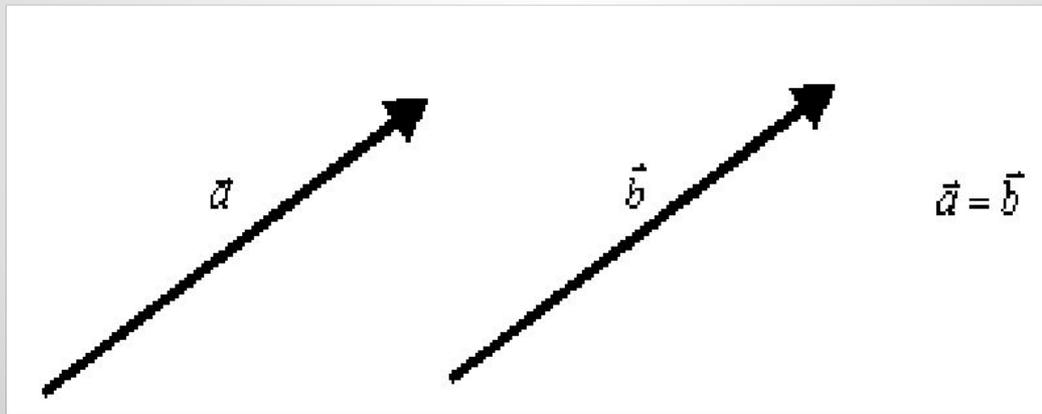


**Вектора. Пространства .
Скалярное, векторное и
смешанное
произведение векторов**

Векторы в пространства.

Определения:

1. Вектором называется направленный отрезок \overline{AB} с началом в т. A и концом в т. B .
2. Длиной (модулем) $|\overline{AB}|$ вектора \overline{AB} называется длина отрезка AB .
3. Векторы называются равными, если они имеют одинаковые модули



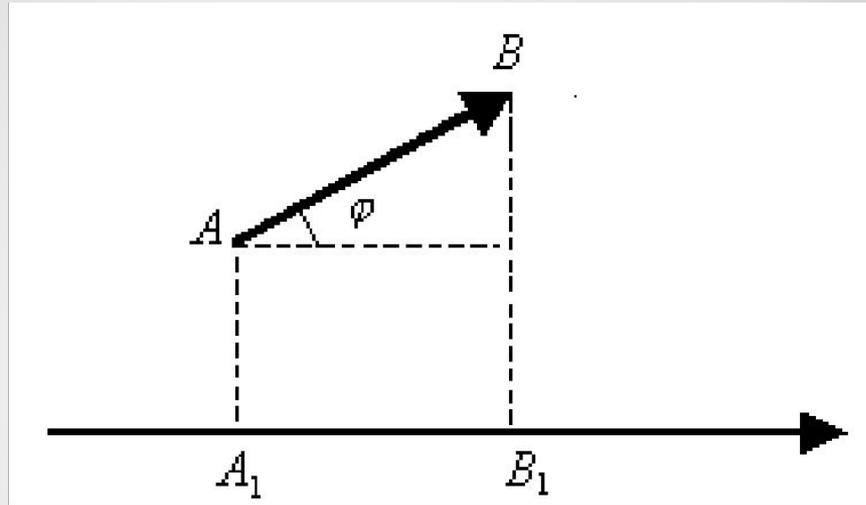
и одно и то же направление.

Из определения 3 следует, что любой вектор можно передвигать параллельно самому себе.

1. Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых называются коллинеарными (параллельными) и обозначаются $\vec{a} \parallel \vec{b}$
2. Если точки A и B совпадают, то $\overline{AB} = \vec{0}$ или $\overline{AB} = 0$ - нулевой вектор.
3. Если $|\vec{e}| = 1$, то \vec{e} - единичный вектор.
4. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называются компланарными, если они лежат в одной плоскости, или находятся в параллельных плоскостях.
5. Проекцией вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на ось l называется величина

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi ,$$

где φ - угол между направлениями оси l и вектора \vec{a}



Очевидно, что если A_1 и B_1 проекции точек A, B на ось l , то

$$A_1B_1 = np_1\bar{a}$$

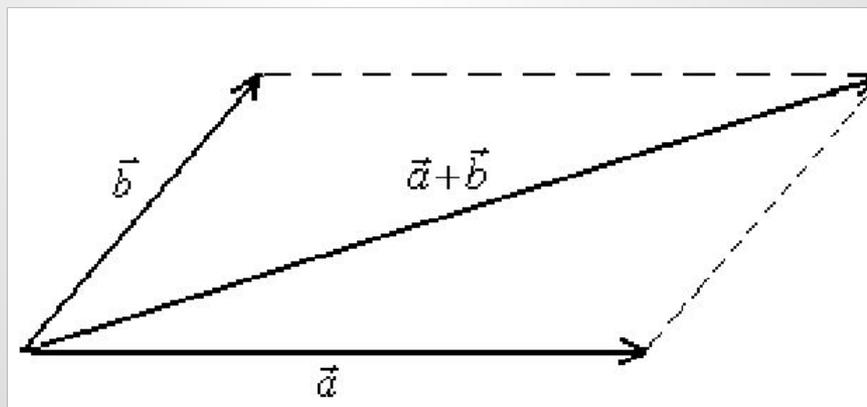
9. Произведением $\alpha \cdot \vec{a}$ числа α на вектор \vec{a} , называется вектор, модуль которого равен $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с \vec{a} , если $\alpha > 0$, и противоположно \vec{a} , если $\alpha < 0$

Очевидно, что

а) Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то существует число α , что $\vec{a} = \alpha \vec{b}$,

б) Если $\vec{a} \perp \vec{l}$ и $|\vec{l}| = 1$, то $\vec{a} = -|\vec{a}|\vec{l}$ или $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{l}$

10. Два вектора складываются по правилу параллелограмма.



Очевидно, что базисом в R_2 могут быть любые два неколлинеарных вектора, а в R_3 - любые три некомпланарных вектора.

Прямоугольная декартова система координат

Определение 15. Направляющими косинусами вектора \bar{a} называются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, где α, β, γ углы, составляющие вектором \bar{a} соответственно с координатными осями Ox , Oy , Oz .

Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Отсюда следует

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

З а м е ч а н и е 1. Так как три координаты (две координаты в R_2) однозначно определяют вектор, то многие геометрические задачи можно решать аналитически (через совокупность координат).

Скалярное произведение векторов

Определение 16. Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, вычисляемое по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha, \quad \alpha = \left(\hat{\vec{a}, \vec{b}} \right). \quad (4)$$

Так как $b \cos \alpha = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$

Свойства скалярного произведения

1. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
4. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
 $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$.

З а к л ю ч е н и е. С помощью скалярного произведения определяются:

1. Перпендикулярность двух векторов

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (6)$$

2. Косинус угла между векторами

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (7)$$

3. Проекцию одного вектора на другой

$$\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|} \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 2. Все вышеприведенные определения и формулы верны и в R_2 . Надо только отбросить координату **Z**.

Векторное произведение векторов

Определение 17. Векторным произведением вектора \bar{a} на \bar{b} назовем вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}; \bar{b}]$, определяемый по правилу:

$$1. |\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = ab \sin \alpha, \quad \alpha = \left(\hat{\bar{a}, \bar{b}} \right), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad (9)$$

1. $\bar{c} \perp \bar{a}, \quad \bar{c} \perp \bar{b}$
2. \bar{c} направлен в ту сторону от плоскости, образуемой векторами \bar{a} и \bar{b} , так, чтобы кратчайший поворот от \bar{a} к \bar{b} был против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \bar{c} .

Свойства векторного произведения

1. Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \mathbf{0}$.
2. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$
4. $m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b})$.

Смешанное произведение векторов

Определение 18. Смешанным произведением векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} называется число, равное скалярному произведению векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и \vec{c} , и записывается в координатной форме

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Так как $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, то смешанное произведение записывается в виде $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Так как $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, а

$h = np_{\vec{a}}\vec{c}$, где $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, и $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| np_{\vec{a}}\vec{c}$, то $V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$.

З а м е ч а н и е . С помощью смешанного произведения определяются:

1. Компланарность 3-х векторов

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

2. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

$$V = |\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}| \quad (14)$$