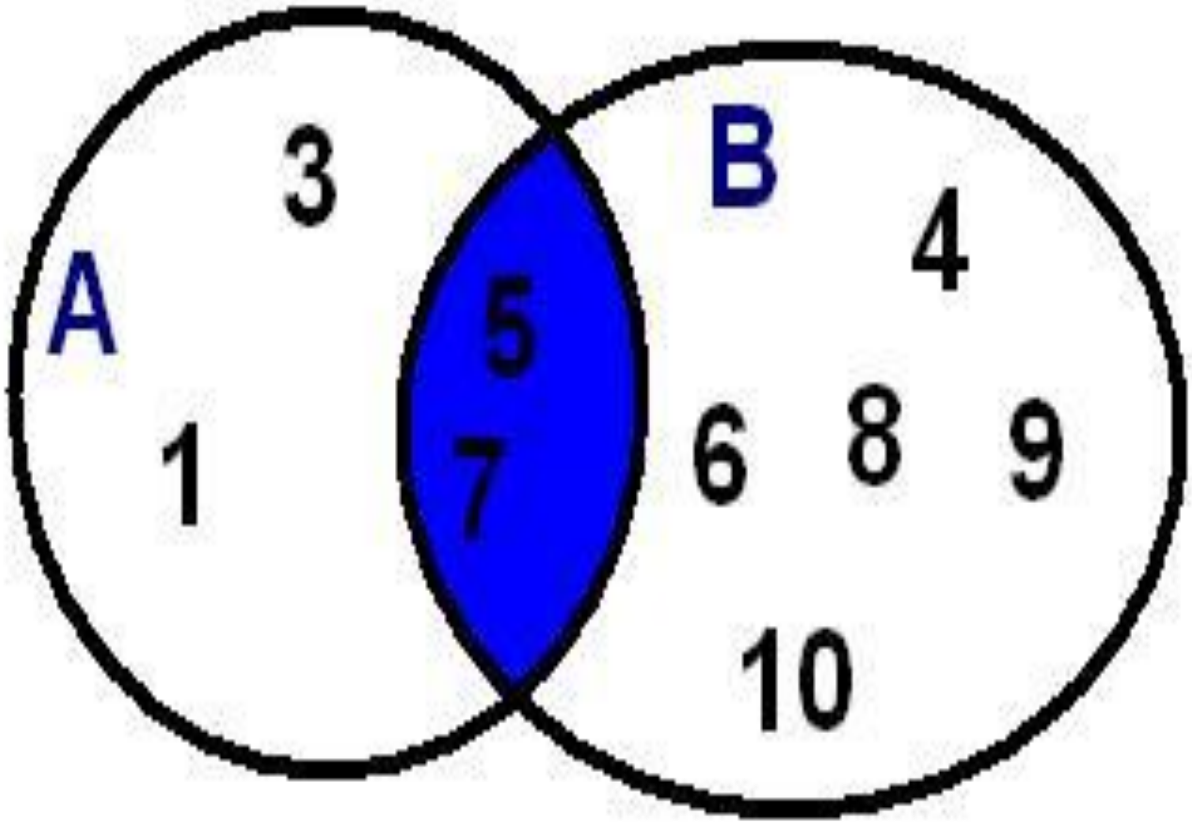


- Найти: *объединение*, *пересечение*, *разность.*

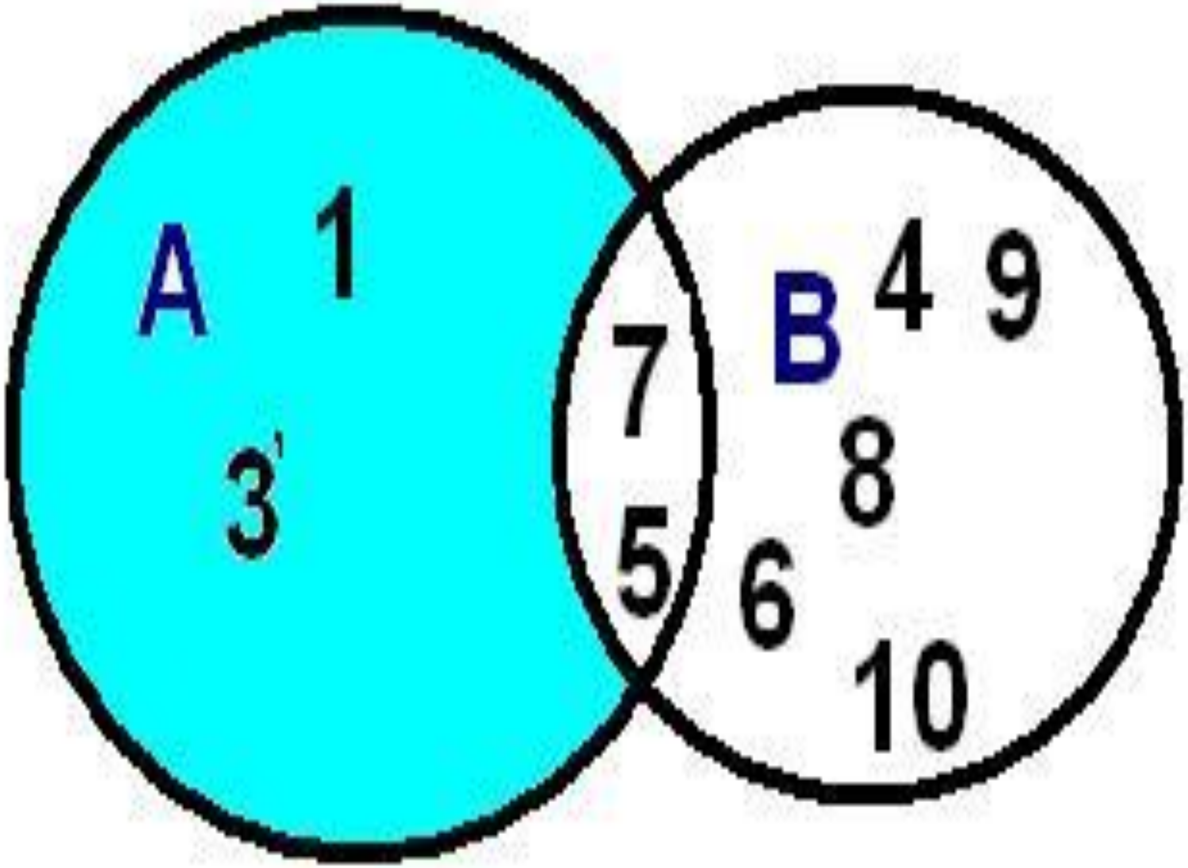
Объединение А и В



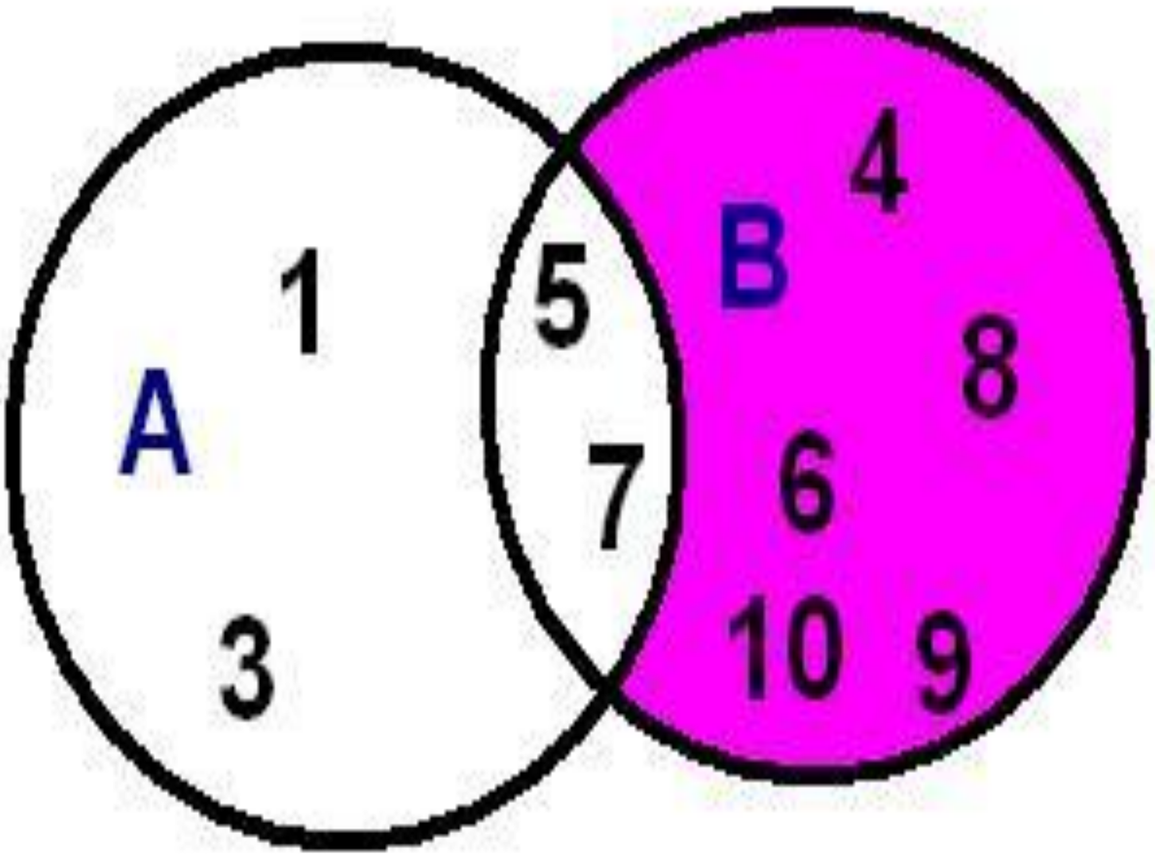
Пересечение множеств А и В



Разность A\B



Разность B\A



<u>Задача</u>. На фирме работают **67** человек. Из них **47** знают *английский язык*, **35** - *немецкий язык*, а **23** - *оба языка*. Сколько человек в фирме ***не знают*** ни английского, ни немецкого языков?

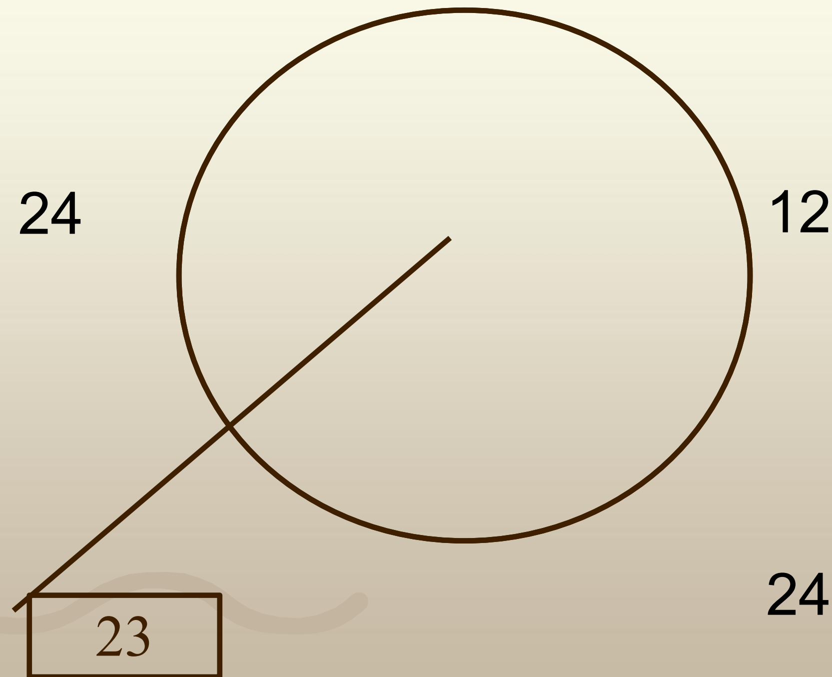
Английский 47

47-23=24

Всего 67

Немецкий 35

35-23=12

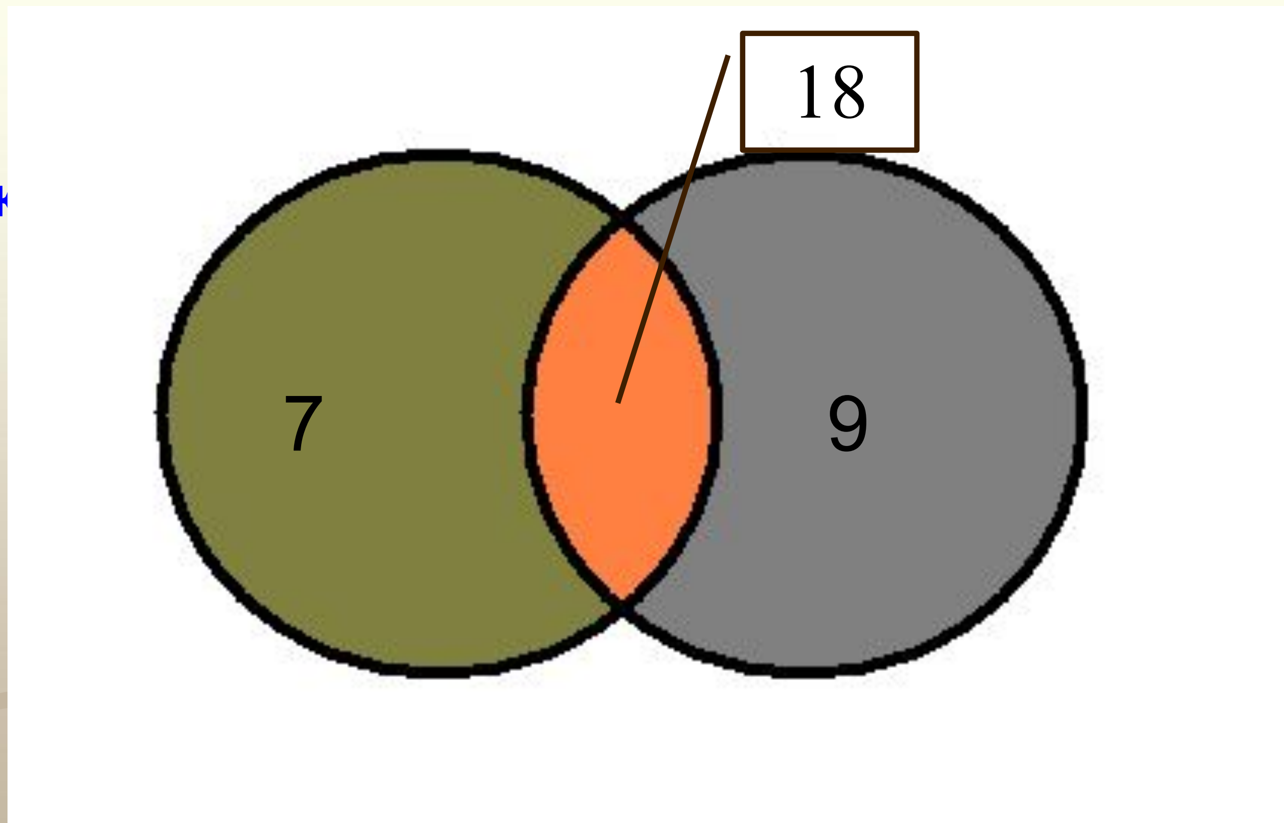


24+12+23=59

67- 59=8

Задача. Каждый учащийся в классе изучает английский или французский язык. Английский язык изучают **25** учащихся, французский — **27** учащихся, а два языка — **18** учащихся. Сколько учащихся в классе?

Английск



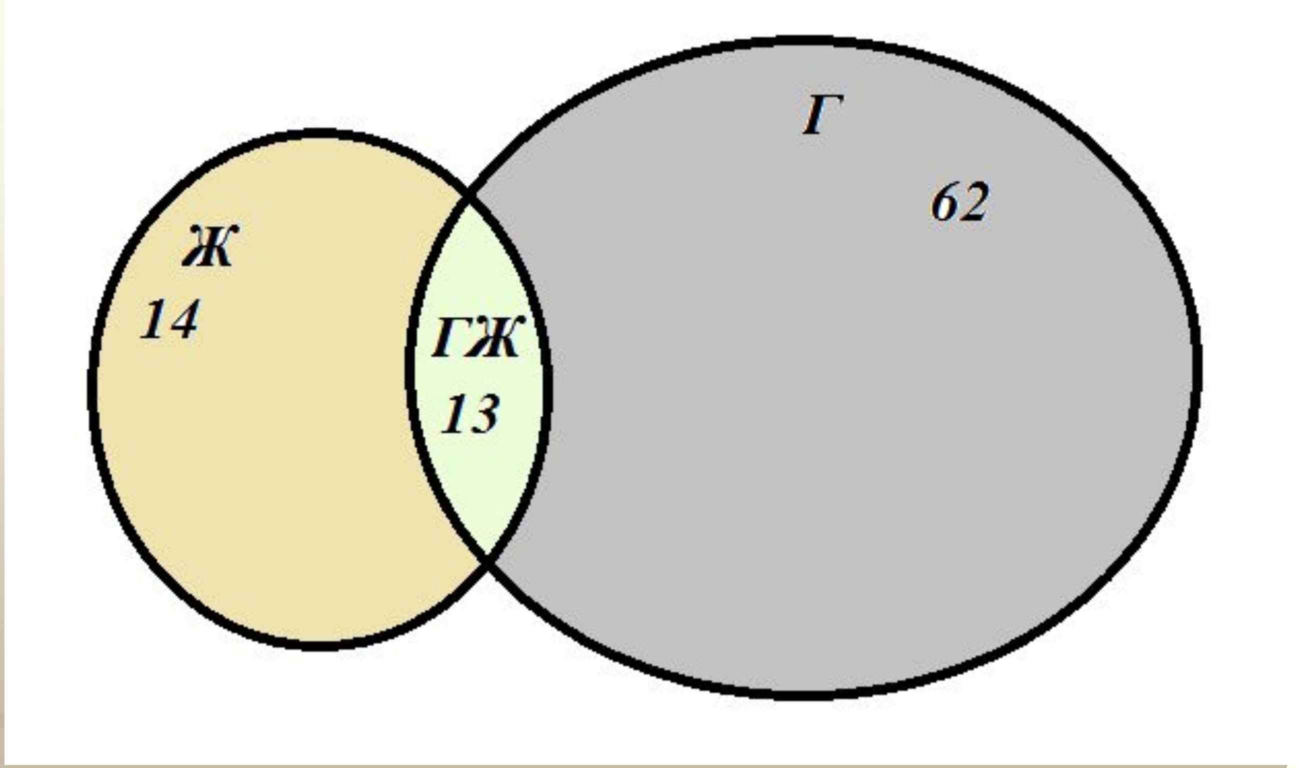
ий 27

Только английский 25 – 18 = 7

немецкий
= 9

Ответ: в классе 34 ученика

Задача. **Каждая семья, живущая в нашем доме, выписывает или газету, или журнал, или и то и другое вместе. 75 семей выписывают газету, а 27 семей выписывают журнал и лишь 13 семей выписывают и журнал, и газету. Сколько семей живет в нашем доме?**



Всего: 14 + 13 + 62 =89

Домашнее задание:

Перечислить элементы следующих множеств:

$A = \{x \mid x \in \{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}\};$

$B = \{x \mid x \subset \{a, b, c, d\}\};$

$C = \{x \mid x \subseteq \{a, b, c, d\}\}.$

В студенческом потоке **37** человек хорошо знают математику, а **25** человек – электронику, и **19** человек хорошо знают и математику и электронику. Если в потоке каждый из студентов знает хотя бы один из этих предметов, то сколько студентов в потоке?