

Высшая математика (практика)



Кафедра
Информационно-компьютерных
технологий

Кузьмина Ольга Борисовна

KuzminaOB@edu.mubint.ru

Порядок изучения дисциплины

Адрес ресурса:

<http://connect.mubint.ru>

The screenshot displays the 'Учебный портал Академии МУБиНТ' (Educational Portal of the MUBINT Academy). The browser address bar shows the URL: connect.mubint.ru/admin/course/curriculum/info?curriculum-id=12860405&sco-id=...

The page features a navigation menu with the following items: Главная, Содержимое, **Обучение**, Собрания, Управление мероприятиями, Отчеты, and Администрирование. Below this is a sub-menu: Общее обучение, Обучение пользователей, **Мое обучение**, Каталог обучений, and Пользователи и группы.

The breadcrumb trail indicates the current path: **Обучение пользователей** > **Головной вуз ИКТ** > **KuzminaOB** > **Высшая математика**.

At the top right, the user's profile is shown: 'Мой профиль | Справка | Выход: Кузьмина Ольга Борисовна'.

The main content area is titled 'Сведения об учебной программе' (Course Information). It includes a list of course elements with checkboxes and icons:

- ☐ [е-УМК Алгебра и теория чисел \(Математика\)](#)
- ☐ [е-УМК Высшая математика](#)
- ☐ [Математика - самопроверка](#)
- ☐ [Математика - зачет](#)
- ☐ [Математика - зачет \(1\)](#)
- ☐ [Математика заочное - итоговый](#)
- ☐ [Математика заочное - итоговый \(1\)](#)
- ☐ [Математика заочное - итоговый \(2\)](#)
- ☐ [Анкета обратной связи для студентов](#)

On the right side, there is a form for 'Сведения об учебной программе' (Course Information) with the following fields:

- Имя:
- Идентификатор:
- Сводка:
- Дата начала:
- Дата окончания:
- URL-адрес:

At the bottom right, there is a section titled 'Требования к прохождению' (Requirements for completion).

Работа на сайте преподавателя Кузьминой О.Б.: материалы для практических работ

The screenshot shows a SharePoint interface for the 'АКАДЕМИЯ МУБИНТ' website. The top navigation bar includes 'Office 365' and 'SharePoint'. The left sidebar contains a menu with 'Общие документы' highlighted. The main content area displays a list of documents under the heading 'Заочное (индивидуальное обучение) ▸ Высшая математика'. The document list includes titles, file icons, and sizes.

Имя	Размер файла
Высшая математика_Задания на практику_ИО ✱	197 KB
Высшая математика_лекция-1	13797 KB
Кремер Высшая математика для экономистов Практикум 2006	16275 KB
Кремер Математика для экономистов и менеджеров 2015	31726 KB
Математика Учебное пособие МУБИНТ	941 KB

Работа на сайте преподавателя Кузьминой О.Б.: Отчеты по практическим работам

Office 365 SharePoint

ОБЗОР ФАЙЛЫ БИБЛИОТЕКА

АКАДЕМИЯ МУБИН

Сайты преподавателей Сайт Кузьминой Ольги Борисовны ИЗМЕНИТЬ ССЫЛКИ

Студенческие работы и отчеты ▸ Отчеты заочников (индивидуально)

Главная
Информация для студентов
Общие документы
БРС (бально-рейтинговая система)
Студенческие работы и отчеты
Полезные ссылки
Вопросы от студентов
Тематические обсуждения
Видеолекции
Корзина

Создать Отправить Синхронизировать Поделиться Дополнительно

Мои отчеты для преподавателя Работы и отчеты студентов

Поиск файла

Имя	Кем создано	Кем изменено	Изменено
✓ Высшая математика	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	06.11.2015
Финансовые вычисления	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	29.09.2015
Разработка и стандартизация ПС и ИТ	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	29.09.2015
Информационный менеджмент	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	29.09.2015
Теория систем и системный анализ	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	29.09.2015
Проектный практикум	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	29.09.2015
✓ Программная инженерия	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	☐ Кузьмина Ольга Борисовна	21.09.2015

Перетащите сюда файлы для отправки

ИЗМЕНИТЬ ССЫЛКИ

Работа на сайте преподавателя Кузьминой О.Б.: Ведомость БРС

Office 365SharePoint

ОБЗОРФАЙЛЫБИБЛИОТЕКА

ОБЩИЙ ДОСТУПППОДПИСАТЬСЯ

АКАДЕМИЯ МГУБМНУ

Сайты преподавателейСайт Кузьминой Ольги БорисовныИЗМЕНИТЬ ССЫЛКИ

БРС (балльно-рейтинговая система) ▶ БРС заочное (индивидуальное)

ГлавнаяИнформация для студентовОбщие документыБРС (балльно-рейтинговая система)Студенческие работы и отчетыПолезные ссылкиВопросы от студентовТематические обсужденияВидеолекцииКорзинаИЗМЕНИТЬ ССЫЛКИ

СоздатьОтправитьСинхронизироватьПоделитьсяДополнительно

Все документыПоиск файла

Имя	Дисциплина	Форма обучения	Изменено
Архив БРС 2015-2016			20.09.2016
Вм_Кузьмина О.Б._2015-2016_должники	Высшая математика	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	14.11.2016
Пи_Кузьмина О.Б._2016-2017	Программная инженерия	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	13.10.2016
Пи_Кузьмина О.Б._2016-2017_Кострома	Программная инженерия - Кострома	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	13.10.2016
Пп_Кузьмина О.Б._2016-2017	Проектный практикум	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	4 ч назад
Пп_Кузьмина О.Б._2016-2017_Кострома	Проектный практикум - Кострома	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	32 мин назад
РиспсиИ_Кузьмина О.Б._2016-2017	Разработка и стандартизация ПС и ИТ, 23Б4ПИ-31	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	23.12.2016
РиспсиИ_Кузьмина О.Б._2016-2017_Кострома	Разработка и стандартизация ПС и ИТ, К3Б4ПИ-31	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	23.12.2016
Тсиса_Кузьмина О.Б._2016-2017	Теория систем и системный анализ, 23Б4ПИ-31	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	23.12.2016
Тсиса_Кузьмина О.Б._2016-2017_Кострома	Теория систем и системный анализ, К3Б4ПИ-31	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	23.12.2016
Фв_Кузьмина О.Б._2015-2016_должники	Финансовые вычисления	БРС заочная форма (индивидуальное обучение)	14.11.2016

Задание 1: Дана матрица **C**. Определить ранг матрицы **C**.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1) * 2 + (2) \\ (3) - (1) \\ (4) + (1) \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (3) - (2) * 5 \\ (4) - (2) * 6 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (4) - (3) \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang C = 3

Задание 2 (1): Дана квадратная матрица **A** третьего порядка. Вычислить определитель матрицы **A**.

Определитель третьего порядка это число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Например,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 \cdot 4 - 8 \cdot 0 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 6 = \\ &= 0 + 56 + 60 - 0 - 70 - 18 = 28 \end{aligned}$$

Задание 2 (2) : Найти матрицу A^{-1} .

Матрица A^{-1} называется **обратной** к матрице A , если выполняется условие
 $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Теорема: Матрица A имеет обратную A^{-1} тогда и только тогда, когда A – невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$.

Способ вычисления обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений:

Алгоритм вычисления:

- 1) вычисляют определитель матрицы $\det A$;
- 2) для каждого элемента a_{ij} вычисляют алгебраические дополнения A_{ij} ;
- 3) составляют матрицу $\tilde{A}$ из алгебраических дополнений:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

- 4) транспонируют матрицу $\tilde{A}$

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица $\tilde{A}^T$ называется **присоединенной** к матрице A ;

- 5) определяют обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$$

Задание 2 (2): Найти матрицу A^{-1} .

Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

1) $\det A = 0 + 20 - 6 - 0 + 20 + 8 = 42$

2)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0 + 10 = 10;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -(-8 - 20) = 28;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 6) = -2;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 16 + 12 = 28;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 4) = 8;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(10 - 3) = -7;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1.$$

3)
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 5 \\ 28 & 28 & -7 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix};$$

4)
$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 10 & 28 & 2 \\ -2 & 28 & 8 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

5)
$$A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 10 & 28 & 2 \\ -2 & 28 & 8 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 2 (2): Найти матрицу A^{-1} .

Сделаем проверку, убедимся, что полученная матрица искомая:
(внимательно выполняйте операцию умножения матриц!)

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix} * \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 10 & 28 & 2 \\ -2 & 28 & 8 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Задание 2 (3): Найти решение системы уравнений $A \cdot X = B$

Решим систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 16 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 16 \\ 0 & -14 & -12 & -40 \\ 0 & -13 & -11 & -37 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 16 \\ 0 & -14 & -12 & -40 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Запишем эквивалентную ступенчатую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 16 \\ -14x_2 - 12x_3 = -40; \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2. \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Таким образом, решением данной системы уравнений является вектор $X = (2; 2; 1)$

Задание 3: Найти скалярное произведение $(2\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} + \bar{b})$

Пусть известны координаты векторов:

$$\bar{a}(1,1,-2); \bar{b}(2,-1,0)$$

Найдем координаты $\bar{c} = 2\bar{a} - \bar{b}$

и

$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\bar{c} = 2 \cdot (1,1,-2) - (2,-1,0) = (2,2,-4) - (2,-1,0) = (0,3,-4)$$

$$\bar{d} = (1,1,-2) + (2,-1,0) = (3,0,-2)$$

$$(2\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) = 0 * 3 + 3 * 0 + (-4) * (-2) = 8$$

Задание 4: При каком значении α векторы $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \bar{b}$ ортогональны (перпендикулярны)?

Пусть известны координаты векторов:

$$\bar{a}(1,1,-2); \bar{b}(2,-1,0)$$

Найдем координаты $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$

и

$$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \bar{b}$$

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = (1,1,-2) - (2,-1,0) = (-1,2,-2)$$

$$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \bar{b} = \alpha(1,1,-2) + (2,-1,0) = (\alpha + 2, \alpha - 1, -2\alpha)$$

Условие ортогональности полученных векторов: $(\bar{a} - \bar{b})(\alpha\bar{a} + \bar{b}) = 0$

$$(-1) * (\alpha + 2) + 2 * (\alpha - 1) + (-2) * (-2\alpha) = 0$$

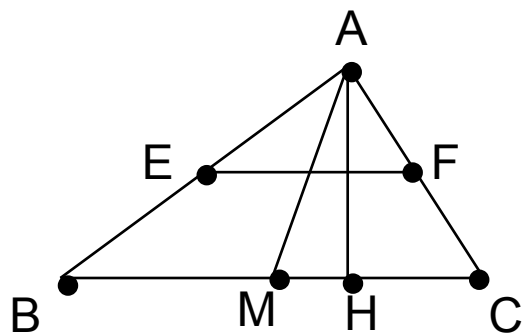
$$-\alpha - 2 + 2\alpha - 2 + 4\alpha = 0$$

$$5\alpha - 4 = 0$$

$$\alpha = \frac{4}{5}$$

Задание 5: . В треугольнике **ABC** найти уравнение медианы, высоты, проведенных из вершины **A**, а также уравнение средней линии **EF**, параллельной основанию **BC**. Координаты точек **A**, **B**, **C** заданы: **A(1, 3)**, **B(-2, 0)**, **C(4, -1)**.

1. Найдем координаты точек **E** и **F** – середины отрезков **AB** и **AC**:



$$E : \left(\frac{(1 + (-2))}{2}; \frac{3 + 0}{2} \right) = E \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right)$$

$$F : \left(\frac{(1 + 4)}{2}; \frac{3 + (-1)}{2} \right) = F \left(\frac{5}{2}; 1 \right)$$

Уравнение прямой **EF** по двум точкам: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{x - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{3} = \frac{y - \frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

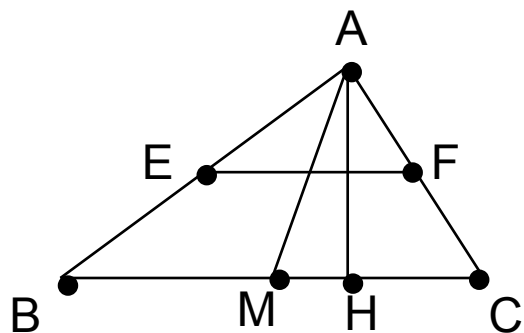
$$\frac{x + \frac{1}{2}}{3} = \frac{2y + 3}{1}$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{17}{12}$$

Уравнение средней линии

Задание 5: . В треугольнике **ABC** найти уравнение медианы, высоты, проведенных из вершины **A**, а также уравнение средней линии **EF**, параллельной основанию **BC**. Координаты точек **A**, **B**, **C** заданы: **A(1, 3)**, **B(-2, 0)**, **C(4, -1)**.

2. Напишем уравнение BC по двум точкам: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$



$$\frac{x - (-2)}{4 - (-2)} = \frac{y - 0}{-1 - 0} \quad \frac{x + 2}{6} = \frac{y}{-1} \quad 6y = -x - 2 \quad y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$$

Угловой коэффициент $K_{BC} = -\frac{1}{6}$

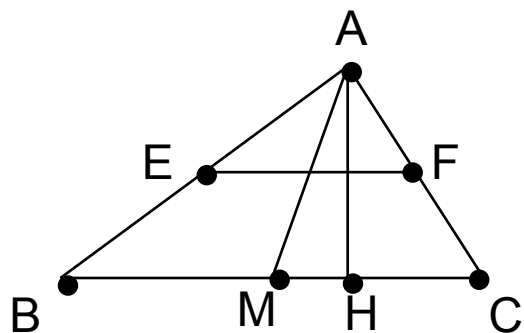
Т.к. $BC \perp AH$, то $K_{BC} * K_{AH} = -1$; $K_{AH} = \frac{-1}{-\frac{1}{6}} = 6$

Тогда уравнение прямой AH с угловым коэффициентом $K_{AH} = 6$ и проходящем через точку $A(1, 3)$ имеет вид: $y - y_0 = K(x - x_0)$

$y - 3 = 6(x - 1)$ $y = 6x - 3$ - Уравнение высоты AH треугольника

Задание 5: . В треугольнике **ABC** найти уравнение медианы, высоты, проведенных из вершины **A**, а также уравнение средней линии **EF**, параллельной основанию **BC**. Координаты точек **A**, **B**, **C** заданы: **A(1, 3)**, **B(-2, 0)**, **C(4, -1)**.

3. Найдем длину высоты **АН**. Это расстояние от т. **A(1,3)** до прямой **BC**:



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$$

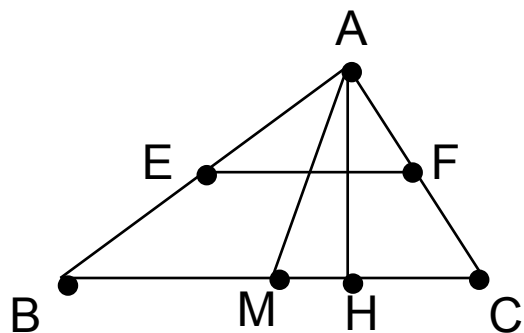
$$\frac{1}{6}x + y + \frac{1}{3} = 0$$

$$d = \frac{\left| \frac{1}{6} * 1 + 1 * 3 + \frac{1}{3} \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{3}{1} + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{36}{36}}} = \frac{\frac{21}{6}}{\frac{\sqrt{37}}{6}} = \frac{21}{\sqrt{37}}$$

Длина высоты **АН** равна $\frac{21}{\sqrt{37}}$

Задание 5: . В треугольнике **ABC** найти уравнение медианы, высоты, проведенных из вершины **A**, а также уравнение средней линии **EF**, параллельной основанию **BC**. Координаты точек **A, B, C** заданы: **A(1, 3), B(-2, 0), C(4, -1)**.

4. Напишем уравнение медианы **AM**. Найдем координаты т. **M(x₀, y₀)**:



$$x_0 = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \quad y_0 = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2} \quad M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

Уравнение медианы – уравнение прямой, проходящей через две точки: **A(1, 3), M(1, -1/2)**:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{x - 1}{1 - 1} = \frac{y - 3}{-\frac{1}{2} - 3} \quad \frac{x - 1}{0} = \frac{y - 3}{-\frac{1}{2} - 3}$$

$$x = -\frac{5}{2} \quad \text{ - уравнение медианы AM}$$

Задание 6: . По каноническому уравнению кривой второго порядка определить тип кривой. Найти координаты фокусов, вершин и центра.

Пример 1:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Сгруппируем по x , по y и выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) - 4 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

Это уравнение окружности с центром в т.(1, -2) и радиусом, равным 3.

Общее уравнение окружности: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Задание 6: . По каноническому уравнению кривой второго порядка определить тип кривой. Найти координаты фокусов, вершин и центра.

Пример 2:

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$$

Сгруппируем по x , по y и выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 2x) + 1 + (4y^2 + 56y) + 196 - 16 = 0$$

$$(x-1)^2 + 4(y+7)^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{4(y+7)^2}{4 \cdot 4} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y+7)^2}{2^2} = 1 \quad \text{- уравнение эллипса}$$

Фокусы: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \approx 3,5 \quad \text{Фокусы: } F_1(-3,5, 0), F_2(3,5, 0)$$

Вершины: $A_1(4, 0)$, $A_2(-4, 0)$, $B_1(0, 2)$, $B_2(0, -2)$

Центр: $C(x_0, y_0) = C(1, -7)$

Общее уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Задание 7: Найти пределы:

Основные свойства пределов:

1. Предел алгебраической суммы конечного числа переменных величин равен алгебраической сумме пределов слагаемых:

$$\lim(x + y + \dots + t) = \lim x + \lim y + \dots + \lim t.$$

2. Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению их пределов:

$$\lim(x \cdot y \dots t) = \lim x \cdot \lim y \dots \lim t.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim(cx) = \lim c \cdot \lim x = c \lim x.$$

Например, $\lim(5x + 3) = \lim 5x + \lim 3 = 5 \lim x + 3$.

4. Предел отношения двух переменных величин равен отношению $\neq 0$ пределов, если предел знаменателя не равен нулю

5. Предел целой положительной степени переменной величины равен той же степени предела этой же переменной.

Задание 7: Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x + 5}{x - 5}$$

Т.к. функция непрерывна в т. $x=7$, то предел функции равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x + 5}{x - 5} = \frac{3 * 7 + 5}{7 - 5} = 13$$

Задание 7: Найти пределы:

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Т.к. отношение ограниченной функции $\sin x$ ($|\sin x| \leq 1$) к бесконечно большой величине x (при $x \rightarrow \infty$) есть величина бесконечно малая

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

Задание 7: Найти пределы:

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^2} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Разложим числитель на множители и сократим дробь на $(x-1)$:
сокращение возможно, т.к. при $x \rightarrow 1$ $(x-1) \rightarrow 0$, но $\neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x-1} = \infty$$

Задание 7: Найти пределы:

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x + 7}{3x^3 + 4x^2 - x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2}{3}$$

Задание 7: Найти пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x \sin 5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin^2(x/2)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(x^2/4)}{x^3} = 1/2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)} = 1/4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}{x+3-3+x} = 3\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x+1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2}} - 1 \right) = -\infty$$

Задание 8: Вычислите производную функции:

Таблица производных:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

$$(\sqrt[n]{x^m})' = (x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \times \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(c)' = 0$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Правила дифференцирования:

$$(cf)' = cf'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Задание 8: Вычислите производную функции. Примеры:

$$1) y = x + (1 - x) \ln(1 - x)$$

$$y' = 1 + (1 - x)' \ln(1 - x) + (1 - x)(\ln(1 - x))' = 1 - \ln(1 - x) + \frac{1 - x}{1 - x} \cdot (-1) = -\ln(1 - x)$$

$$2) y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

$$y' = \frac{x'(\sin x + \cos x) - x(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x + \cos x - x \cos x + x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Задание 8: Вычислите производную функции. Примеры:

$$3) y = 5^{x^3} \ln^2 x$$

Это произведение двух функций, каждая из которых – сложная функция

$$y = 5^u, \text{ где } u = x^3$$

$$y_1 = u_1^2, \text{ где } u_1 = \ln x$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(5^{x^3}\right)' * \ln^2 x + 5^{x^3} * \left(\ln^2 x\right)' = \\ &= \left[5^{x^3} * \ln 5 * (x^3)'\right] * \ln^2 x + 5^{x^3} * [2 \ln x * (\ln x)'] = \\ &= 5^{x^3} \ln 5 * 3x^2 \ln^2 x + 5^{x^3} * 2 \ln x * \frac{1}{x} = 5^{x^3} \ln x \left(3 \ln 5 * x^2 \ln x + \frac{2}{x} \right) \end{aligned}$$

Задание 9: Найти неопределенный интеграл.

Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1).$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$

17. $\int shx dx = chx + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$

18. $\int chx dx = shx + C.$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

Задание 9: Найти неопределенный интеграл. Пример:

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем
 $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \cos 5x dx &= \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \sin 5x + C . \end{aligned}$$

Задание 9: Найти неопределенный интеграл. Пример:

Пример. Вычислить $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx &= \int x^2 dx + 3\int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C\end{aligned}$$

Задание 9: Найти неопределенный интеграл. Пример:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \\ x = t-1 \end{array} \right| = \int \frac{2t-1}{t^2} dt =$$
$$= 2 \int \frac{dt}{t} - \int t^{-2} dt = 2 \ln|t| + \frac{1}{t} + C = 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

Задание 9: Найти неопределенный интеграл. Пример (интегрирование по частям):

Формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Задание 9: Найти неопределенный интеграл. Пример (интегрирование по частям):

$$\int (x^3 + 1) \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = (x^3 + 1) dx \end{array} \right| = \overset{du = \frac{dx}{x}}{v = \int dv = \int (x^3 + 1) dx = \frac{x^4}{4} + x}$$

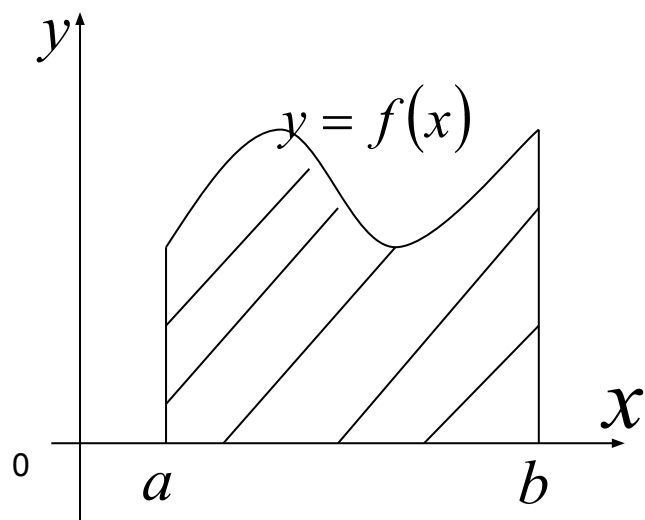
$$\int (x^3 + 1) \ln x dx = \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \frac{dx}{x} =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx - \int dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \frac{x^4}{16} - x + C$$

Задание 10: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Площадь фигуры в декартовых координатах

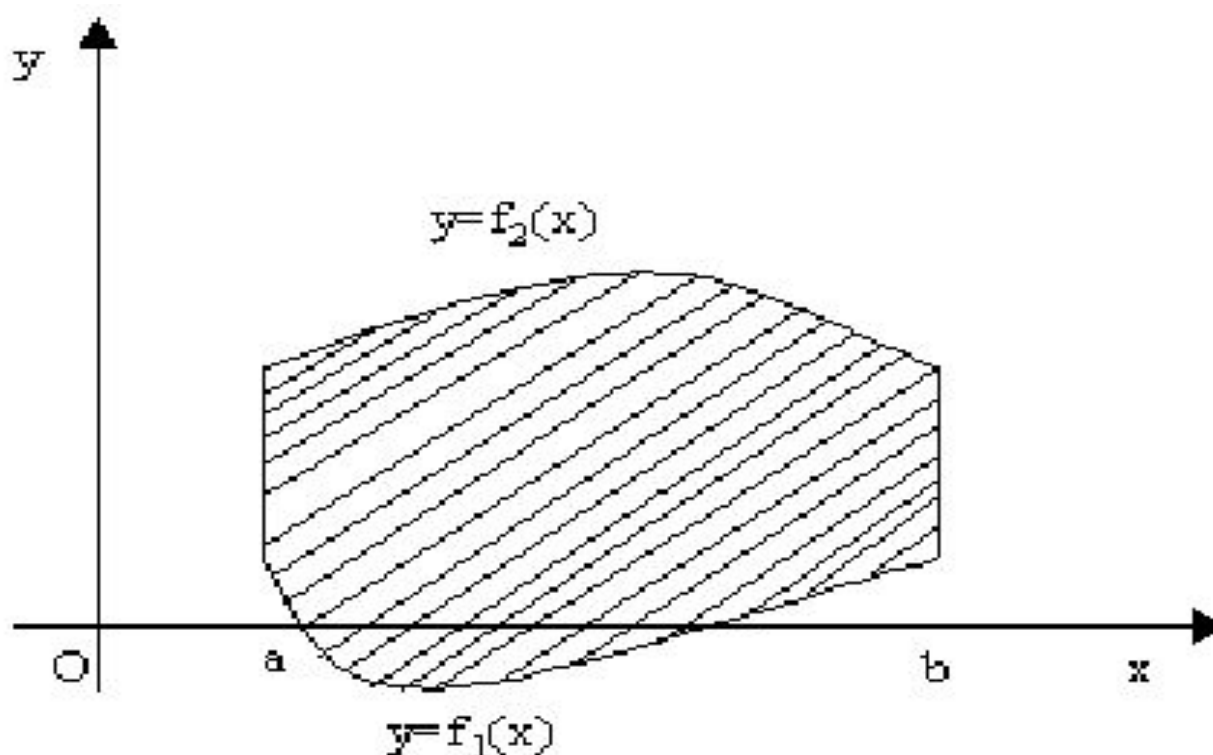


Площадь такой
фигуры, называемой
криволинейной
трапецией,
вычисляют по
формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Задание 10: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$ и двумя прямыми

$x = a$ и $x = b$ определяется по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$

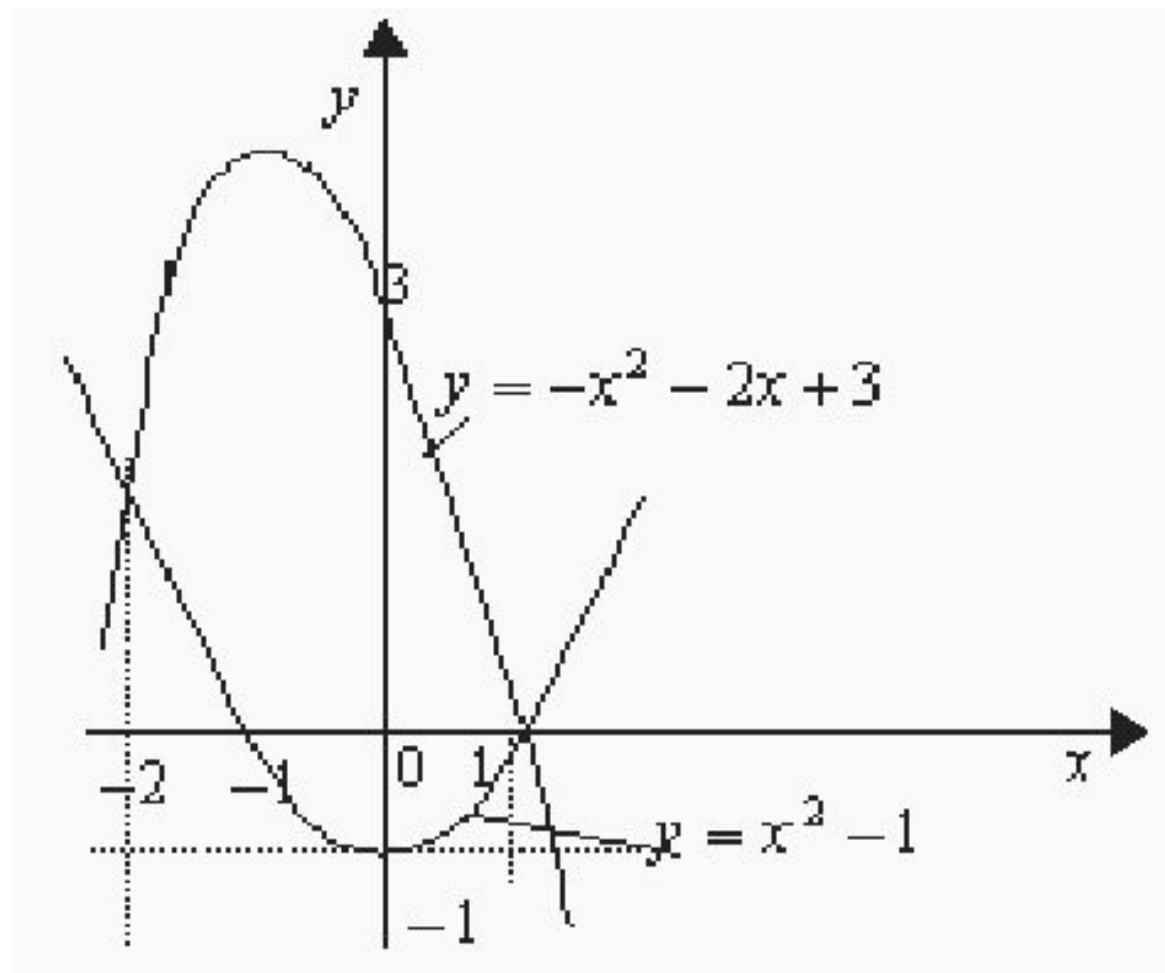


Задание 10: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной
линиями:

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

$$y = x^2 - 1$$



Задание 10: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \left[(-x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1) \right] dx = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx = \\ &= -2 \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = -2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= -2 \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 4 \right) \right] = -2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6 \right) = \\ &= -2 \left(3 - 8 + \frac{1}{2} \right) = -2 \left(-\frac{9}{2} \right) = 9 \end{aligned}$$

Спасибо за внимание!

Жду Ваших вопросов...

контакт: Кузьмина Ольга Борисовна
e-mail: KuzminaOB@edu.mubint.ru



Успехов в изучении дисциплины!