ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ.

РЕБУС

«СОБЫТИЕ»

СОБЫТИЕ

- Под СОБЫТИЕМ понимается явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий.

ПРИМЕР. Бросаем шестигранный игральный кубик. Определим события:

А {выпало четное число очков};

В {выпало число очков, кратное 3};

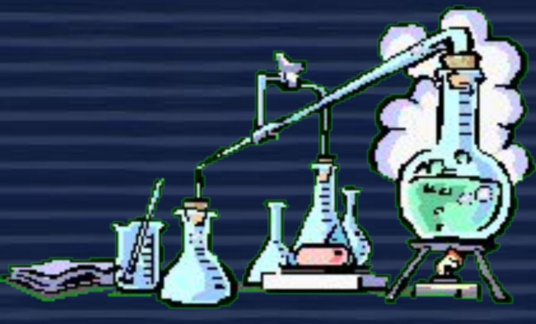
С {выпало более 4 очкков}.

Эксперимент (опыт)

- ЭКСПЕРИМЕНТ (или опыт) заключается в наблюдении за объектами или явлениями в строго определенных условиях и измерении значений заранее определенных признаков этих объектов (явлений).

ПРИМЕРЫ

- сдача экзамена,
- наблюдение за дорожно-транспортными происшествиями,
- выстрел из винтовки,
- бросание игрального кубика,
- химический эксперимент,
- и т.п.



СТАТИСТИЧЕСКИЙ

- Эксперимент называют СТАТИСТИЧЕСКИМ, если он может быть повторен в практически неизменных условиях неограниченное число раз.

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

- СЛУЧАЙНЫМ называют событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта). Обозначают заглавными буквами А, В, С, Д,… (латинского алфавита).

Рассмотрим несколько наиболее «излюбленных» в теории вероятностей примеров случайных экспериментов.

Опыт 1:

Подбрасывание монеты.

Испытание – подбрасывание монеты; события – монета упала «орлом» или «решкой».

«решка» - лицевая сторона монеты (аверс)

«орел» - обратная сторона монеты (реверс)

Опыт 2:

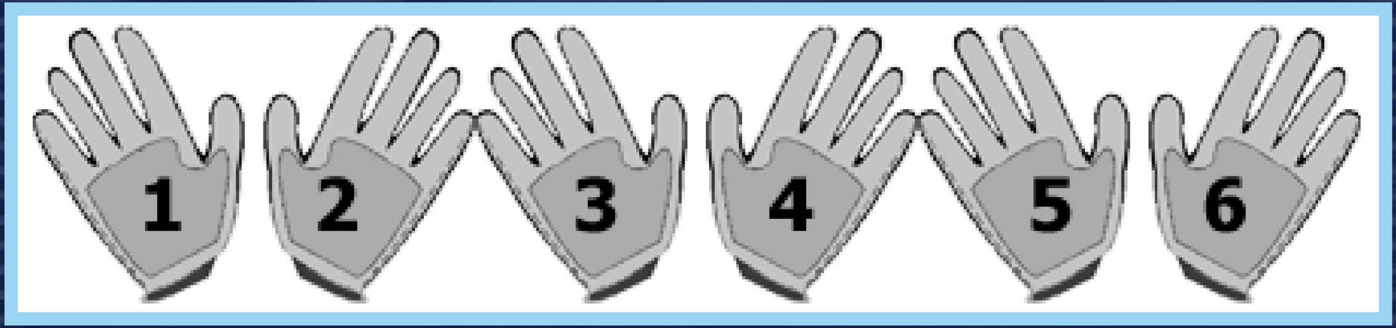
Подбрасывание кубика.

Это следующий по популярности после монеты случайный эксперимент.

Испытание – подбрасывание кубика; события – выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (и другие).

Опыт 3:

Выбор перчаток. В коробке лежат 3 пары одинаковых перчаток. Из нее, не глядя, вынимаются две перчатки.



Опыт 4:

«Завтра днем – ясная погода».

Здесь наступление дня – испытание, ясная погода – событие.

Типы событий

Типы событий

ДОСТОВЕРНОЕ	**СЛУЧАЙНОЕ**	**НЕВОЗМОЖНОЕ**
Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.	**Случайным** называют событие которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания.	Событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в результате данного испытания.

Примеры событий

досто-верные | **слу-чайные** | **невоз-можные**

достоверные	случайные	невозможные
1. ПОСЛЕ ЗИМЫ НАСТУПАЕТ ВЕСНА. 2. ПОСЛЕ НОЧИ ПРИХОДИТ УТРО. 3. КАМЕНЬ ПАДАЕТ ВНИЗ. 4. ВОДА СТАНОВИТСЯ ТЕПЛЕЕ ПРИ НАГРЕВАНИИ.	1. НАЙТИ КЛАД. 2. БУТЕРБРОД ПАДАЕТ МАСЛОМ ВНИЗ. 3. В УНИВЕРСИТЕТЕ ОТМЕНИЛИ ЗАНЯТИЯ. 4. ПОЭТ ПОЛЬЗУЕТСЯ ВЕЛОСИПЕДОМ. 5. В ДОМЕ ЖИВЕТ КОШКА.	1. 30 ФЕВРАЛЯ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ. 2. ПРИ ПОДБРАСЫВАНИИ КУБИКА ВЫПАДАЕТ 7 ОЧКОВ. 3. ЧЕЛОВЕК РОЖДАЕТСЯ СТАРЫМ И СТАНОВИТСЯ С КАЖДЫМ ДНЕМ МОЛОЖЕ.

Задание 1

Охарактеризуйте события, о которых идет речь в приведенных заданиях как достоверные, невозможные или случайные.

Петя задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) задумано четное число;

б) задумано нечетное число;

в) задумано число, не являющееся ни четным, ни нечетным;

г) задумано число, являющееся четным или нечетным.

Задание 2

В мешках лежит 10 шаров: 3 синих, 3 белых и 4 красных.

Охарактеризуйте следующее событие:

а) из мешка вынули 4 шара и они все синие;
б) из мешка вынули 4 шара и они все красные;
в) из мешка вынули 4 шара, и все они оказались разного цвета;
г) из мешка вынули 4 шара, и среди них не оказалось шара черного цвета.

ИСХОД

- **ИСХОДОМ** (или элементарным исходом, элементарным событием) называется один из взаимоисключающих друг друга вариантов, которым может завершиться случайный эксперимент.

Число возможных исходов в каждом из рассмотренных выше опытах.

- Опыт 1. – 2 исхода: «орел», «решка».
- Опыт 2. – 6 исходов: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Опыт 3. – 3 исхода: «обе перчатки на левую руку», «обе перчатки на правую руку», «перчатки на разные руки».

- **Однозначные исходы** **предполагают единственный результат того или иного события:** смена дня и ночи, смена времени года и т.д.

<u>Неоднозначные исходы</u> **предполагают несколько различных результатов того или иного события:**

при подбрасывании кубика выпадают разные грани; выигрыш в Спортлото; результаты спортивных игр.

Задание 3

Запишите множество исходов для следующих испытаний.

а) В урне четыре шара с номерами два, три, пять, восемь. Из урны наугад извлекают один шар.

б) В копилке лежат три монеты достоинством в 1 рубль, 2 рубля и 5 рублей. Из копилки достают одну монету.

в) В доме девять этажей. Лифт находится на первом этаже. Кто-то из жильцов дома вызывает лифт на свой этаж. Лифтовый диспетчер наблюдает, на каком этаже лифт остановится.

Основные элементы комбинаторики

1. **Размещение**

Это любое упорядоченное подмножество m из элементов множества n.
(Порядок важен).

2. Перестановки
Если m = n, то эти размещения называются перестановками.

3. **Сочетания**

Это любое подмножество из m – элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n – различных элементов.
(Порядок не важен).

Следствие. Число сочетаний из n элементов по n – m равно число сочетаний из n элементов по m, т.е.

Основные элементы комбинаторики

- ***Задача.1.***
- Сколько можно записать четырехзначных чисел,
- используя без повторения все 10 цифр?

- ***Решение:***

1) $A_{10}^{4}=\frac{10!}{6!}=5040$

- 2) Т.к. есть среди чисел 0, который не может стоять впереди, поэтому надо еще найти:

$$A_{9}^{3}=\frac{9!}{6!}=504$$

- 3)

$$A_{10}^{4}-A_{9}^{3}=5040-504=4536$$

Задача.2.
Пусть имеется множество, содержащие 4 буквы: {А,В,С,Д}. Записать все возможные сочетания из указанных букв по три.

Решение:
Здесь в число сочетаний не включены, например АВС, ВСА, т.к. у нас уже есть АВС, потому что порядок элементов в сочетании не учитываются.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4.$$

Задача.3.
Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение:
Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять

Способами.

4 определенные книги можно переставлять

способами.
Тогда всего перестановок по правилу умножения будет

Ошибка Даламбера.

Жан Лерон Даламбер
(1717 -1783)

Великий французский философ и математик Даламбер вошел в историю теории вероятностей со своей знаменитой ошибкой, суть которой в том, что он неверно определил равновозможность исходов в опыте всего с двумя монетами!

Ошибка Даламбера.

Опыт. Подбрасываем две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что они упадут на одну и ту же сторону?

Решение Даламбера:

Опыт имеет три равновозможных исхода:

1) обе монеты упадут на «орла»;
2) обе монеты упадут на «решку»;
3) одна из монет упадет на «орла», другая на «решку».

Из них благоприятными будут два исхода.

$$n = 3, m = 2, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$$

Правильное решение:

Опыт имеет четыре равновозможных исхода:

1) обе монеты упадут на «орла»;
2) обе монеты упадут на «решку»;
3) первая монета упадет на «орла», вторая на «решку»;
4) первая монета упадет на «решку», вторая на «орла».

Из них благоприятными будут два исхода.

$$n = 4, m = 2, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Опыт «Выбор перчаток». В коробке лежат 3 пары одинаковых перчаток. Из нее, не глядя, вынимаются две перчатки. Перечислите все равновозможные исходы.

Какой вариант решения правильный:

1-ый вариант:
3 исхода:
1) «обе перчатки на левую руку»,
2) «обе перчатки на правую руку»,
3) «перчатки на разные руки».

2-ой вариант:
4 исхода:
1) «обе перчатки на левую руку»,
2) «обе перчатки на правую руку»,
3) «первая перчатка на левую руку, вторая на правую»,
4) «первая перчатка на правую руку, вторая на левую».

Правило: природа различает все предметы, даже если внешне они для нас неотличимы.

Вывод:

Формула классической вероятности дает очень простой способ вычисления вероятностей. Однако простота этой формулы обманчива. При ее использовании возникают два очень непростых вопроса:

1. Как выбрать систему исходов опыта так, чтобы они были равновозможными, и можно ли это сделать вообще?
2. Как найти числа *m* и *n* и убедиться в том, что они найдены верно?

ПРОБЛЕМНЫЙ ВОПРОС 1:

А можно ли вычислить вероятность события с помощью ряда экспериментов?

Опыт человечества.

Вероятность что осень рыжая гораздо выше, чем белая

Весь наш жизненный опыт подсказывает, что любое событие считается тем более вероятным, чем чаще оно происходит. Значит, вероятность должна быть каким-то образом связана с частотой.

Частота случайного события.

Абсолютной частотой случайного события *A* в серии из *N* случайных опытов называется число N_A , которое показывает, сколько раз в этой серии произошло событие *A*.

Частота случайного события.

Относительной частотой случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов:

$$W(A) = \frac{N_A}{N}$$

где *A* – случайное событие по отношению к некоторому испытанию,
N раз проведено испытание и при этом событие *A* наступило в N_A случаях.

Примеры

Пример 1. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчика в такой серии наблюдений?

$$W(A) = \frac{515}{1000} \approx 0{,}515$$

Ответ: 0,515

Примеры

Пример 2. За лето на Черноморском побережье было 67 солнечных дней. Какова частота солнечных дней на побережье за лето? Частота пасмурных дней?

$$W(A)=\frac{67}{92}\approx 0{,}728 \qquad W(B)=\frac{25}{92}\approx 0{,}272.$$

Ответ: 0,728; 0,272.

ПРОБЛЕМНЫЙ ВОПРОС 2:

Может быть, относительную частоту и нужно принять за вероятность?

Фундаментальным свойством относительных частот является тот факт, что *с увеличением числа опытов относительная частота случайного события постепенно стабилизируется и приближается к вполне определенному числу, которое и следует считать его* ***вероятностью.***

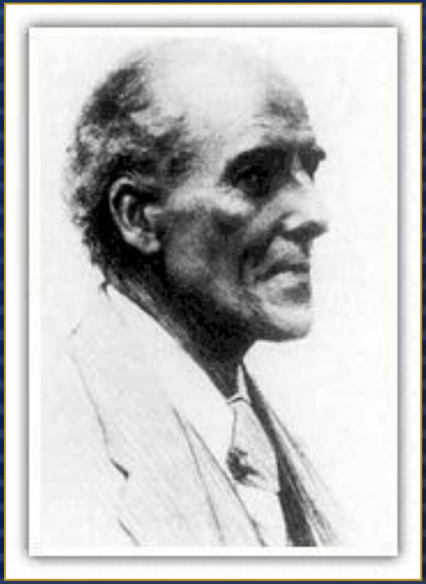
Проверка

Жорж Бюффон

Пример. Французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, и при этом герб выпал в 2048 случаях. Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$\mu = \frac{2048}{4040} = 0{,}50693..$$

Проверка



Карл Пирсон

Пример . Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету 24000 раз, причем герб выпал 12012 раз. Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$\mu = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005.$$

Статистическая вероятность

Вероятность случайного события приближенно равна частоте этого события, полученной при проведении большого числа случайных экспериментов: $P(A) = \frac{N_A}{N}$, где - N_A число испытаний, в которых наступило событие А, *N* – общее число испытаний.

Типы событий

Два события А и В называют **совместными**, если они могут произойти одновременно, при одном исходе эксперимента, и **несовместными**, если они не могут произойти одновременно ни при одном исходе эксперимента.

Пример. А – «идет дождь», В – «на небе нет ни облачка» – несовместные.

Пример. Коля и Саша играют в шашки. А – «Коля проиграл», В – «Саша выиграл», С – «Витя наблюдал за игрой» – совместные.

Действия над событиями

1. Суммой нескольких событий называется событие, состоящие в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.($A+B, A\cup B$ $A или B$)

Если события А и В совместны, то сумма А+В означает, что наступает событие А, или событие В, или оба события вместе.

Если события несовместны, то событие А+В заключается в том, что должны наступить А или В, тогда + заменяется словом «или». .

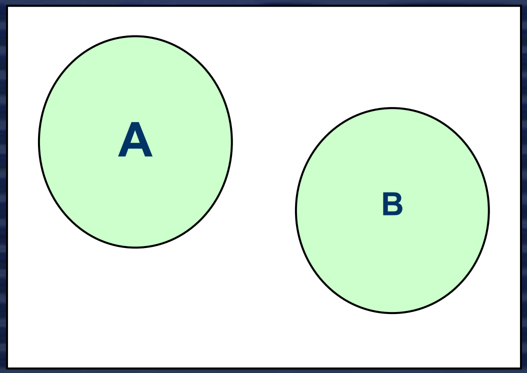
Пример. В урне находятся красные, белые и черные шары.

Вынимается один шар. Возможные события: А – «вынут красный шар», В – «вынут белый шар», С – « вынут черный шар».

Тогда А+В означает, что произошло событие «вынут не черный шар», В+С – «вынут не красный шар».

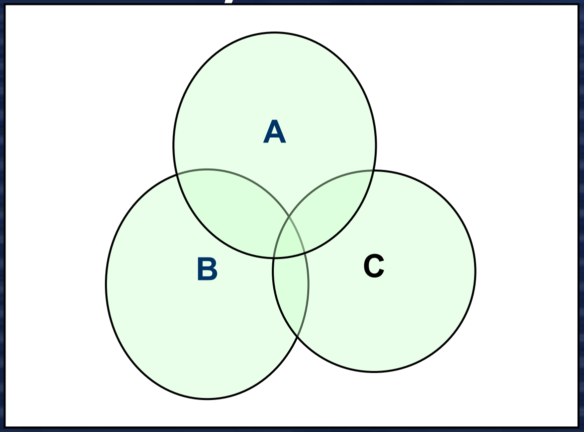
Диаграммы Венна

На диаграмме Венна сумму событий можно изобразить так (*прямоугольник – изображение множества всех возможных исходов опыта* Ω):



Диаграмма, иллюстрирующая сумму несовместных событий.

Ω



Диаграмма, иллюстрирующая сумму трех совместных событий.

Примеры суммы событий:

- пусть А - идет дождь, а В - идет снег, то (А + В) - либо дождь, либо снег, либо дождь со снегом, т. е. осадки;
- А - пошли на дискотеку; В - пошли в библиотеку, то А + В - пошли либо на дискотеку, либо в библиотеку, т. е. вышли из дома.

2. Произведением нескольких событий называется событие, состоящие в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

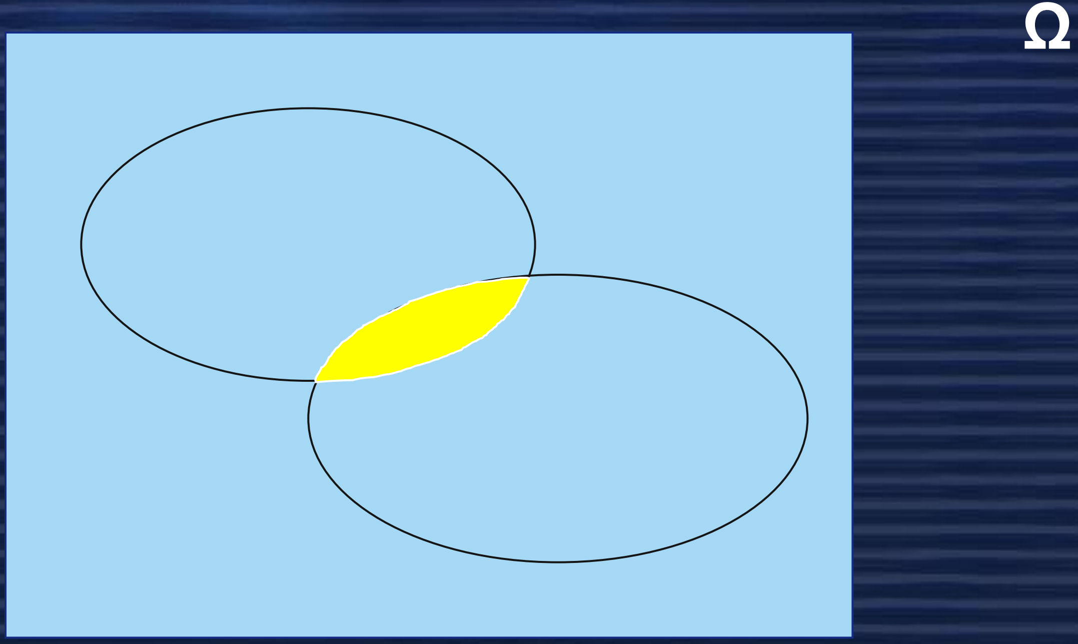
($A * B, A \cap B, AuB$ **).**

Означает союз «и» (ABC, это означает, что наступило событие A и B и C).

Пример. Пусть имеются следующие события: A – «из колоды карт вынута дама», B – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Значит, A*B означает «вынута дама пик».

Пример. Бросается игральный кубик. Рассмотрим следующие события: A – « число выпавших очков < 5», B – «число выпавших очков > 2», C – «число выпавших очков четное». Тогда A*B*C – «выпало 4 очка».

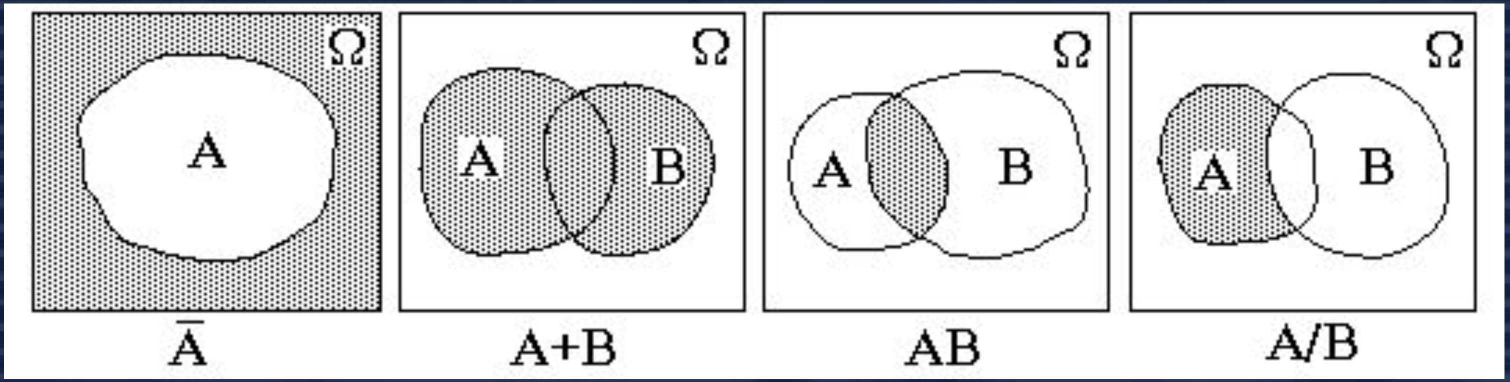
На диаграмме Венна пересечение (произведение) изображают так:



- пусть А - из урны вытянули белый шар, В - из урны вытянули белый шар, то АВ - из урны вытянули два белых шара;
- А - идет дождь, В - идет снег, то АВ - дождь со снегом;
- А - число четное, В - число кратное 3, то АВ - число кратное 6.

Диаграммы Венна

Графические изображения на плоскости соотношений между множествами называются *диаграммами Венна.*



Определение

Схема Бернулли — это когда производится n однотипных независимых опытов, в каждом из которых может появиться интересующее нас событие А, причем известна вероятность этого события P(A) = p. Требуется определить вероятность того, что при проведении n испытаний событие A появится ровно k раз.

Задачи, которые решаются по схеме Бернулли, чрезвычайно разнообразны: от простеньких (типа «найдите вероятность, что стрелок попадет 1 раз из 10») до весьма суровых (например, задачи на проценты или игральные карты). В реальности эта схема часто применяется для решения задач, связанных с контролем качества продукции и надежности различных механизмов, все характеристики которых длжны быть известны до начала работы.

Поскольку речь идет о независимых испытаниях, и в каждом опыте вероятность события A одинакова, возможны лишь два исхода:

A — появление события A с вероятностью p;
«не A» — событие A не появилось, что происходит с вероятностью $q = 1 - p$.
Важнейшее условие, без которого схема Бернулли теряет смысл — это постоянство. Сколько бы опытов мы ни проводили, нас интересует одно и то же событие A, которое возникает с одной и той же вероятностью p.

Теорема Бернулли. Пусть вероятность появления события А в каждом опыте постоянна и равна p. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А появится ровно k раз, рассчитывается по формуле:

где C_n^m— число сочетаний, q = 1 − p.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Вероятность того, что компьютер имеет скрытые дефекты, равна 0,2. На склад поступило 20 компьютеров. Какое событие вероятнее: что в этой партии имеется два компьютера со скрытыми дефектами или три?

Решение

Интересующее событие A — наличие скрытого дефекта. Всего компьютеров n = 20, вероятность скрытого дефекта p = 0,2. Соответственно, вероятность получить компьютер без скрытого дефекта равна q = 1 − 0,2 = 0,8.

Получаем стартовые условия для схемы Бернулли: n = 20; p = 0,2; q = 0,8.

Найдем вероятность получить два «дефектных» компьютера (k = 2) и три (k = 3):

$$p_{20}(2) = C_{20}^{2} p^{2} q^{18} = \frac{20!}{2!18!} \cdot 0{,}2^{2} \cdot 0{,}8^{18} \approx 0{,}137$$

$$p_{20}(3) = C_{20}^{3} p^{3} q^{17} = \frac{20!}{3!17!} \cdot 0{,}2^{3} \cdot 0{,}8^{17} \approx 0{,}41$$

Очевидно, $P_{20}(3) > P_{20}(2)$, т.е. вероятность получить три компьютера со скрытыми дефектами больше вероятности получить только два таких компьюетра. Причем, разница неслабая.

Случайные величины

- Под случайной величиной понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Возможные значения случайной величины образуют множество Е, которое называется множеством возможных значений случайной величины. Обозначения случайной величины: X, Y, Z; возможные значения случайной величины: x, y, z.
- В зависимости от вида множества Е случайные величины могут быть *дискретными* и *непрерывными*. СВ *X* называется ***дискретной***, если множество ее возможных значений Е – счетное или конечное. Если множество возможных значений СВ несчетно, то такая СВ является ***непрерывной***.

Закон распределения случайной величины

- ***Законом распределения СВ*** называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной. (То есть, всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями.)
- СВ будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т.е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое событие. Про случайную величину мы будем говорить, что она *подчинена данному закону распределения*.

- Любое правило (таблица, функция, график) позволяющее находить вероятность произвольных событий, в частности, указывающее вероятности отдельных значений случайной величины называется законом распределения случайной величины.

Ряд распределения дискретной случайной величины.

Рядом распределения дискретной случайной величины называется таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины X: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ и вероятности этих значений $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, где $p_i = P\{X = x_i\}$ – вероятность того, что в результате опыта СВ X примет значение x_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$).

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n	$\dots$
P	P_1	P_2	$\dots$	P_i	$\dots$	P_n	$\dots$

события $\{X = x_i\}$ образуют полную группу событий, поэтому справедливо *условие нормировки*

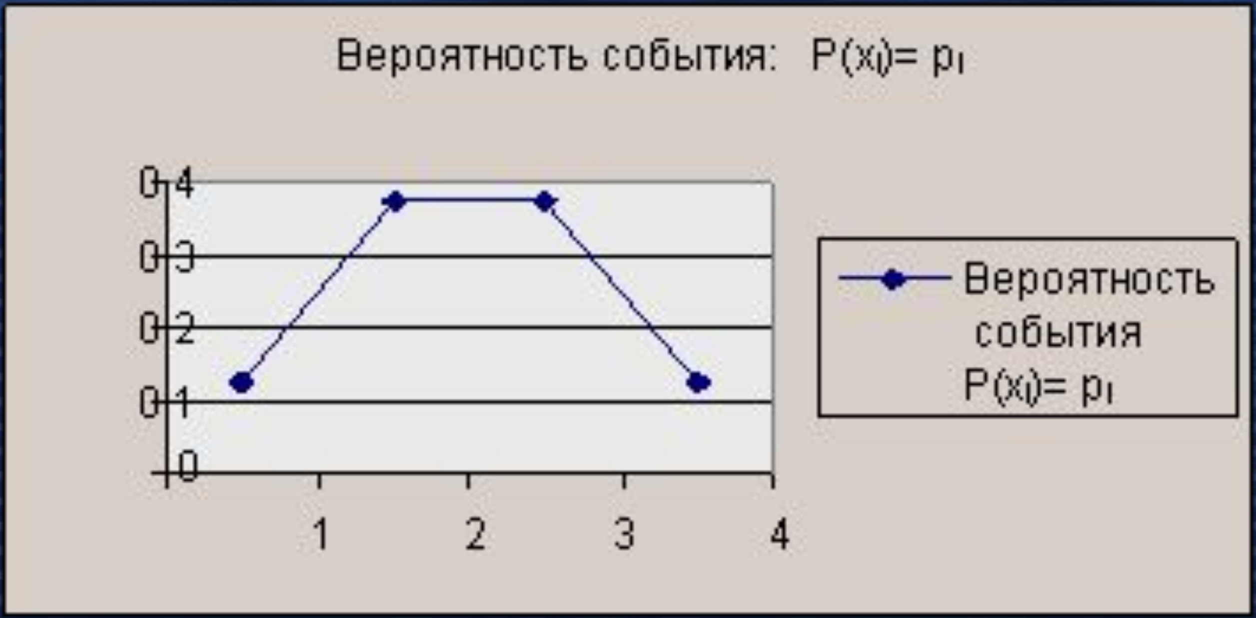
$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \qquad (2.1.)$$

Полагают, что $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_i < x_{i+1} \cdots$.

Функция распределения случайной величины

$$F(x) = P(X < x).$$

Многоугольник распределения



Пример

- В урне 8 шаров, из них 5 белых, остальные черные. Вынимают 3 шара. Найти закон распределения белых шаров в выборке.
- Решение:

X	0	1	2	3
p	1/56	15/56	30/56	10/56

Числовые характеристики СВ

- Характеристики положения:
- - математическое ожидание
- -мода
- -медиана
- Характеристики рассеяния:
- -дисперсия
- -среднеквадратическое отклонения

Математическое ожидание

$$MX = M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Свойства МО

$$MC = C$$

$$M(CX) = CMX$$

$$M(X+Y) = MX + MY$$

Дисперсия

$$DX = D(X) = D_x = M(X - MX)^2$$

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 p_i$$

Свойства дисперсии

$$DC = 0$$

$$DCX = C^2 DX$$

$$D(X + Y) = DX + DY$$

Среднеквадратическое отклонение

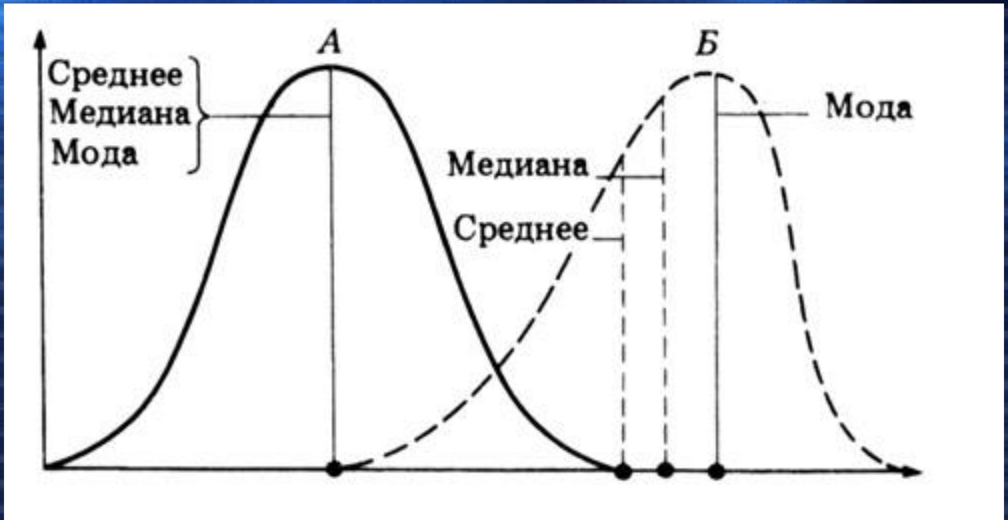
$$\sigma_x = \sqrt{DX}$$

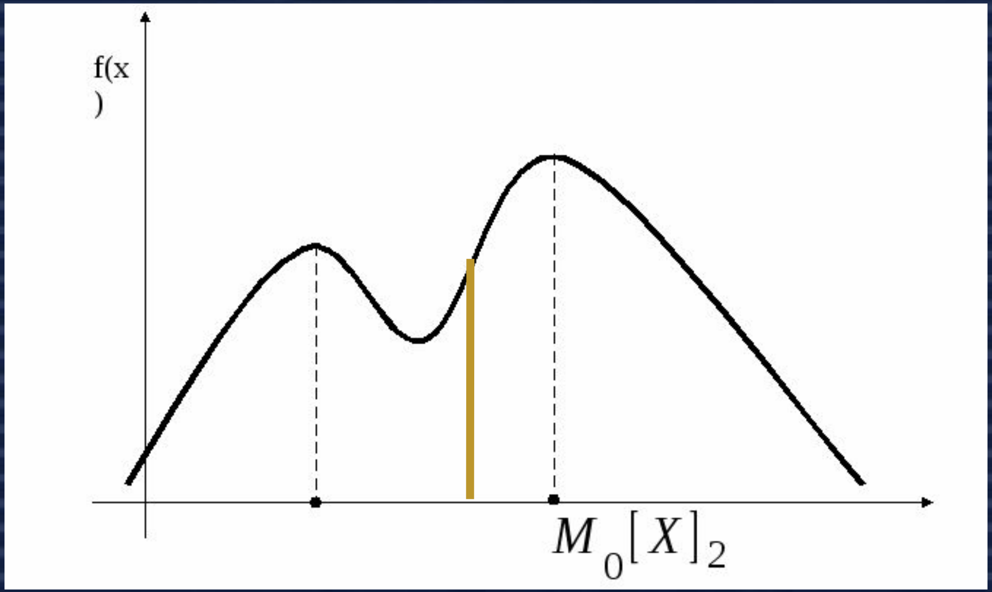
Мода и медиана

- Модой дискретной СВ X называется ее значение принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями. Обозначается M_0X. Для непрерывной СВ X это точка максимума.

- Медианой M_eX непрерывной СВ X называется такое ее значение X_p , для которого

$$P\{X < x_p\} = p\{X > x_p\} = \frac{1}{2}$$


А
Б
Среднее
Медиана
Мода
Мода
Медиана
Среднее


f(x
)
$M_0[X]_2$