Правило Лопиталя (для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ ***или*** $\frac{\infty}{\infty}$***).*** *Если функции* $y = f(x)$ *и* $y = \varphi(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы Коши в некоторой окрестности точки* $x = x_0$, *стремятся к нулю (или* $\pm\infty$*) при* $x \to x_0$ *и существует* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то существует также* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *и эти пределы равны, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило Лопиталя справедливо и при $x_0 = \pm\infty$.

Если частное $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь дает в предельной точке неопределенность одного из двух названных видов и функции $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям, ранее указанным для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т.д. Однако следует помнить, что предел отношения самих функций может существовать, в то время как отношение производных не стремится ни к какому пределу.

Пример: Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

Решение: Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\cos x}{x}}=1.$$

Но предел вида

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$$

не существует, так как при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби могут принимать любые значения из отрезка $[0;2]$, а само отношение производных принимает любые неотрицательные значения. Следовательно, правило Лопиталя в этом случае неприменимо.

Пример: Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 5x}$.

Решение: Числитель и знаменатель данной дроби непрерывны, дифференцируемы и стремятся к нулю. Это означает, что можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{5\cos 5x}=\frac{3}{5}.$$

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$ получается из произведения функций $f_1(x) f_2(x)$, в котором $\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0$ и $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = \infty$. Это произведение легко преобразуется в частное вида $\dfrac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$ или $\dfrac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}$, что дает неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Если же $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \infty$ и $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = \infty$, то разность $f_1(x) - f_2(x)$ дает неопределенность вида $\infty - \infty$. Но $f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)\left(1 - \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)$.

Тогда, если $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, приходим к неопределенности вида $0 \cdot \infty$.

Пример: Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x}$ (неопределенность вида $0\cdot\infty$)$^{-}$.

Решение: Легко находим, что

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x} = 0.$$

Рассмотрим функцию вида $f(x)^{\varphi(x)}$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$, то имеем неопределенность вида 0^0.

2.Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$, приходим к неопределенности вида 1^∞.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$, получаем неопределенность вида ∞^0.

Для раскрытия этих неопределенностей применяется метод логарифмирования, который состоит в следующем. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = A.$

Так как логарифмическая функция непрерывна, то

$$\lim_{x \to x_0} \ln y = \ln \lim_{x \to x_0} y.$$

Тогда

$$\ln A = \lim_{x \to x_0} \left(\varphi(x) \ln f(x)\right)$$

И неопределенности трех рассматриваемых видов сводятся к неопределенности вида $0 \cdot \infty$.

Пример: Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение: Обозначим искомый предел через A. Тогда

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(e^x + x\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x + 1\right)/\left(e^x + x\right)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2, \quad A = e^2.$$

1. Геометрические и механические приложения производной. Значение производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту $k = tg\varphi$ касательной TT' к графику этой функции, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ (рис.1) (геометрический смысл производной).

Уравнение *касательной* TT' к графику функции $y = f(x)$ в его точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Прямая NN', проходящая через точку касания M_0 перпендикулярно к касательной, называется *нормалью* к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0 .$$

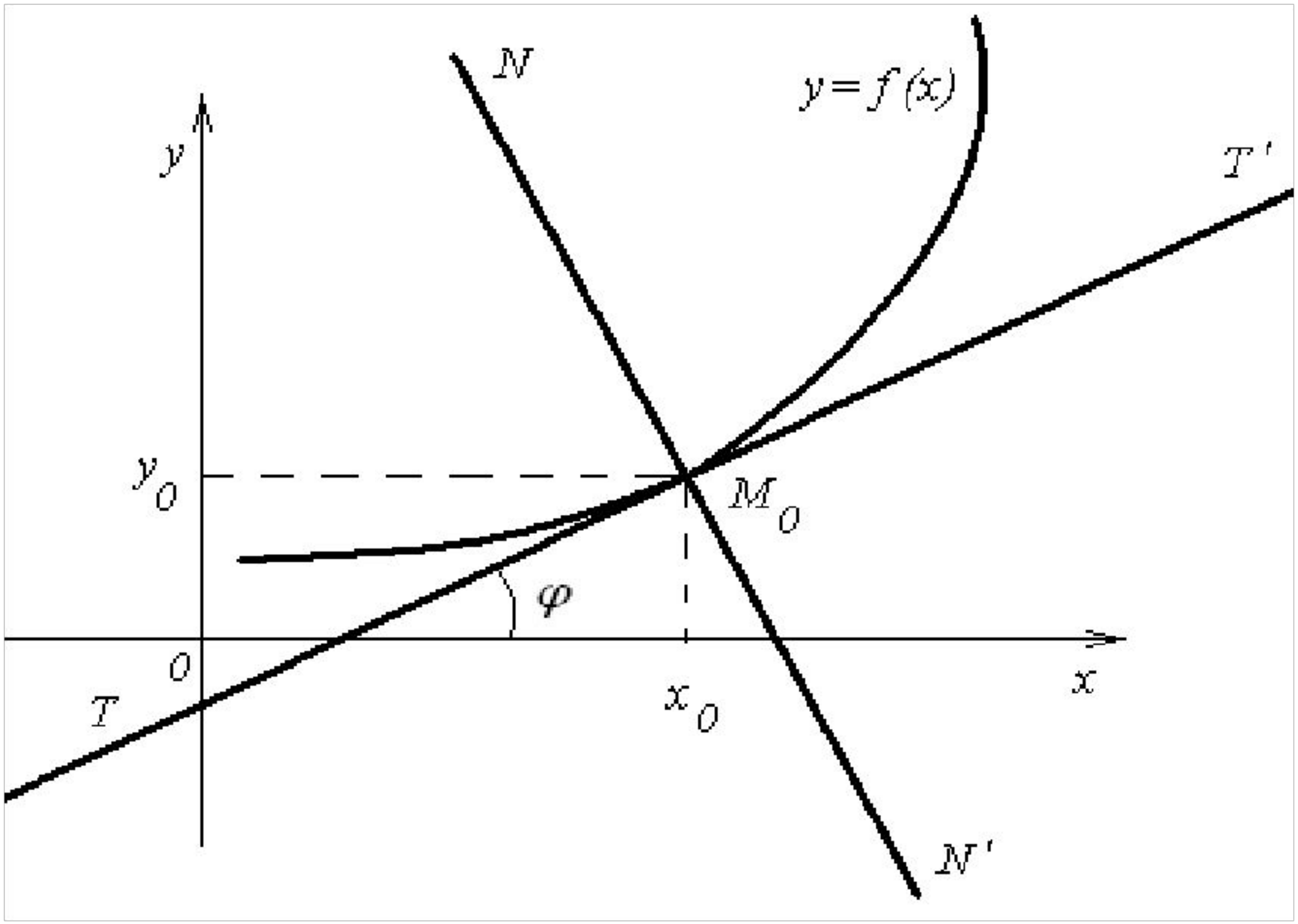

Рис.1

Пример. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение:

$$f(x) = x^3 + 2x - 2; \quad f'(x) = 3x^2 + 2; \quad f'(x_0) = f'(1) = 5$$

$$f(x_0) = f(1) = 1$$

уравнение касательной: $y - 1 = 5 \cdot (x - 1)$, или $y = 5x - 4$

уравнение нормали: $(x - 1) + 5 \cdot (y - 1) = 0$, или $5y + x - 6 = 0$.

Если $x = x(t)$ - функция, описывающая закон движения материальной точки, то первая производная $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ есть скорость, а вторая производная $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ - ускорение этой точки в момент времени t (механический смысл первой и второй производных).

2. Исследование поведения функций и их графиков.

Одной из важнейших прикладных задач дифференциального исчисления является разработка общих приемов исследования поведения функций.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в некотором интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Перечислим *признаки возрастания (убывания) функции*.

1. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке неотрицательна (неположительна), т.е. $f'(x) \geq 0 \left(f'(x) \leq 0\right)$.

2. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая внутри него функция имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Функция $y=f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) в некотором интервале, если для любых $x_1 < x_2$ из этого интервала $f(x_1) \le f(x_2)\,(f(x_1) \ge f(x_2))$.

Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами монотонности функции.* Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках ее области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими.*

Пример. Найти интервалы монотонности и критические точки функции $y = 2x^2 - \ln x$.

Решение: Данная функция определена при $x > 0$. Находим ее производную:

$$y' = 4x - 1/x = \left(4x^2 - 1\right)/x.$$

В области определения функции $y' = 0$ при $4x^2 - 1 = 0$, т.е. при $x_0 = 1/2$. Найденная точка разбивает область определения функции на интервалы $(0; 1/2)$ и $(1/2; +\infty)$; в первом из них $y' < 0$, а во втором $y' > 0$. Это означает, что в интервале $(0;\, 0{,}5)$ данная функция убывает, а в интервале $(0{,}5; +\infty)$ – возрастает.

Точка x_1 называется *точкой локального максимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ выполняется неравенство $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$. Точка x_2 называется *точкой локального минимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ справедливо неравенство $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$. Точки максимума и минимума называют *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции – ее *экстремальными значениями.*

Теорема (необходимый признак локального экстремума). *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.*

В точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = (x+1)^3$.

Решение: Производная данной функции $y' = 3(x+1)^2$ в точке $x = -1$ равна нулю. Но в этой точке функция экстремума не имеет, так как $(x+1)^3 > 0$ при $x > -1$, $(x+1)^3 < 0$ при $x < -1$, $(x+1)^3 = 0$ при $x = -1$. Итак, обращение в нуль производной функции не обеспечивает существования экстремума функции.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $y = |x|$.

Решение: Для данной непрерывной функции имеем: $y(0) = 0$. Так как при $x \neq 0$ $y = |x| > 0$, то $x = 0$ – точка минимума. Но функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Из рассмотренных примеров следует, что не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Однако если в какой-либо точке функция достигает экстремума, то эта точка всегда является критической.

Для отыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Теорема (первый достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет максимум. Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$, положительна, то при $x = x_0$ данная функция имеет минимум.

Следует иметь в виду, что указанные неравенства должны выполняться в достаточно малой окрестности критической точки $x = x_0$. Схема исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью первой производной может быть записана в виде таблицы (см. табл. 1).