Лекція 3

Кратні інтеграли

1. Подвійний інтеграл і його властивості
2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових і полярних координатах
3. Застосування подвійного інтеграла до розв'язування геометричних задач
4. Потрійний інтеграл і його властивості
5. Обчислення потрійного інтеграла в декартових, циліндричних і сферичних координатах
6. Застосування потрійного інтеграла до розв'язування геометричних задач

1. Подвійний інтеграл і його властивості

Розглянемо функцію двох змінних $f(x, y)$, що визначена в деякій області D на площині, і будемо вважати, що ця область має площу. Розіб'ємо довільним чином D на n частинних областей D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ з площами ΔS_k та виберемо в кожній з них довільно точки $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$ (рис 1).

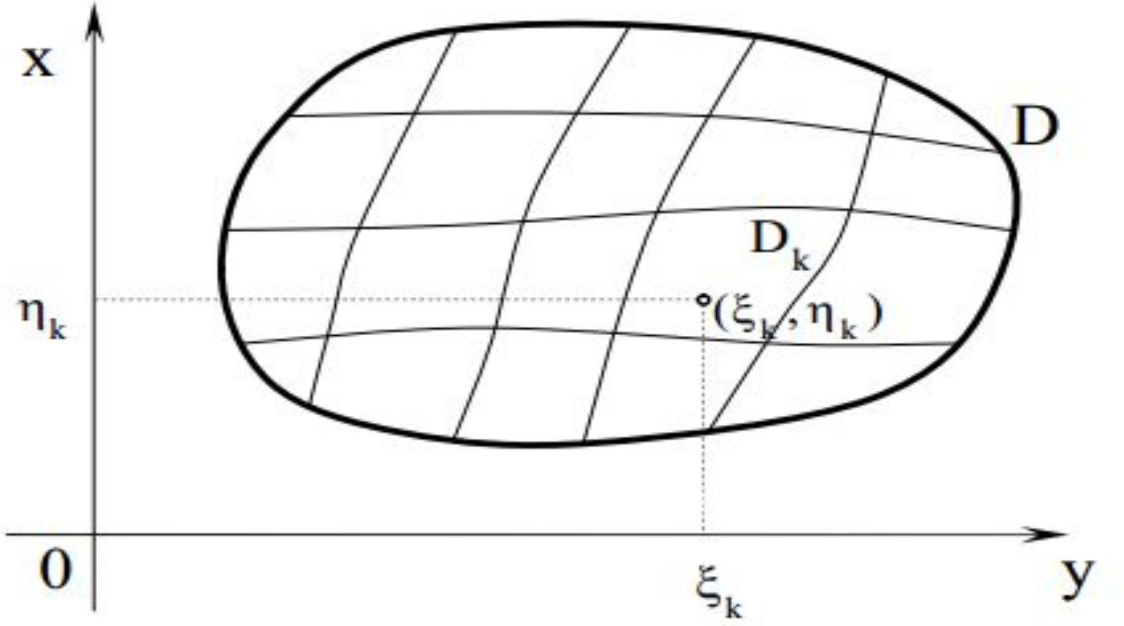


Рис. 1

Утворимо суму виду $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k$, яка називається ***інтегральною сумою***, складеною для функції $f(x, y)$ при даному розбитті D на D_k та при даному виборі точок $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$. Введемо позначення $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n}\{d_k\}$, де d_k визначається формулою

$$d_k = \sup_{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_k} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

та називається ***діаметром*** частинної області D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Якщо існує скінченна границя при $\lambda \to 0$ утвореної інтегральної суми і ця границя не залежить ні від способу розбиття D на D_k, ні від способу вибору точок $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, то ця границя і називається ***подвійним інтегралом*** від функції $f(x, y)$ по області D та позначається символом $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$. При цьому кажуть, що $f(x, y)$ є ***інтегрованою*** в D. Отже згідно з означенням маємо

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k .$$

Зауважимо, що коли $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D, то вона буде і інтегрована в цій області.

Властивості подвійного інтеграла

Тут всі підінтегральні функції вважаються інтегрованими відповідних областях, що мають площу

a) $\iint\limits_{D} dxdy = S$, S – площа D,

b) $\iint\limits_{D} Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, C – стала,

c) $\iint\limits_{D} [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy$,

d) Якщо $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

e) Якщо в області D виконується умова $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy,$$

f) $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |g(x,y)|dxdy,$

g) <u>Теорема про середнє.</u> Якщо $f(x,y)$ неперервна в замкненій, зв'язній області D, то знайдеться принаймні одна точка $(x_0, y_0) \in D$ така, що

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S,\text{ де } S - \text{площа } D.$$

Властивості b) – c) часто називають властивостями ***лінійності*** подвійного інтеграла, а властивість d) – властивістю ***адитивності***.

1.2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

а) Випадок прямокутної області.

Нехай область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)dxdy$ має вигляд $D=\{(x,y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ (рис. 2)

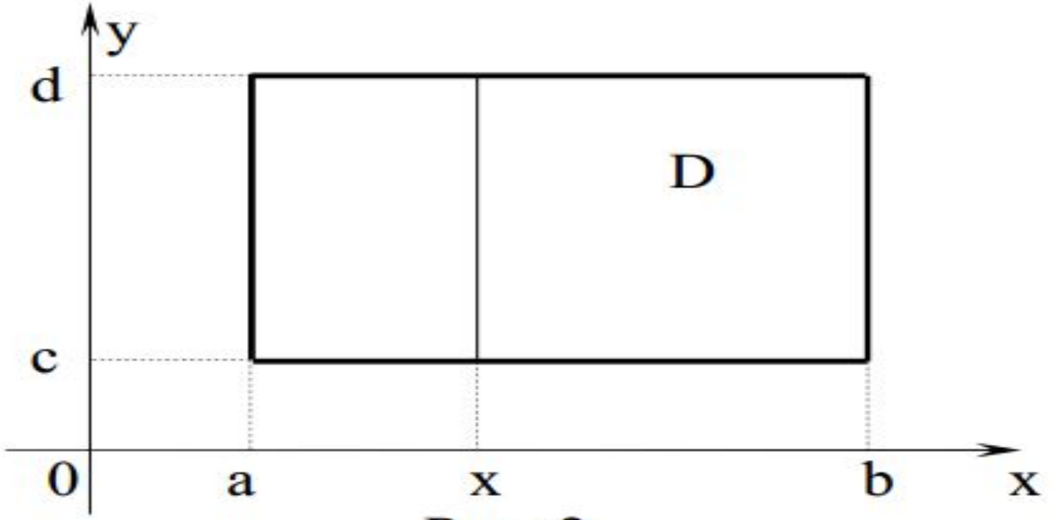


Рис. 2

В цьому випадку даний інтеграл обчислюється згідно з формулою

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx .$$

інтегралом, його обчислюють наступним чином:

Спочатку при фіксованому $x \in [a,b]$ інтегрують по змінній y від c до d (тобто по прямій, що зображена на рис. 2 суцільною лінією всередині області D) функцію $f(x,y)$. Після підстановки меж інтегрування c та d одержують функцію, залежну лише від змінної x, яку й інтегрують на відрізку $[a,b]$, що є проекцією D на вісь OX. Використовуючи позначення

$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$, попередню формулу записують в

простішому вигляді $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$. Аналогічно, проектуючи область D на вісь OY, тобто інтегруючи $f(x, y)$ спочатку по змінній x а потім по y на відповідних відрізках, даний інтеграл обчислюють за формулою $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx$. Слід відзначити, що вибір порядку інтегрування в повторному інтегралі може суттєво вплинути на складність його обчислення.

<u>Приклад 1.</u> Знайти інтеграл $\iint\limits_D y \sin 2xy\,dxdy$, де область D обмежена прямими $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ (рис. 3).

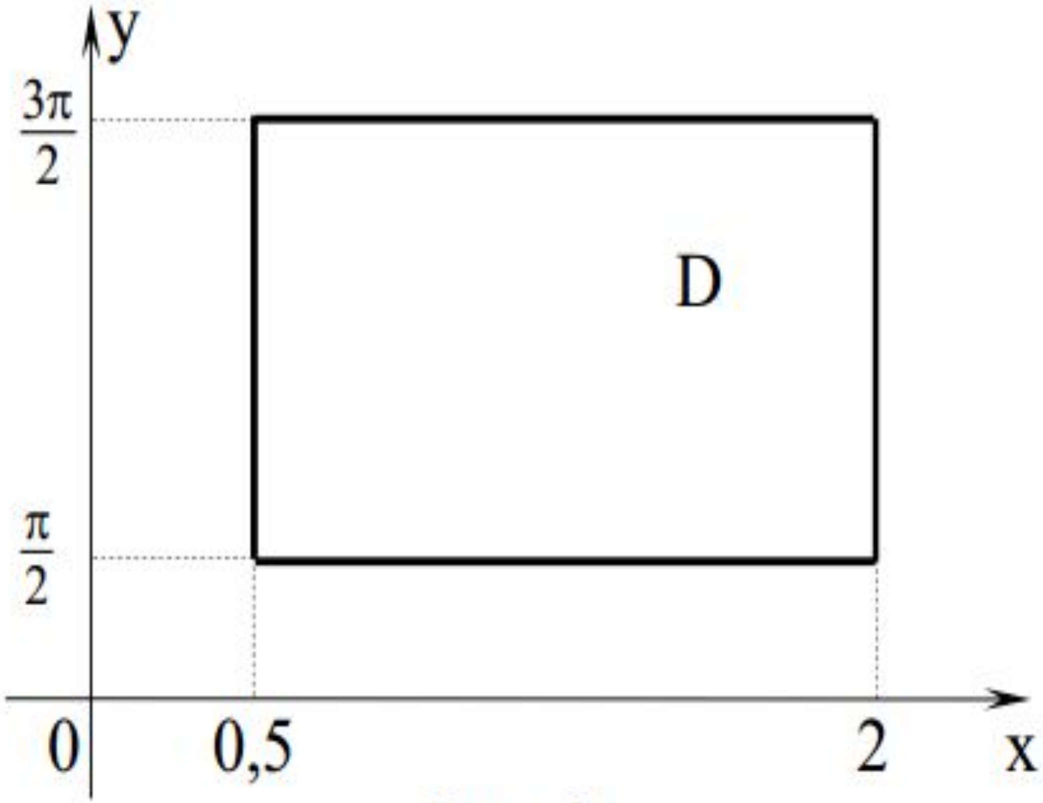


Рис. 3

Тут зручно область D, що має вигляд прямокутника, проектувати на вісь ОУ. При цьому підінтегральна функція, інтегруючись спочатку по змінній x від $x=\frac{1}{2}$ до $x=2$ при фіксованому $y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$, значно спрощується (внаслідок скорочення на $y\neq 0$). Маємо:

$$\iint_D y\sin 2xydxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{2}y\sin 2xydx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}y\frac{-\cos 2xy}{2y}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos 2xy\Big|_{0,5}^{2}dy=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos 4y-\cos y)|dy=-\frac{1}{2}(\frac{\sin 4y}{4}-\sin y)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}(\frac{\sin 6\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{\sin 2\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}(0+1-0+1)=-1.$$

b) Випадок криволінійної області.

Якщо область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ має вигляд $D = \{(x,y): a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ (рис. 4), де функції

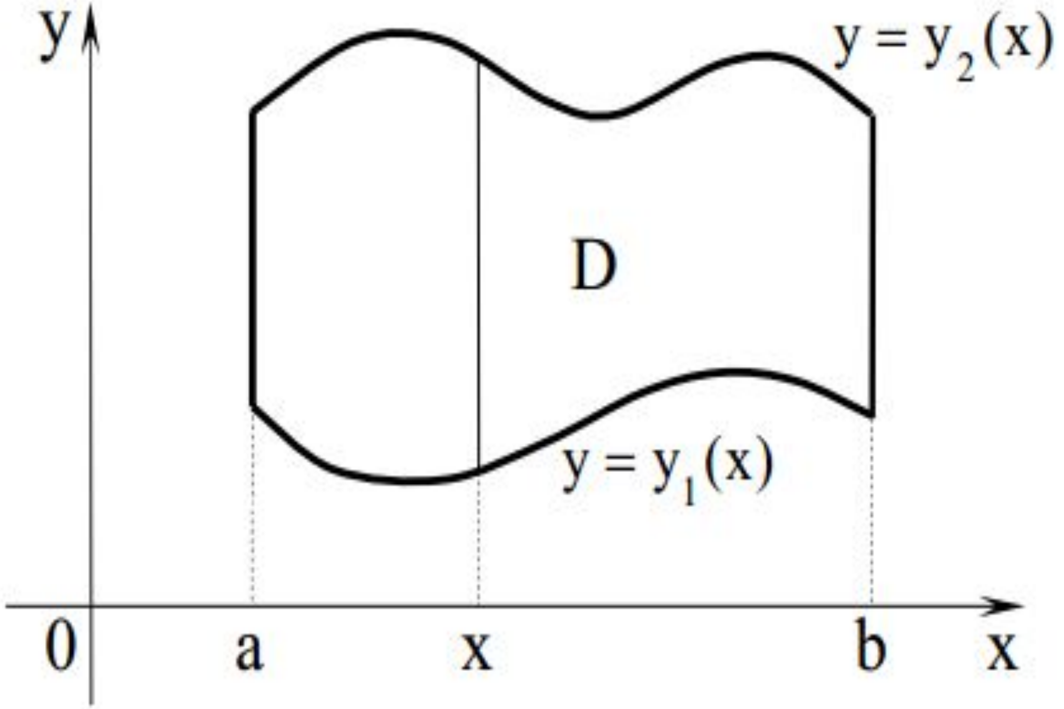


Рис. 4

$y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ неперервні на $[a,b]$, проекцією D на вісь OX є відрізок $[a,b]$, то обчислення $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ здійснюється за допомогою формули $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. Тут, як і в попередньому випадку, спочатку виконується інтегрування $f(x,y)$ по змінній y (x розглядається як параметр) та підстановка згідно з формулою Ньютона-Лейбніца у вираз для знайденої первісної замість аргумента y виразів $y_1(x)$, $y_2(x)$. Після цього обчислюється визначений інтеграл на відрізку $[a,b]$ від одержаної функції, залежної лише від x.

Аналогічно відбувається обчислення $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ і тоді, коли область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ має вигляд $D = \{(x, y) : c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$. Тут функції $x = x_1(y)$ та $x = x_2(y)$ неперервні на $[c, d]$, проекцією D на вісь OY є відрізок $[c, d]$. Дана область показана на рис. 5.

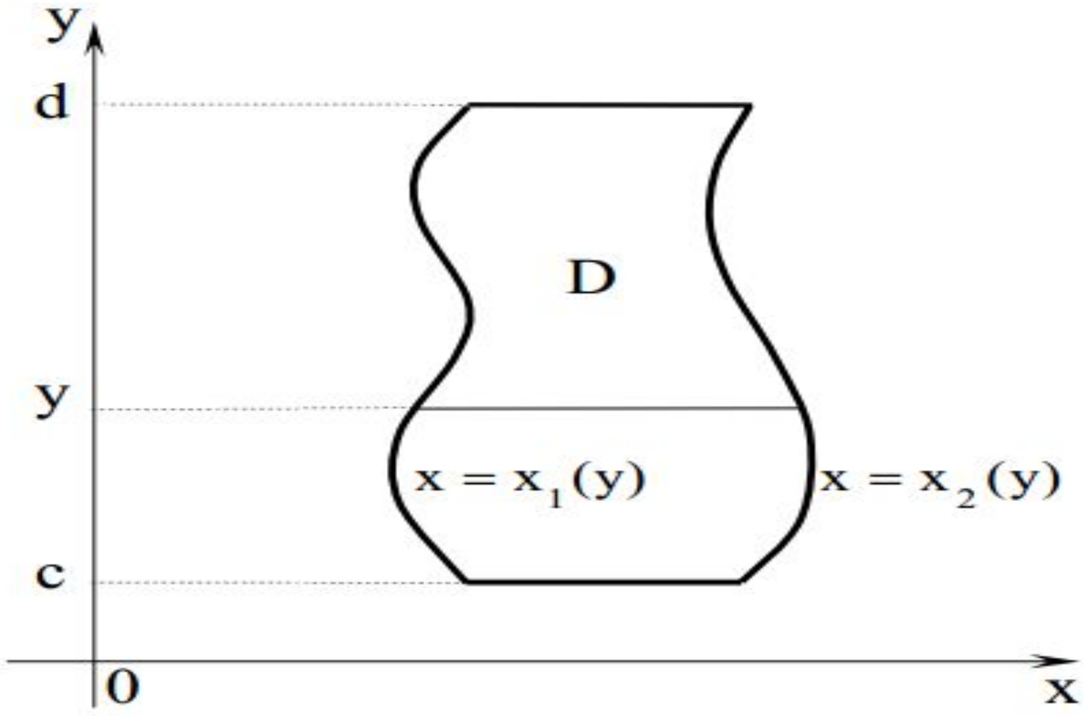


Рис. 5

Для такої області на відміну від попередньої, що зображена на рис 4, міняється порядок інтегрування в повторному інтегралі, формула для обчислення $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ набуває наступного вигляду

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dx \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dy.$$

Зауважимо, що коли маємо довільну область D, то її слід розбити на частини, подібні до зображених на рис. 4 та рис. 5, після чого для обчислення застосувати властивість адитивності подвійного інтеграла.

<u>Приклад 2.</u> Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$$

В першому доданку в повторному інтегралі розставлені межі інтегрування для області D_1, а в другому – для D_2, які обмежені лініями

$$D_1: \begin{array}{ll} x=-\sqrt{3}, & y=\sqrt{4-x^2}, \\ x=-2, & y=0, \end{array} \qquad D_2: \begin{array}{ll} x=0, & y=2-\sqrt{4-x^2}, \\ x=-\sqrt{3}, & y=0. \end{array}$$

Враховуючи, що рівняння $y=\sqrt{4-x^2}$ описує верхню половину кола $x^2+y^2=4$, рівняння $y=2-\sqrt{4-x^2}$ – нижню половину кола $x^2+(y-2)^2=4$, а всі інші рівняння описують прямі лінії, зображуємо D_1 та D_2 на координатній площині (рис. 6).

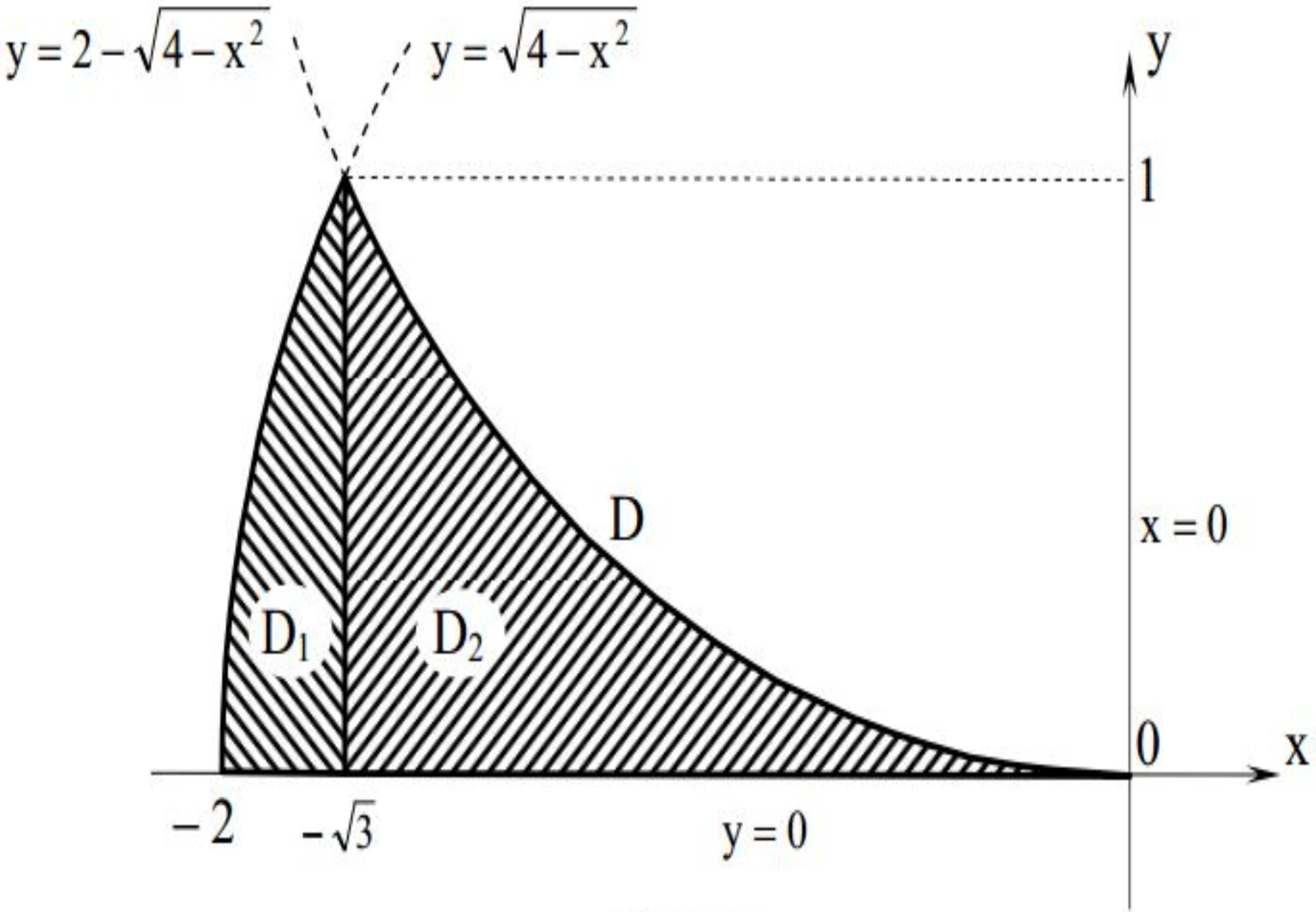


Рис. 6

D_1 та D_2 утворюють одну область D, яка проектується на вісь ОУ від $y = 0$ до $y = 1$. Ці значення й будуть межами інтегрування по змінній y. При кожному фіксованому значенні $y \in [0,1]$, розв'язуючи рівняння $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + (y-2)^2 = 4$, одержуємо відповідно нижню та верхню межі інтегрування по змінній x:

$x = -\sqrt{4-y^2}$ (ліва половина кола $x^2 + y^2 = 4$),

$x = -\sqrt{4-(y-2)^2} = -\sqrt{4y-y^2}$ (ліва половина кола $x^2 + (y-2)^2 = 4$).

Остаточно маємо

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dy.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint_D x dx dy$, де область D обмежена лініями $y = x + 2,\ y = 2x + 4 - x^2$.

Починаємо з рисунка області D, знайшовши абсциси $x_1 = -1,\ x_2 = 2$ точок перетину $M_1,\ M_2$ параболи $y = 2x + 4 - x^2$ та прямої $y = x + 2$ як розв'язки рівняння $x + 2 = 2x + 4 - x^2$. При цьому $y_1 = 1,\ y_2 = 4$ і отже парабола та пряма перетинаються в точках $M_1(-1, 1),\ M_2(2, 4)$ (рис. 7).

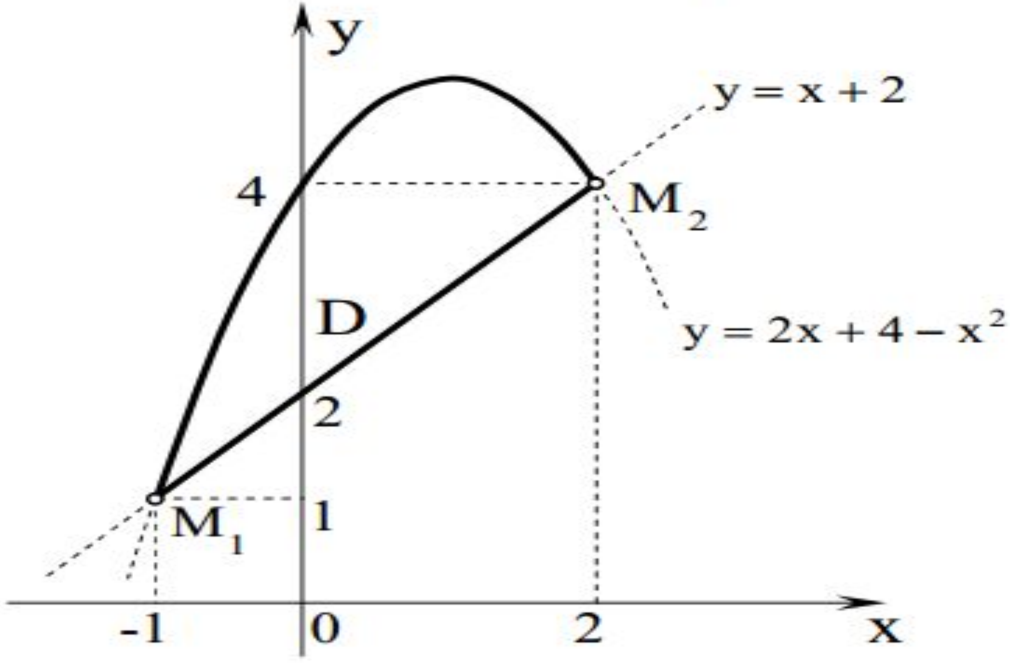


Рис. 7

Проекцією області D на вісь OX буде відрізок $[-1,2]$, при цьому при фіксованому $x \in [-1,2]$ інтегрування по змінній y здійснюється від $y = x + 2$ до $y = 2x + 4 - x^2$. Враховуючи це, маємо

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x+2}^{2x+4-x^2} x\,dy = \int_{-1}^{2} xy\Big|_{x+2}^{2x+4-x^2} dx = \int_{-1}^{2} x(2x + 4 - x^2 - x - 2)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x^2 + 2x - x^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 4 - 4 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

2.2 Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Якщо область D обмежена колами або їх частинами та променями, що виходять з початку координат, то тоді обчислення інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ може бути простішим, коли від декартових координат x, y перейти до полярних ρ,φ (рис. 8) за допомогою формул

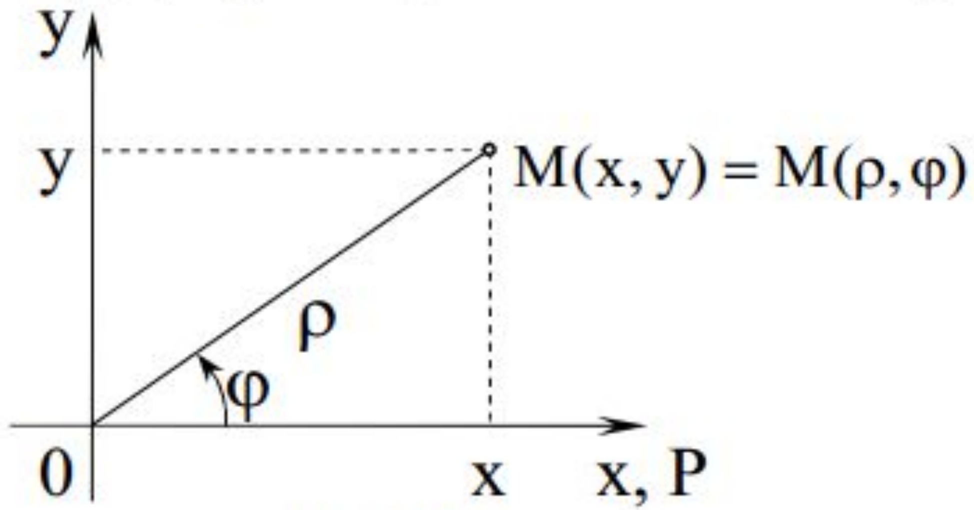


Рис. 8

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

$$\rho \ge 0,\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

При цьому $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \left[\begin{array}{ll} -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \end{array}\right.$

а сама ***формула переходу від прямокутних декартових координат до полярних*** має вигляд

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_1(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Тут G – область, на яку відображається D за допомогою формул переходу від декартових координат до полярних і яка обмежена променями $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ та кривими $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$, на які відображається границя D. Зображати область G не потрібно, можна обмежитись лише рисунком D та геометричною інтерпретацією полярних координат, даною на рис. 8

<u>Приклад 4.</u> Обчислити інтеграл $\iint\limits_D y\,dx\,dy$, де область D обмежена лініями $y=x,\ y=0,\ y=\sqrt{2x-x^2},\ y=\sqrt{4x-x^2}$.

Враховуючи, що криві $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=\sqrt{4x-x^2}$ описують верхні половини кіл $(x-1)^2+y^2=1$, $(x-2)^2+y^2=4$, зображуємо область D на координатній площині XOY (рис. 9).

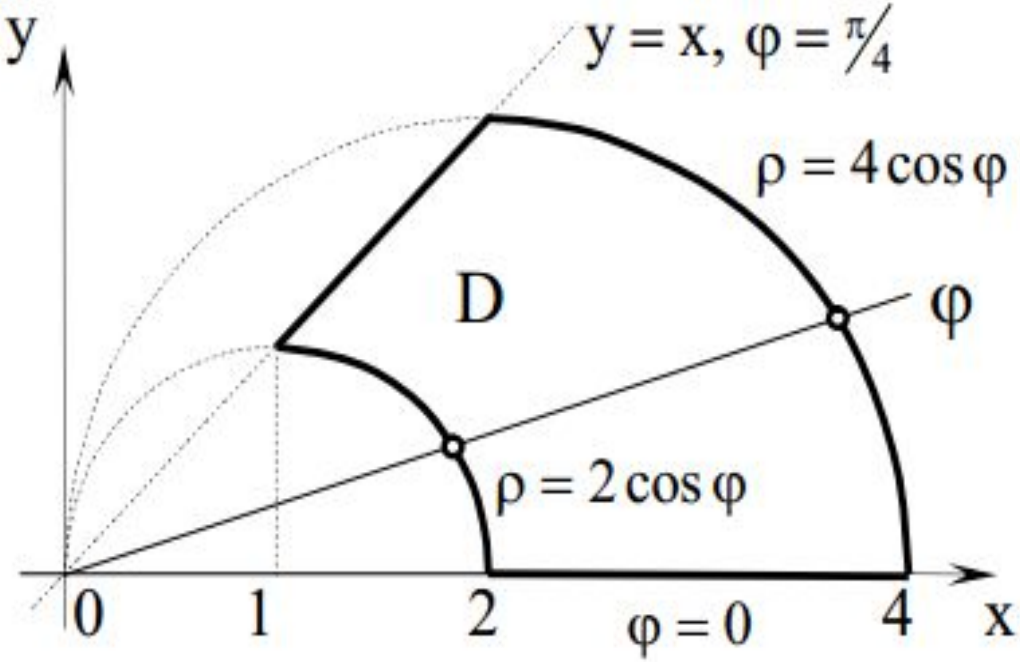


Рис. 9

Ця область розміщена між променями $\varphi = 0,\ \varphi = \pi/4$ та частинами кіл $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x$, що в полярних координатах мають рівняння $\rho = 2\cos\varphi,\ \rho = 4\cos\varphi$. Отже, при кожному $\varphi \in [0, \pi/4]$ інтегрування по змінній ρ здійснюється від $\rho = 2\cos\varphi$ до $\rho = 4\cos\varphi$. Маємо

$$\iint\limits_D ydxdy = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho\sin\varphi\rho d\rho = \int\limits_0^{\pi/4} \sin\varphi \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/4} \sin\varphi(64\cos^3\varphi -$$

$$-8\cos^3\varphi)d\varphi = \frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4} \sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi = -\frac{56}{3}\int\limits_0^{\pi/4} \cos^3\varphi d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{14}{3}\cos^4\varphi\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{14}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 1\right) = -\frac{14}{3}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{7}{2}.$$

3. Застосування подвійного інтеграла до розв'язування геометричних задач

а) Обчислення площ плоских фігур.

Якщо плоска фігура зображується областю D на координатній площині XOY, то її площу S, як випливає з властивостей подвійного інтеграла, можна обчислити за допомогою формули $S = \iint\limits_D dxdy$.

Приклад 5. Обчислити площу плоскої фігури, яка обмежена кривою $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

Запишемо рівняння кривої в полярних координатах

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = x^2 + y^2, \ \rho^4 - 2\rho^4 \cos^2 x \sin^2 x = \rho^2,$$

$$\rho^2(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi) = 1, \ \rho^2(1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4\varphi)) = 1, \ \rho^2(3 + \cos 4\varphi)) = 4,$$

$$\rho^2 = \frac{4}{3 + \cos 4\varphi}, \ \rho = \frac{2}{\sqrt{3 + \cos 4\varphi}}.$$

Враховуючи періодичність з періодом $\frac{\pi}{2}$ функції $\cos 4\varphi$, будуємо графік заданої кривої в полярних координатах (рис. 10)

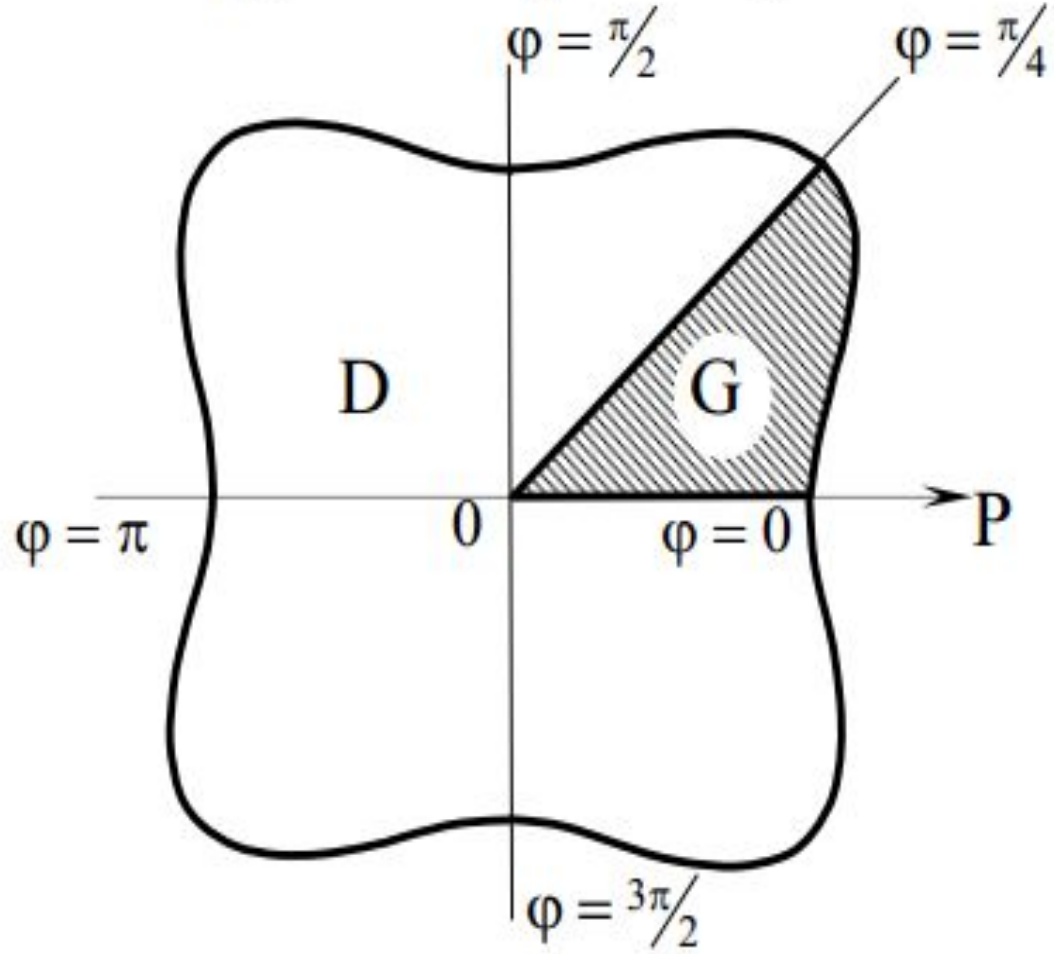


Рис. 10

Використовуючи симетричність фігури, зображеної на рис. 10, будемо обчислювати не всю її площу S, а лише восьму частину цієї площі (на рис. 10 – заштрихована), що допоможе уникнути труднощів при обчисленні відповідного інтеграла (доведеться робити заміну $t = \mathrm{tg} 2\varphi$, яка коректна

при $\varphi \in (-\pi/4, \pi/4)$). Отже, маємо $\frac{S}{8} = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}} \rho d\rho =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} \rho^2 \Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} \frac{4}{3+\cos 4\varphi} d\varphi = \left| \begin{matrix} \mathrm{tg} 2\varphi = t, & d\varphi = \dfrac{dt}{2(1+t^2)}, \\ \varphi = \dfrac{\mathrm{arctg} t}{2}, & \cos 4\varphi = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(3 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot 2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2}.$$

b) Обчислення об'ємів тіл.

Якщо тіло обмежене знизу площиною $z = 0$, зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, $f(x, y) > 0$, $(x, y) \in D$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ а напрямною служить границя області D (рис. 11),

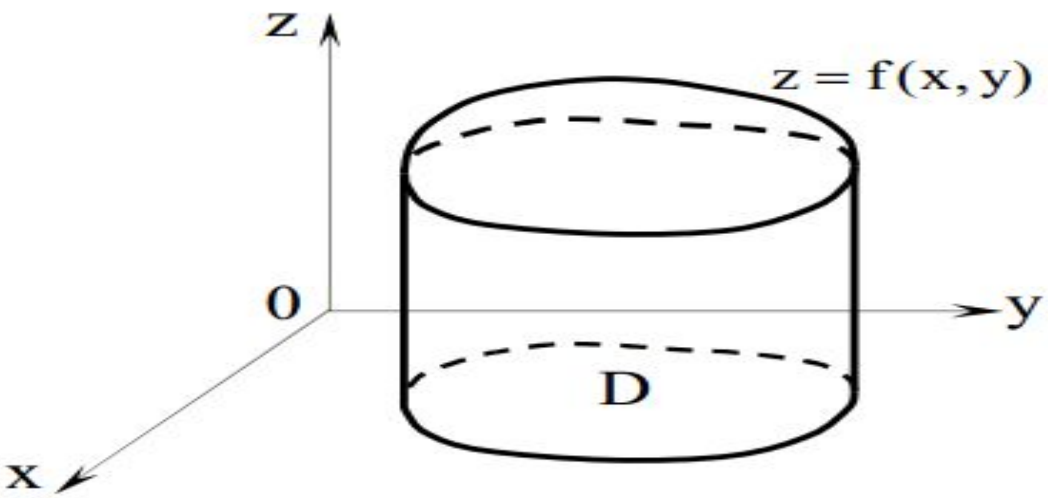
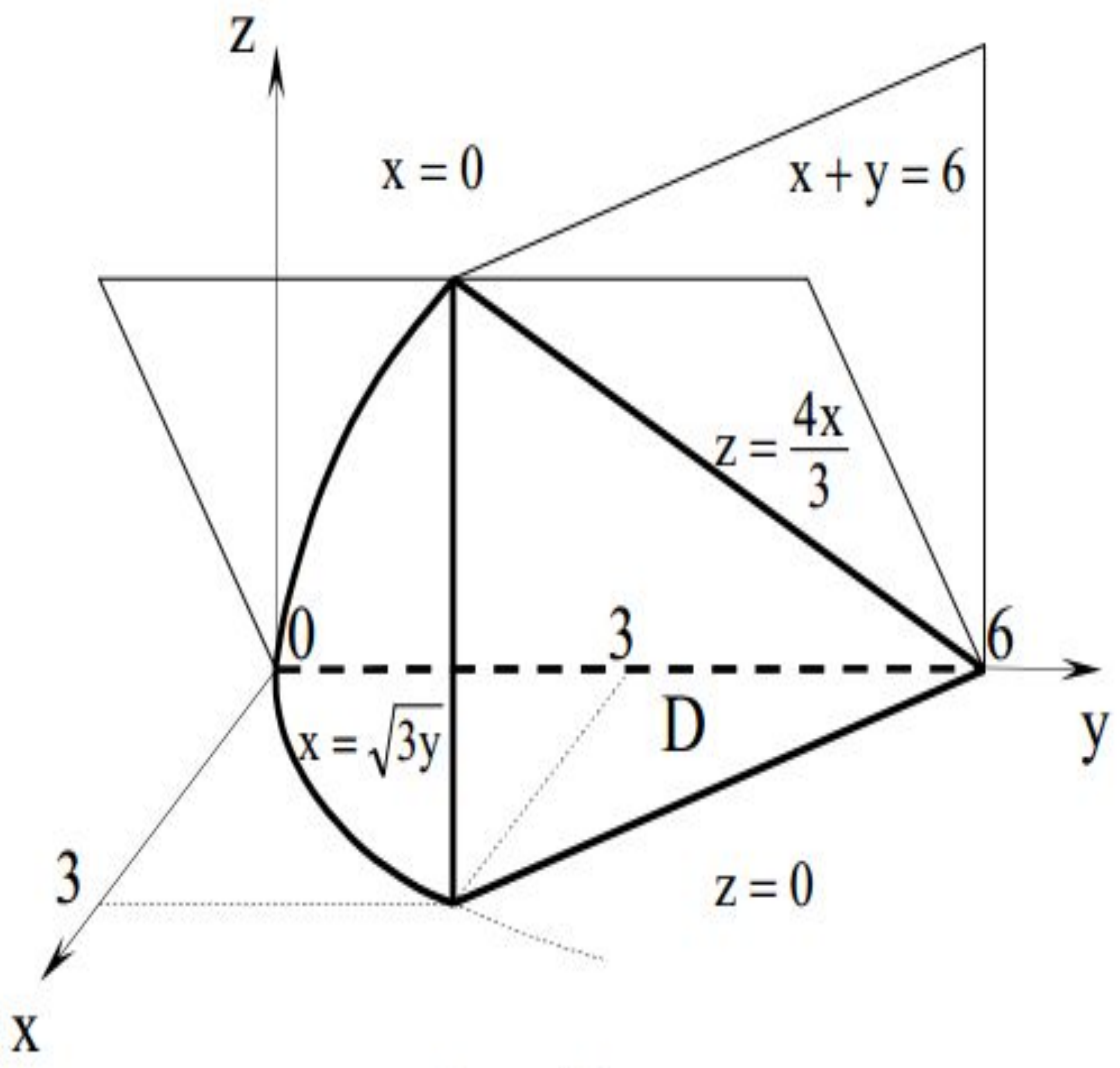


Рис. 11

то, як випливає з геометричної інтерпретації процесу утворення подвійного інтеграла, об'єм V такого тіла обчислюється за формулою $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$. При цьому область D є проекцією даного тіла на координатну площину XOY.

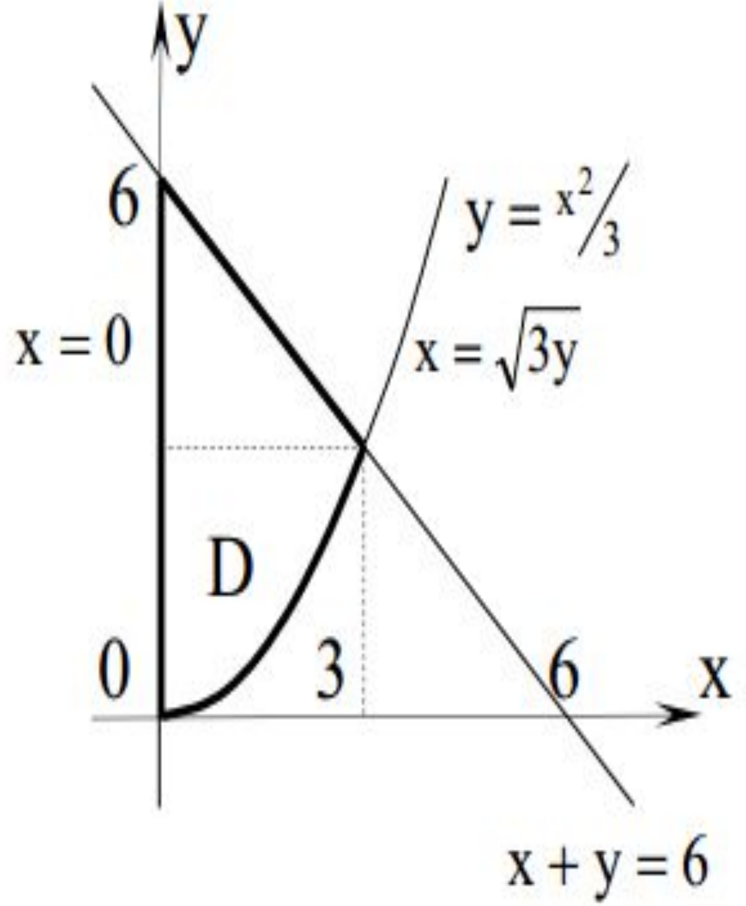
<u>Приклад 6.</u> Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $x+y=6$, $x=\sqrt{3y}$, $z=\frac{4x}{3}$, $z=0$.

Дане тіло обмежене зверху площиною $z=\frac{4x}{3}$, знизу – координатною площиною $z=0$, а з боків – циліндричною поверхнею $x=\sqrt{3y}$ та площинами $x+y=6$, $x=0$. Останні три поверхні разом утворюють циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі OZ, та напрямною, яка є границею області D. Тут D – проекція даного тіла на координатну площину XOY, що має рівняння $z=0$ (рис. 12, 13).



z
x = 0
x + y = 6
$z = \frac{4x}{3}$
0
3
6
$x = \sqrt{3y}$
D
y
3
z = 0
x

Рис. 12



y
6
$y = x^2/3$
x = 0
$x = \sqrt{3y}$
D
0
3
6
x
x + y = 6

Рис. 13

Слід відзначити, що для обчислення об'єму V цього тіла можна було виконати лише рисунок області D, при достатньо розвиненій просторовій уяві та відповідних знаннях елементів аналітичної геометрії без рис. 12 можна обійтись. Згідно з рис. 13 вибираємо порядок інтегрування та розставляємо межі інтегрування в повторному інтегралі. Маємо, враховуючи, що $x=\sqrt{3y}$ – рівняння правої частини параболи $y=\frac{x^2}{3}$

$$V=\iint\limits_D \frac{4x}{3}dxdy=\frac{4}{3}\int\limits_0^3 dx\int\limits_{\frac{x^2}{3}}^{6-x}xdy=\frac{4}{3}\int\limits_0^3 xy\Big|_{\frac{x^2}{3}}^{6-x}dx=\frac{4}{3}\int\limits_0^3 x\left(6-x-\frac{x^2}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{3}\left(3x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^3=\frac{4}{3}\left(27-9-\frac{27}{4}\right)=24-9=15.$$

c) Обчислення площ поверхонь.

Нехай поверхня явно задана рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ є неперервною разом із частинними похідними $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в деякій області D (область D – проекція даної поверхні на координатну площину XOУ). Тоді площа σ цієї поверхні обчислюється за формулою

$$\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Приклад 7. Знайти площу σ частини поверхні $y^2 + z^2 = x^2$, що лежить всередині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 14).

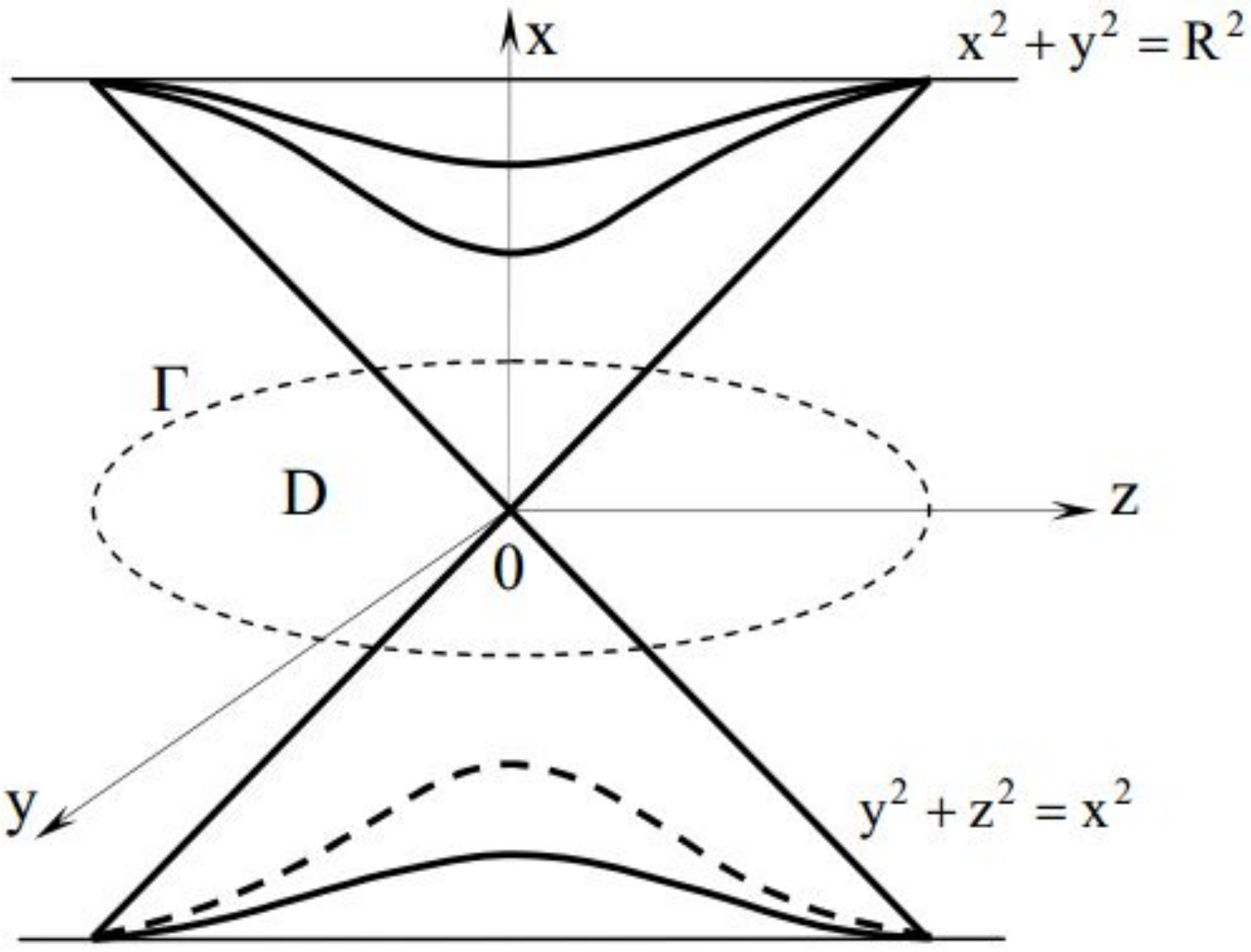


Рис. 14

Спроектуємо вказану частину поверхні на координатну площину YOZ. Цю проекцію позначимо через D, вона буде обмежена границею Г, яка є проекцією лінії перетину поверхонь $y^2 + z^2 = x^2,\ x^2 + y^2 = R^2$. Криву Г знаходимо, виключаючи з рівнянь $y^2 + z^2 = x^2,\ x^2 + y^2 = R^2$ змінну x. В результаті одержуємо рівняння еліпса $z^2 + 2y^2 = R^2$. В просторі – це еліптичний циліндр, він і проектує лінію перетину поверхонь $y^2 + z^2 = x^2,\ x^2 + y^2 = R^2$ на координатну площину YOZ. На область D з границею Г проектуються дві однакові за площею частини конуса $y^2 + z^2 = x^2$, кожна з яких описується одним з двох рівнянь $x = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$, тому $\sigma = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz$. Тут

$$x = \sqrt{y^2 + z^2},\ \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}},\ \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$ і отже

$\sigma = 2\iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2}}dydz = 2\iint\limits_D \sqrt{2}dydz = 2\sqrt{2} \cdot S$, де S – площа D, обмеженої еліпсом $z^2 + 2y^2 = R^2$. Приводимо останнє рівняння до канонічного вигляду $\frac{y^2}{\left(\frac{R^2}{2}\right)} + \frac{z^2}{R^2} = 1$, звідки випливає, що цей еліпс має півосі $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $b = R$. Як відомо, площа S плоскої фігури, обмеженої еліпсом з півосями a та b, обчислюється за формулою $S = \pi ab$, тому остаточно одержуємо $\sigma = 2\sqrt{2} \cdot S = 2\sqrt{2}\pi \frac{R}{\sqrt{2}} R = 2\pi R^2$.

4. Потрійний інтеграл і його властивості

Розглянемо функцію трьох змінних $f(x, y, z)$, що визначена в деякій області D в просторі, і будемо вважати, що ця область має об'єм. Розіб'ємо довільним чином D на n частинних областей D_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ з об'ємами ΔV_k та виберемо в кожній з них довільно точки $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \in D_k$.

Утворимо суму виду $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)\Delta V_k$, яка називається ***інтегральною сумою***, складеною для функції $f(x, y, z)$ при даному розбитті D на D_k та при даному виборі точок $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \in D_k$. Введемо позначення $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{d_k\}$, де d_k визначається формулою

$$d_k = \sup_{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in D_k} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

та називається ***діаметром*** частинної області D_k $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Якщо існує скінченна границя при $\lambda \to 0$ утвореної інтегральної суми і ця границя не залежить ні від способу розбиття D на D_k, ні від способу вибору точок $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \in D_k$, то ця границя і називається ***потрійним інтегралом*** від функції $f(x, y, z)$ по області D та позначається символом $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$. При цьому кажуть, що $f(x, y)$ є ***інтегрованою*** в D.

Отже згідно з означенням маємо

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)\Delta V_k .$$

Зауважимо, що коли $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій області D, то вона буде також інтегрована в цій області.

Властивості потрійного інтеграла

Тут всі підінтегральні функції вважаються інтегрованими у відповідних областях, що мають об'єм

a) $\iiint\limits_{D} dxdydz = V$, V – об'єм D,

b) $\iiint\limits_{D} Cf(x,y,z)dxdydz = C\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz$, C – стала,

c) $\iiint\limits_{D} [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dxdydz = \iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz +$

$+\iiint\limits_{D} g(x,y,z)dxdydz$,

d) Якщо $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$,

то $\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)dxdydz$,

e) Якщо в області D виконується умова $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_D g(x,y,z)dxdydz,$$

f) $\left|\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz\right| \le \iiint\limits_D |g(x,y,z)|dxdydz,$

g) <u>Теорема про середнє.</u> Якщо $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій, замкненій, зв'язній області D, то знайдеться принаймні одна точка $(x_0, y_0, z_0) \in D$ така, що $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz \le f(x_0, y_0, z_0) \cdot V$, де V – об'єм D.

Всі ці властивості повністю аналогічні відповідним властивостям подвійного інтеграла. Так само як і для подвійного інтеграла, властивості b) – c) називають властивостями ***лінійності потрійного інтеграла***, а властивість d) – властивістю ***адитивності***.

5.1. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна в області D вигляду $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in G,\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$, де $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ – неперервні в області G, що має площу. В геометричній інтерпретації це означає, що область D обмежена знизу та зверху відповідно поверхнями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, $(x, y) \in G$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ, а напрямною служить границя Г області G на координатній площині XOY. Сама область G є проекцією D на координатну площину XOY (рис. 15).

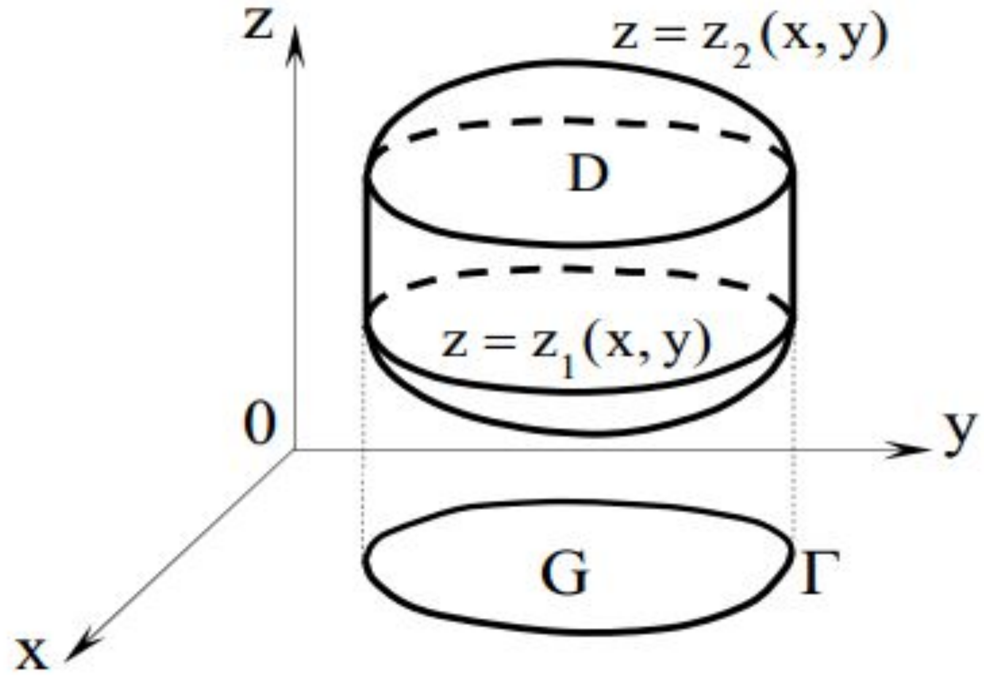


Рис. 15

При цих припущеннях для обчислення потрійного інтеграла $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ застосовується формула:

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz.$$

Тут інтегрування в правій частині відбувається спочатку по змінній z при фіксованих $x, y \in G$, після чого згідно з формулою Ньютона-Лейбніца виконується підстановка від $z = z_1(x, y)$ до $z = z_2(x, y)$. Одержану таким чином функцію, залежну лише від аргументів x та y, інтегрують по області G згідно з відповідними формулами для обчислення подвійного інтеграла.

Якщо область D має складніший вигляд, ніж зображений на рис. 15, її слід розбити на частини, до кожної з яких можна застосувати наведену формулу, після чого застосувати властивість адитивності потрійного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_D 21xzdxdydz$, якщо область D обмежена поверхнями $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = xy,\ z = 0$.

В даному випадку немає необхідності рисувати область D в просторі, так як очевидно, що вона обмежена знизу поверхнею $z = 0$, зверху – поверхнею $z = xy$, а з боків – циліндричною поверхнею, утвореною площинами $y = x,\ y = 0,\ x = 2$. При цьому за напрямну слід взяти замкнену лінію (контур) Г на координатній площині XOY, яка утворена лініями перетину даних площин з цією координатною площиною та мають на ній рівняння $y = x,\ y = 0,\ x = 2$. Проекцією D на координатну площину XOY буде область G, що обмежена контуром Г (рис. 16).

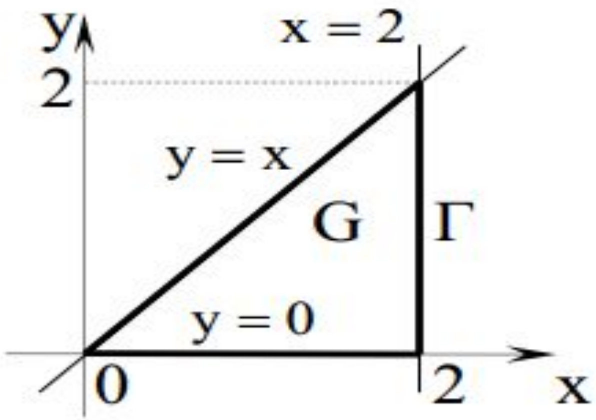


Рис. 16

Враховуючи це, згідно з формулами для обчислення потрійного та подвійного інтегралів, маємо

$$\iiint\limits_{D} 21xz\,dxdydz = 21\iint\limits_{G} dxdy\int\limits_{0}^{xy} xz\,dz = 21\iint\limits_{G} x\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{xy} dxdy =$$

$$= \frac{21}{2}\iint\limits_{G} x(x^2y^2-0)dxdy = \frac{21}{2}\iint\limits_{G} x^3y^2dxdy = \frac{21}{2}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x x^3y^2dy =$$

$$\frac{21}{2}\int\limits_0^2 x^3\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^x dx = \frac{7}{2}\int\limits_0^2 x^3(x^3-0)dx = \frac{7}{2}\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2^7 = 64.$$

5.2. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах

Циліндричні координати ρ, φ, z довільної точки M у просторі зв'язані з її декартовими координатами x, y, z за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \quad 0 \le \rho < +\infty,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ -\infty < z < +\infty. \\ \quad z = z, \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація циліндричних координат та їх зв'язок з декартовими показана на рис. 17.

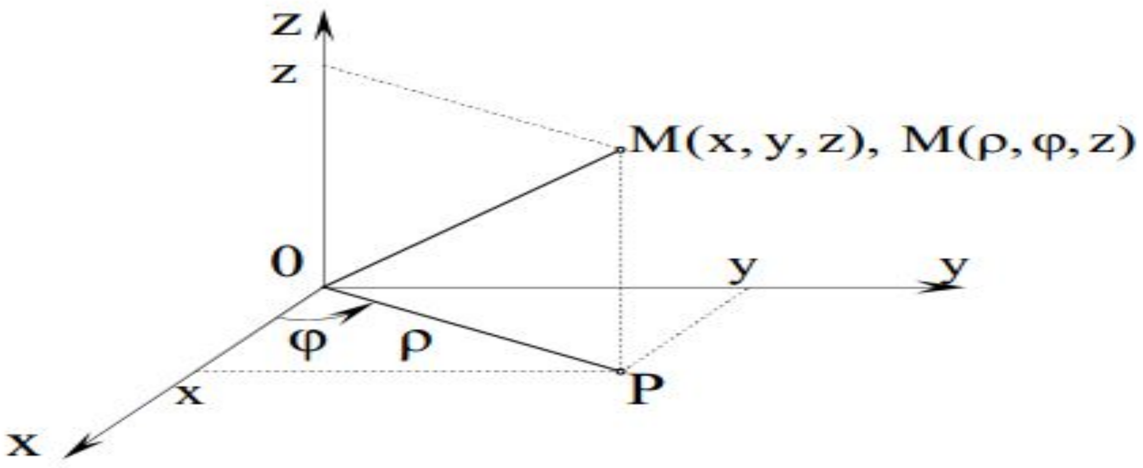


Рис. 17

Перехід від декартових координат до циліндричних полягає в переході до полярних координат на координатній площині XOY для проекції P точки M при незмінній координаті z. Звідси випливає наступна формула переходу від декартових координат до циліндричних для обчислення потрійного інтеграла у випадку, коли область інтегрування D має вигляд, зображений на рис. 15

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{G} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{Q} \rho d\rho d\varphi \int\limits_{z_1(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)}^{z_2(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,dz.$$

Тут G – проекція D на координатну площину XOY, Q – область, на яку відображається G при переході від декартових координат до полярних на цій координатній площині. Після інтегрування по змінній z одержуємо подвійний інтеграл у полярних координатах. Зауважимо, що при його обчисленні через повторні інтеграли підінтегральну функцію слід, як правило, спочатку інтегрувати по змінній ρ, а потім після застосування формули Ньютона-Лейбніца завершити інтегрування одержаного виразу по змінній φ. Для спрощення процесу інтегрування перехід до полярних координат на координатній площині XOY слід здійснювати не відразу, а після завершення інтегрування по змінній z та одержання подвійного інтеграла у декартових координатах. В ряді випадків (коли область G є криволінійним сектором, обмеженим променями, що виходять з початку координат, та еліпсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ або їх частинами) доцільно переходити на координатній площині XOY до узагальнених полярних координат

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad 0 \le \rho < +\infty,\ \varphi \in [0, 2\pi],$$

що рівнозначно переходу в потрійному інтегралі до узагальнених циліндричних координат. При цьому геометрична інтерпретація φ залишається тією ж, рівняння еліпса переходить у рівняння $\rho = 1$, а попередня формула набуває вигляду

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$= \iint\limits_Q ab\rho d\rho d\varphi \int\limits_{z_1(a\rho\cos\varphi,\, b\rho\sin\varphi)}^{z_2(a\rho\cos\varphi,\, b\rho\sin\varphi)} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi, z)dz.$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_D x^2 dxdydz$, якщо область D обмежена поверхнями $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, $z = 0$, $z = y$.

В даному випадку область D обмежена знизу площиною $z = 0$, зверху – площиною $z = y$, а з боків – циліндричною поверхнею $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, твірні якої паралельні осі OZ а напрямною служить крива, що має рівняння $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ на координатній площині XOY. Це – рівняння верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ з півосями $a = 3$, $b = 1$, отже проекцією D на координатну площину XOY буде область G на цій площині, що обмежена кривою $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ та прямою $y = 0$ – лінією перетину площин $z = 0$ та $z = y$ (рис. 18)

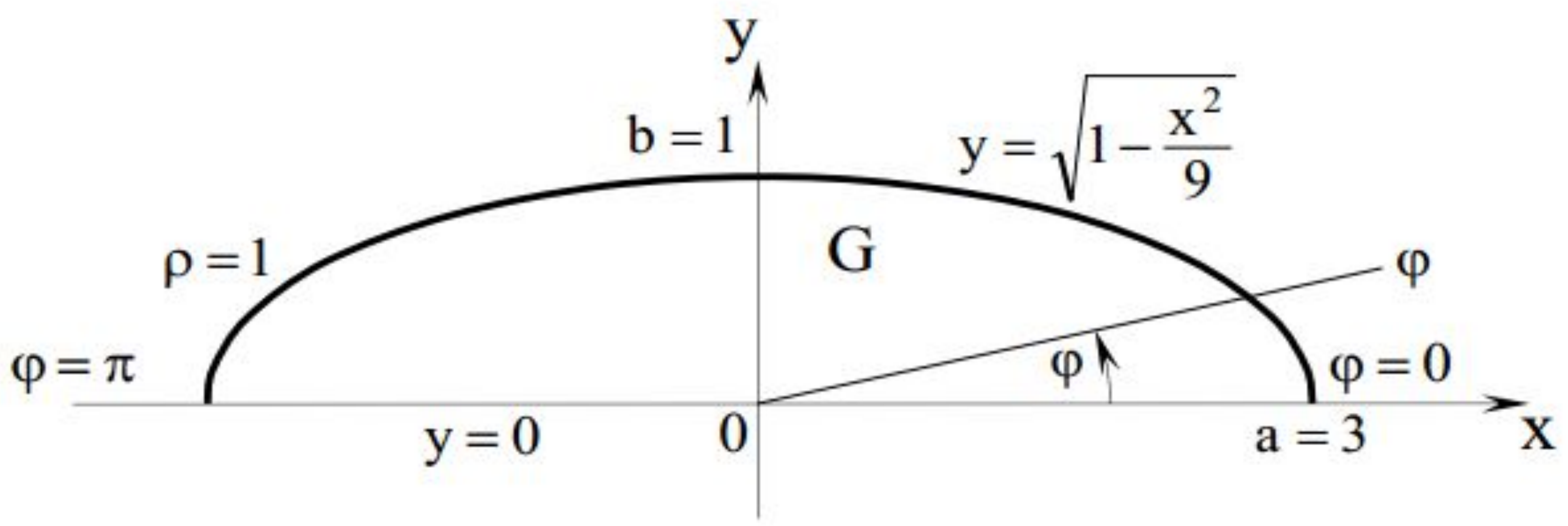


Рис. 18

Так як G обмежена двома променями, що виходять з початку координат під кутами $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$ і верхньою половиною еліпса з півосями $a = 3$ $b = 1$, то при обчисленні даного інтеграла доцільно перейти до узагальнених циліндричних координат $\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$ $\varphi \in [0, \pi]$. Для довільного кута $\varphi \in [0, \pi]$ нижньою межею інтегрування по змінній ρ буде значення $\rho = 0$. Щоб знайти значення верхньої межі інтегрування по цій змінній, слід у канонічному рівнянні еліпса $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ перейти до узагальнених полярних координат ρ та φ у відповідності з формулами $\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi \in [0, \pi]$. Одержимо рівняння еліпса $\rho = 1$ в цих координатах, звідки випливає, що верхньою межею інтегрування по змінній ρ буде значення $\rho = 1$. Враховуючи все це, послідовно одержуємо

$$\iiint\limits_D x^2 dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_0^y x^2 dz = \iint\limits_G x^2 z\Big|_0^y dxdy = \iint\limits_G x^2 y dxdy =$$

$$= \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 9\rho^2 \cos^2\varphi \cdot \rho\sin\varphi \cdot 3 \cdot 1 \cdot \rho d\rho = 27\int\limits_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \cdot \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho =$$

$$= -27\int\limits_0^\pi \cos^2\varphi d(\cos\varphi) \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 = -\frac{27}{5} \cdot \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^\pi = -\frac{9}{5}(-1-1) = \frac{18}{5}.$$

5.3. Обчислення потрійного інтеграла в сферичних координатах

У випадках, коли область D обмежена сферичними поверхнями та, можливо, конічними поверхнями і площинами, що проходять через координатні осі, спрощення процесу обчислення потрійного інтеграла можливе за допомогою переходу від декартових координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ, які зв'язяні співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad 0 \le \rho < +\infty,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi]. \\ z = \rho \cos\theta, \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація сферичних координат та їх зв'язку з декартовими показана на рис. 19.

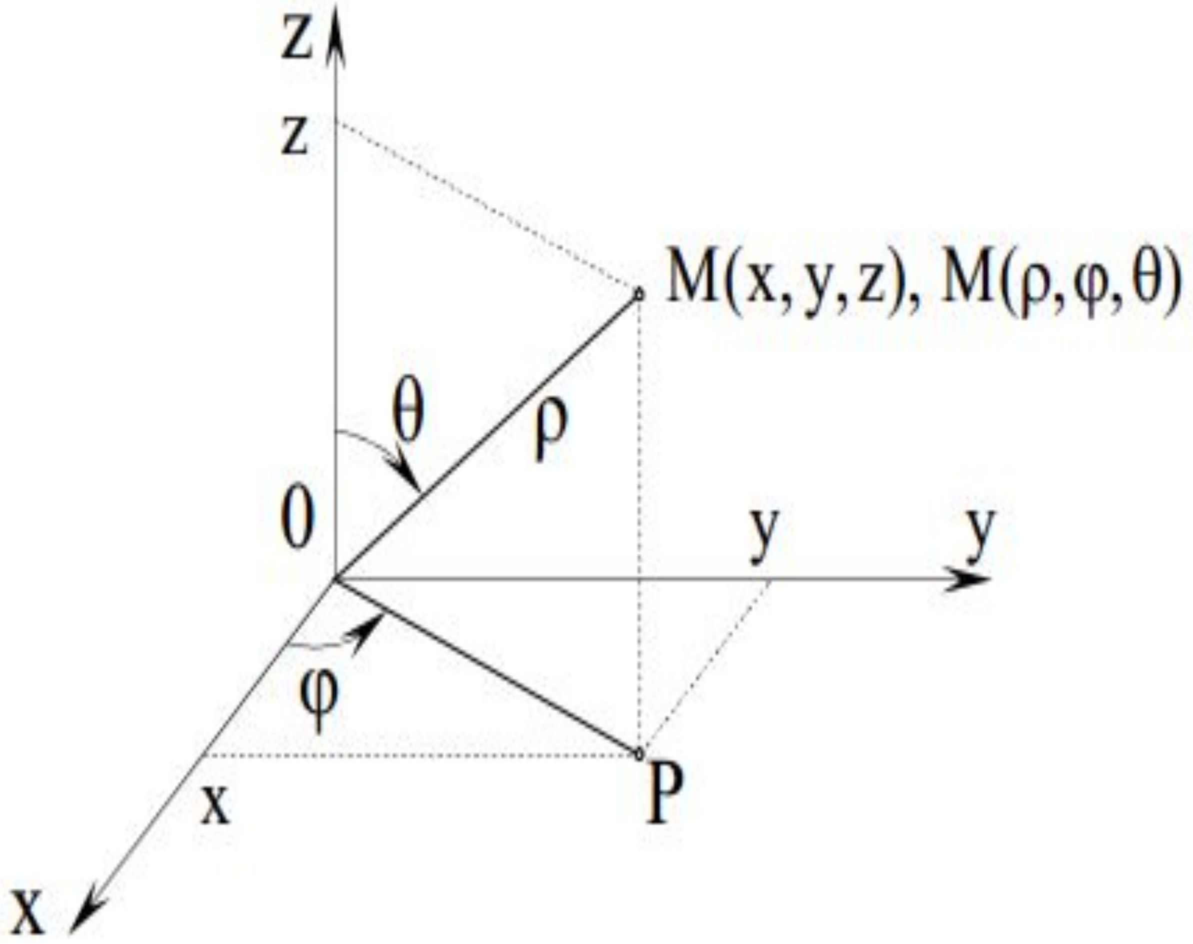


Рис. 19

Перехід від від декартових координат до сферичних для обчислення потрійного інтеграла $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ здійснюється у відповідності з формулою: $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz =$

$$= \iiint\limits_G f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Тут G – область, на яку відображається D при переході від декартових координат до сферичних. Цю область можна не рисувати, а обмежитись зображенням області D та геометричною інтерпретацією сферичних координат.

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_D \frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz$, якщо область D обмежнна поверхнями $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\frac{x^2+y^2}{3}$ (рис. 20).

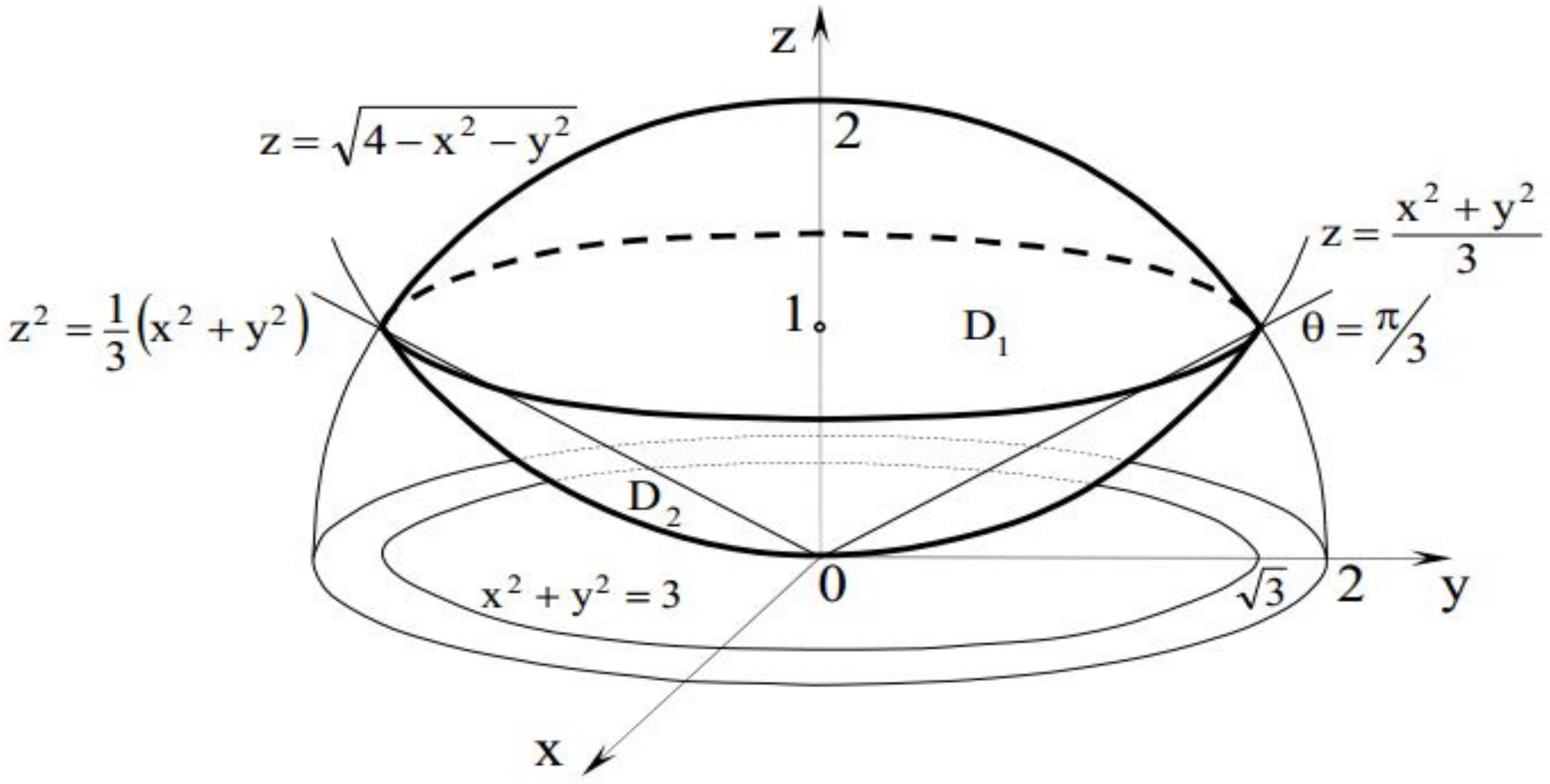


Рис. 20

Знаходимо спочатку лінію перетину верхньої половини сфери $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ та параболоїда обертання $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$

$$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\dfrac{x^2+y^2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=3z, \\ z\geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z^2+3z-4=0, \\ x^2+y^2=3z, \\ z\geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=1, \\ x^2+y^2=3. \end{cases}$$

Цю лінію можна розглядати як лінію перетину циліндра з твірними, паралельними осі OZ та напрямною $x^2 + y^2 = 3$, що лежить на координатній площині XOY. Проведемо через кожну з точок $(0, \sqrt{3}, 1)$ і $(0, -\sqrt{3}, 1)$ на знайденій лінії перетину та через початок координат пару прямих $3z^2 = y^2$. Якщо обертати ці прямі навколо осі OZ, одержимо конус обертання, який має рівняння $z^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2\right)$ і який має зі сферичною поверхнею ту ж саму лінію перетину. В сферичних координатах рівняння конуса набуває вигляду $\rho^2 \cos^2\theta = \frac{1}{3}\rho^2 \sin^2\theta$, або $\theta = \frac{\pi}{3}$. Цей кону ділить область D на дві частини – D_1 $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{3})$ та D_1 $(\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, тому внаслідок властивості адитивності ми можемо записати

$$\iiint\limits_{D} \frac{x^2 + y^2}{z^2} dxdydz = \iiint\limits_{D_1} \frac{x^2 + y^2}{z^2} dxdydz + \iiint\limits_{D_2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} dxdydz.$$

Переходимо тепер в правій частині до сферичних координат, враховуючи, що в цих координатах рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=4$ та параболоїда обертання $z=\frac{x^2+y^2}{3}$ матимуть відповідно наступний вигляд: $\rho=2$, $\rho=\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$. Тому на основі геометричної інтерпретації сферичних координат і рис. 20 одержуємо

$$\iiint\limits_D \frac{x^2+y^2}{z^2}dxdydz=\int\limits_0^{\pi/3} d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^2 \frac{\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta}\rho^2\sin\theta d\rho+$$

$$+\int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} \frac{\rho^2 \sin^2\theta}{\rho^2 \cos^2\theta} \rho^2 \sin\theta d\rho = 2\pi \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho +$$

$$+2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} d\theta \int_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} \rho^2 d\rho = -2\pi \int_0^{\pi/3} \frac{(1-\cos^2\theta) d(\cos\theta)}{\cos^2\theta} d\theta \cdot \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^2 +$$

$$+2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} \cdot \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} d\theta = -\frac{16\pi}{3} \left(-\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta \right) \Bigg|_0^{\pi/3} +$$

$$+\frac{2\pi}{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{27\cos^3\theta}{\sin^6\theta} d\theta = -\frac{16\pi}{3} \left(-2 - \frac{1}{2} + 1 + 1 \right) + 18\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{d(\sin\theta)}{\sin^3\theta} d\theta =$$

$$= \frac{8\pi}{3} + 18\pi \left. \frac{1}{-2\sin^2\theta} \right|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{8\pi}{3} - 9\pi \left(1 - \frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi}{3} + 3\pi = \frac{17\pi}{3}.$$