Лекция 12. Формула Тейлора. Остаточный член в виде Лагранжа. Разложение элементарных функций.

Формула Тейлора

Если f(x) - непрерывна в т. x_0, то справедливо разложение

$$f(x)=f(x_0)+\underline{o}(1), \text{ при } x\to x_0,$$

если же f(x) дифференцируема в т. x_0 тогда имеем,что f(x)= $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\underline{o}(x-x_0)$, при $x\to x_0$.

Оказывается, что если функция несколько раз дифференцируема, то справедлива теорема.

Теорема. О разложении по формуле Тейлора.

Если функция f(x) в т. x_0 и некоторой ее окрестности «n» раз дифференцируема, то она в окрестности т. x_0 представима в виде:

$f(x)=P_n(x)+\underline{o}((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$, где

$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ (многочлен Тейлора).

Доказательство.

Так как функция n раз дифференцируема в т. x_0, то существуют $f(x_0)$, $f'(x_0)$; $f''(x_0)\ldots f^{(n)}(x_0)$.

Рассмотрим многочлен $P_n(x)=a_0+a_1\cdot(x_1-x_0)+a_2\cdot(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n$. Подберем коэффициенты этого многочлена так, чтобы:

$$\left.\begin{array}{c} P_n(x_0)=f(x_0) \\ P_n'(x_0)=f'(x_0) \\ --- \\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow a_0=f(x_0);\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!};\ a_2=\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!};\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

так как

$P'_n(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}$

$P''_n(x)=2a_2+\ldots+n(n-1)a_n\cdot(x-x_0)^{n-2}$

$P^{(n)}_n=\underbrace{n\cdot(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1}_{n!}\cdot a_n$.

Получим: $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^k$ - многочлен Тейлора.

Рассмотрим функцию $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$. Она такова, что $r_n(x_0)=r'_n(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0$. Применив правило Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_0(x)}{(x-x_0)^n}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n{}'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\ldots=$$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r^{(n)}(x)}{n!}=0\overset{\text{def}}{\Rightarrow} r_n(x)=\underline{0}((x-x_0)^n)$ - бесконечно-малая более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$, а значит получена формула

$f(x)=P_n(x)+\underline{o}((x-x_0)^n)$ - формула Тейлора.

Функция $r_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора. Если остаточный член $r_n(x)=\underline{o}((x-x_0)^n)$, то такая форма записи остаточного члена называется формой записи Пеано. Если же $\exists f^{(n+1)}(x)$, то $r_n(x)$ можно представить в форме записи Лагранжа $r_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

где θ - некоторое число из окрестности точки x_0.

Теорема. О наилучшем приближении дифференцируемой функции многочленам.

Если «n» раз дифференцируемая функция в окрестности точки x_0 представлена в виде

$f(x)=P_n(x)+\underline{o}((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$, то многочлен $P_n(x)$, коэффициенты которого $a_n=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, k=0,1,...n, - многочлен Тейлора.

Многочлен Тейлора является наилучшим из всех других многочленов для приближения функции в окрестности т. x_0, так как разность $f(x)-P_n(x)=\underline{o}((x-x_0)^n)$ можно сделать сколь угодно малой.

Если же $x_0=0$, то формула Тейлора преобразуется в формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}}{n!}x^n+\underline{o}(x^n).$$

многочлен Маклорена

Сделав замену переменных $x-x_0=\theta$ всегда можно перейти от формулы Тейлора к формуле Маклорена и наоборот. А поэтому для разложений на практике пользуются таблицей разложений по формуле Маклорена как более простой.

Таблица разложений:

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{K!} + \underline{\theta}(x^{n})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k+1}}{(2K+1)!} + \underline{''}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2K)!} + \underline{o}(x^{2n+1})$$

$$tg x = x + \frac{x^{3}}{3} + \frac{2}{15}x^{5} + \frac{17}{315}x^{7} + \ldots + \underline{o}(x^{2n+1})$$

$$ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{x^{k+1}}{K+1} + o(x^{n+1})$$

$$arcsin x = x + \frac{1}{2}x^{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{7} + \ldots + \underline{o}(x^{2n+1})$$

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot(2n+1) = (2n+1)!!$$

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n = (2n)!!$$

$$arccos x = \frac{\pi}{2} - arcsin x$$

$$arctg x = x - \frac{x^{3}}{3} + \frac{x^{5}}{5} - \frac{x^{7}}{7} + \ldots + \underline{o}(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{3} + \ldots + \underline{o}(x^{n})$$