

The background is a dark blue gradient with a starry texture. On the left side, there are several overlapping circular elements. A prominent one is a large circle with a scale around its perimeter, ranging from 140 to 260 in increments of 10. Other circles are smaller and some have dashed outlines or arrows indicating rotation. The overall aesthetic is technical and mathematical.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

СЕМИНАР 5

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , для всех $x \neq x_0$. Тогда функция называется *непрерывной в точке x_0* , если выполняются следующие условия:

а) существует $f(x_0)$;

б) существуют и конечны односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A^-$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A^+$;

в) $A^- = A^+ = f(x_0)$.

Эти три условия можно объединить в одно высказывание: функция непрерывна в точке, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

т.е. предел функции в точке существует и равен значению функции в этой точке.

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Если хотя бы одно из условий а) - в) не выполняется, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не является непрерывной, и точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Точки разрыва делятся на два типа: I и II рода.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A^-$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A^+$ конечны, то x_0 – *точка разрыва I рода*.

- если $A^- \neq A^+$, то в точке x_0 *неустранимый* разрыв I рода ("скачок");
- если $A^- = A^+ \neq f(x_0)$, или $A^- = A^+$, а $f(x_0)$ не существует, то в точке x_0 *устранимый* разрыв I рода.

Если хотя бы одно из A^- или A^+ равно ∞ или не существует, то x_0 – *точка разрыва II рода*.

Элементарные функции непрерывны во всех точках своей области определения.

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Исследование функции на непрерывность проводится по следующей схеме:

1. Выделить точки возможного разрыва функции. Для элементарной функции это точки, в которых функция не определена. Для составной функции, например:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & -\infty < x \leq a \\ f_2(x), & a < x < +\infty \end{cases}, \text{ где } f_1(x) \text{ и } f_2(x) \text{ - элементарные функции, определенные на } (-\infty, a] \text{ и } (a, +\infty), \text{ соответственно;}$$

это точки, в которых происходит смена аналитических выражений, с помощью которых задана неэлементарная функция (в приведенном примере это точка $x = a$).

2. Найти односторонние пределы функции в каждой из выделенных точек $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ и значения функции, если это возможно.
3. Сравнить значения односторонних пределов и значения функции в точках возможного разрыва и сделать вывод.
4. Начертить эскиз графика функции. Для уточнения графика функции можно найти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пример 1. Исследуем на непрерывность функцию $y = \frac{\sin x}{x}$.

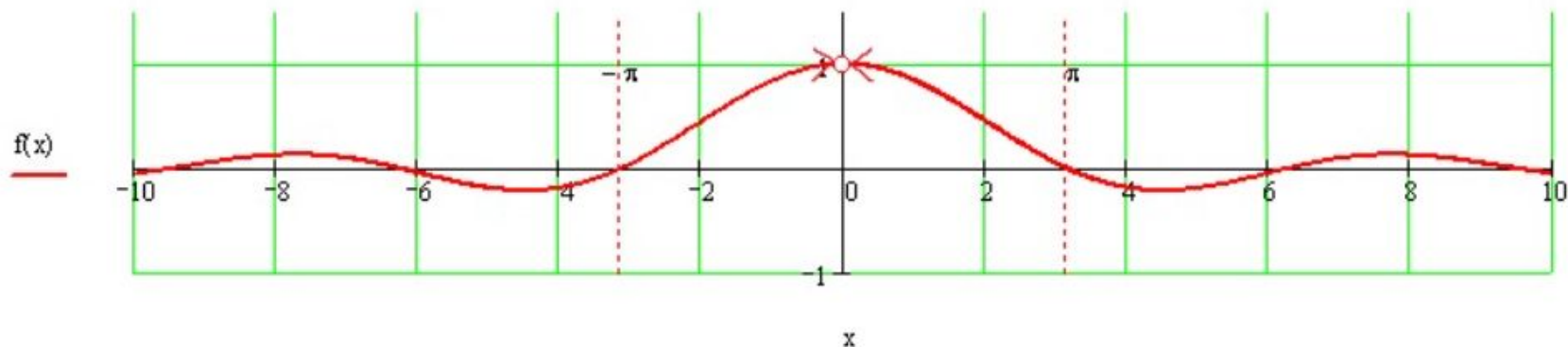
Решение. Данная элементарная функция определена и непрерывна при всех $x \neq 0$.

Так как $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел), то $x = 0$ является точкой разрыва I рода, устранимого.

График рассматриваемой функции пересекает ось Ox в точках, в которых $\sin x = 0$, т.е. при $x = \pi n$.

Предел на бесконечности: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

График функции.



ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пример 2. Исследуем на непрерывность функцию $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Решение. Данная функция является элементарной, определенной при всех $x \neq 0$, следовательно, при таких значениях x она является непрерывной.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = [\operatorname{arctg} \frac{1}{-0}] = [\operatorname{arctg}(-\infty)] = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = [\operatorname{arctg} \frac{1}{+0}] = [\operatorname{arctg}(+\infty)] = \frac{\pi}{2}.$$

Односторонние пределы конечны и не равны, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва I рода, неустранимого.

Пределы на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = [\operatorname{arctg} \frac{1}{\infty}] = \operatorname{arctg}(0) = 0.$$

График функции:



ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пример 3. Исследуем на непрерывность функцию $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. Данная функция является элементарной, определенной при всех $x \neq 1$, следовательно, она является непрерывной при $x \neq 1$.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 1$:

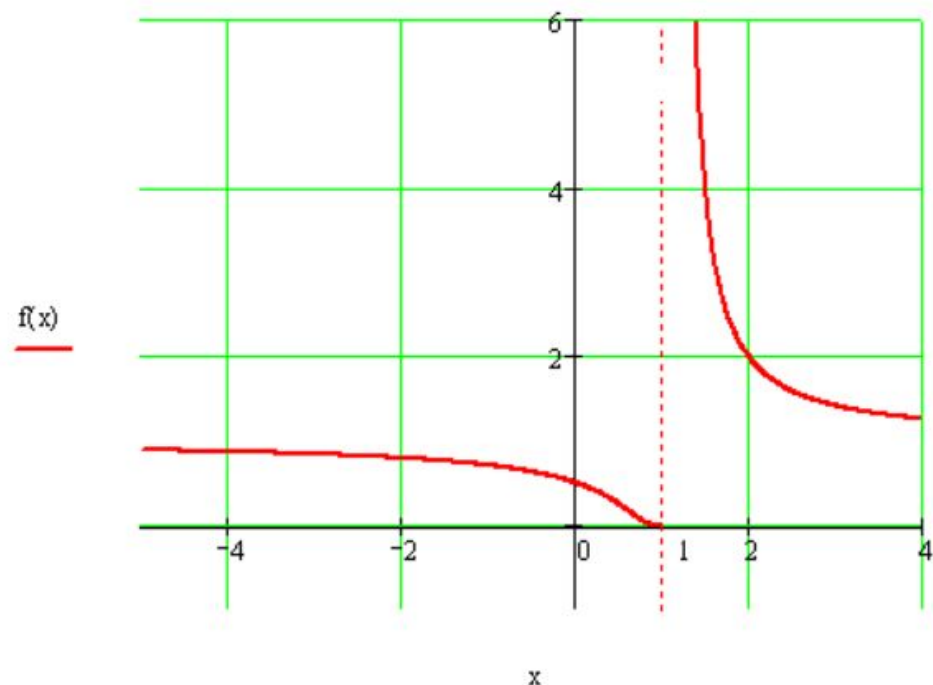
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left[2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left[2^{\frac{1}{1+0-1}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} \right] = +\infty.$$

Так как предел справа равен $+\infty$, то $x = 1$ – точка разрыва II рода.

Для уточнения графика найдем пределы на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left[2^{\frac{1}{\infty-1}} = 2^{\frac{1}{\infty}} \right] = 2^0 = 1.$$



ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x + 2, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x < 1, \\ 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

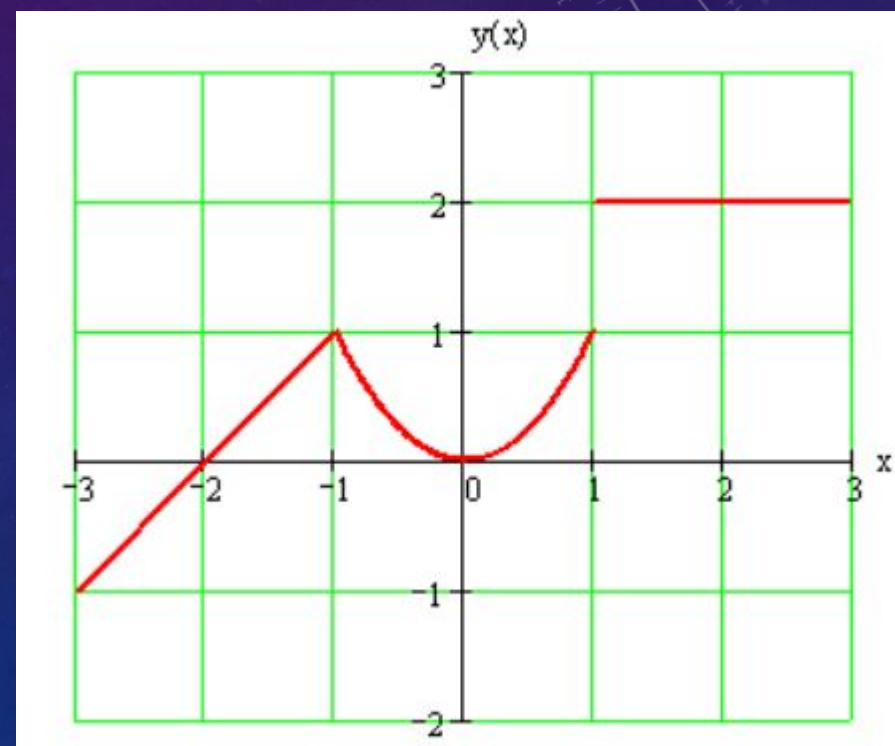
Решение. Данная функция не является элементарной, но в интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ она задана одним аналитическим выражением, определена в каждом из этих интервалов, следовательно, непрерывна. Разрыв у данной функции может быть в точках $x = -1$ и $x = 1$. Найдем односторонние пределы и значение функции в каждой из этих точек.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \lim_{x \rightarrow -1-0} (x + 2) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} y = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 = 1, \\ y(-1) = x^2|_{x=-1} = 1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = -1$ равны между собой и равны значению функции в этой точке, следовательно, $x = -1$ является точкой непрерывности функции.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2 = 2, \\ y(1) = 2.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = 1$ конечны и не равны между собой, следовательно, $x = 1$ – точка разрыва первого рода, неустранимого.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точка возможного разрыва функции $y = \frac{1}{(x+2)^2}$: .

В этой точке предел слева равен: , предел справа равен: .

Таким образом, данная точка является точкой .

- Ответы: $x = -2$; $+\infty$; $+\infty$; точка разрыва второго рода

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точка возможного разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{x-1}}$: .

В этой точке предел слева равен: , предел справа равен: .

Таким образом, данная точка является точкой .

- Ответы: $x = 1$; 0 ; $+\infty$; точка разрыва второго рода

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точка возможного разрыва функции $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$: .

В этой точке предел слева равен: , предел справа равен: .

Таким образом, данная точка является точкой .

- Ответы: $x = 0; 1; 0$; точка разрыва первого рода, неустранимая

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Точка возможного разрыва функции $y = x \sin \frac{1}{x}$: .

В этой точке предел слева равен: , предел справа равен: .

Таким образом, данная точка является точкой .

- Ответы: $x = 0$; 0 ; 0 ; точка разрыва первого рода, устранимая

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Исследуйте на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ \sin x, & -\pi \leq x < 0, \\ x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

в точках $x = -\pi$ и $x = 0$.

В точке $x = -\pi$ предел слева равен: , предел справа равен: , значение функции в этой точке равно .

Таким образом, данная точка является точкой .

В точке $x = 0$ предел слева равен: , предел справа равен: , значение функции в этой точке равно .

Таким образом, данная точка является точкой .

Ответы: 0; 0; 0; точка непрерывности;

0; 1; 1; точка разрыва первого рода, неустранимого.