

# **Интерполирование с кратными узлами**

Пусть на промежутке  $[a, b] \subset D(f)$  функция задана таблично, а также известны некоторые её производные. Узлы, в которых заданы производные (любого порядка), называются кратными узлами

$$x_0, f_0, f_0', f_0'', \boxtimes, f_0^{(m_0-1)} \rightarrow m_0 \text{-кратность } x_0$$

$$x_1, f_1, f_1', f_1'', \boxtimes, f_1^{(m_1-1)} \rightarrow m_1 \text{-кратность } x_1$$

$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$

$$x_n, f_n, f_n', f_n'', \boxtimes, f_n^{(m_n-1)} \rightarrow m_n \text{-кратность } x_n$$

$$s = m_0 + m_1 + m_2 + \boxtimes + m_n$$

Найти многочлен  $Q(x)$  степени  $s - 1$ , такой, что:

$$Q(x_0) = f(x_0), \quad Q'(x_0) = f'(x_0), \quad \boxtimes, \quad Q^{(m_0-1)}(x_0) = f^{(m_0-1)}(x_0),$$

$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$

$$Q(x_n) = f(x_n), \quad Q'(x_n) = f'(x_n), \quad \boxtimes, \quad Q^{(m_n-1)}(x_n) = f^{(m_n-1)}(x_n).$$

### Многочлен Эрмита

**Утверждение.** Многочлен  $Q_{s-1}(x)$ , удовлетворяющий условиям эрмитовой интерполяции, существует и он единственный.

## Доказательство.

1) Единственность (от противного).

Пусть существует ещё один многочлен  $\tilde{Q}_{s-1}(x)$ , удовлетворяющий условиям задачи. Найдём их разность.

$Q_{s-1}(x) - \tilde{Q}_{s-1}(x)$  — многочлен степени  $s-1$  или ниже  $\Rightarrow$

Имеет  $s$  корней (с учётом их кратностей), т.к.

$$Q(x_0) - \tilde{Q}(x_0) = 0 = Q'(x_0) - \tilde{Q}'(x_0) = \boxtimes = Q^{(m_0-1)}(x_0) - \tilde{Q}^{(m_0-1)}(x_0)$$

$\boxtimes$

$$Q(x_n) - \tilde{Q}(x_n) = 0$$

$$m_0 + m_1 + m_2 + \boxtimes + m_n = s$$

Но многочлен степени  $s-1$  не может иметь более  $s-1$  корней, следовательно  $Q_{s-1}(x) - \tilde{Q}_{s-1}(x) \equiv 0$ , т.е. многочлены совпадают.

## 2) Существование.

Будем строить алгоритм нахождения многочлена  $Q(x)$ . Что и будет доказательством его существования.

Будем искать многочлен, проходящий через  $s$  узлов.

Введём узлы  $x_{ij}^\varepsilon = x_i + (j-1)\varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ ,

$$i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{1, m_i}, \quad \text{и} \quad x_{ij}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} x_i$$

При достаточно малом  $\varepsilon$  все  $x_{ij}^\varepsilon$  различны.

Строим таблицу разделённых разностей

$$x_{01}^\varepsilon \quad f(x_{01}^\varepsilon) \quad f(x_{01}^\varepsilon, x_{02}^\varepsilon) \quad f(x_{01}^\varepsilon, x_{02}^\varepsilon, x_{03}^\varepsilon) \quad \boxtimes \quad f(x_{01}^\varepsilon, \boxtimes, x_{nm_n}^\varepsilon)$$

$$x_{02}^\varepsilon \quad f(x_{02}^\varepsilon) \quad f(x_{02}^\varepsilon, x_{03}^\varepsilon) \quad \boxtimes$$

$$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

$$x_{0m_0}^\varepsilon \quad f(x_{0m_0}^\varepsilon) \quad f(x_{0m_0}^\varepsilon, x_{11}^\varepsilon)$$

$$x_{11}^\varepsilon \quad f(x_{11}^\varepsilon) \quad f(x_{11}^\varepsilon, x_{12}^\varepsilon)$$

$$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

$$x_{nm_n}^\varepsilon \quad f(x_{nm_n}^\varepsilon)$$

## Выпишем многочлен Ньютона

$$\begin{aligned}
 Q_{s-1}^\varepsilon(x) = & f(x_{01}^\varepsilon) + f(x_{01}^\varepsilon, x_{02}^\varepsilon)(x - x_{01}^\varepsilon) + \\
 & + f(x_{01}^\varepsilon, x_{02}^\varepsilon, x_{03}^\varepsilon)(x - x_{01}^\varepsilon)(x - x_{02}^\varepsilon) + \\
 & + \dots + f(x_{01}^\varepsilon, x_{02}^\varepsilon, \dots, x_{ij}^\varepsilon, \dots, x_{nm_n}^\varepsilon)(x - x_{01}^\varepsilon) \dots (x - x_{ij}^\varepsilon) \dots (x - x_{nm_n-1}^\varepsilon)
 \end{aligned}$$

$$f(x_{pl}^\varepsilon, \dots, x_{kt}^\varepsilon) = \frac{f(x_{pl+1}^\varepsilon, \dots, x_{kt}^\varepsilon)}{x_{kt}^\varepsilon - x_{pl}^\varepsilon} \quad \text{при } p \neq k$$

Выразим разделённые разности через производные

$$\text{Когда } (p = k) \Rightarrow f(x_{pl}^\varepsilon, \dots, x_{kt}^\varepsilon) = \frac{f^{(t-l)}(x_i)}{(t-l)!}$$

$$\text{т.е. } f(x_{p+1}^\varepsilon, \dots, x_i) = \frac{f^{(p)}(x_i)}{p!}$$

$p+1, \varepsilon \rightarrow 0$

Переходя к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим:

$$Q_{s-1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots +$$

$$+ f(x_0, \dots, x_n) (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_n)^{m_n - 1}$$

**Пример.** Сведения о некоторой функции  $y = f(x)$  представлены следующей дискретной информацией:

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
0	-1	0	-2	
1	0	1	0	-4
2	1	0	2	

Рассчитаем кратности узлов

$$\begin{array}{l|l} x_0 = -1 \rightarrow m_0 = 2 & \\ x_1 = 0 \rightarrow m_1 = 3 & \Rightarrow s = 2 + 3 + 2 = 7 \\ x_2 = 1 \rightarrow m_2 = 2 & \end{array}$$

Следует строить многочлен степени  $s = 7 - 1 = 6$

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i) = f(x_i, x_{i+1})$	$f''(x_i) = \frac{2}{f(x_i, x_{i+2})}$	$f(x_i, x_{i+3})$	$f(x_i, x_{i+4})$	$f(x_i, x_{i+5})$	$f(x_i, x_{i+6})$
0	-1	0	-2	$\frac{1+2}{0+1} = 3$	-4	3	-1	1
1	-1	0	$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1$	$\frac{0-1}{0+1} = -1$	-1	1	1	
2	0	1	0	$\frac{-4}{2} = -2$	1	3		
3	0	1	0	$\frac{-1-0}{1-0} = -1$	4			
4	0	1	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{2+1}{1-0} = 3$				
5	1	0	2					
6	1	0						

$$Q(x) = 0 - 2(x+1) + 3(x+1)^2 - 4(x+1)^2(x-0) + 3(x+1)^2 x^2 -$$

$$- 1 \cdot (x+1)^2 x^3 + 1 \cdot (x+1)^2 x^3 (x-1) = x^6 - 2x^2 + 1$$

Для  $(s+1)$ -кратно дифференцируемой функции  $f(x)$  остаточный член интерполяционного многочлена имеет вид

$$|R_s(x)| = \frac{f^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!} (x-x_0)^{m_0} (x-x_1)^{m_1} \boxtimes \dots (x-x_n)^{m_n}$$

$$\xi \in [x_0, x_n]$$

Если все узлы простые (однократные), то многочлен Эрмита  
есть многочлен Лагранжа:  $Q_{s-1}(x) \equiv L_n(x)$

Если вся информация об  $f(x)$  сосредоточена в одном узле  $x_i$ ,  
то есть  $x_i$  узел кратности  $n+1$ , то многочлен Эрмита это просто  
многочлен Тейлора с остаточным членом

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_i)^{n+1}$$

**Сплайн – интерполяция**

**Кубический сплайн**

Сплайн – некоторая математическая модель гибкого тонкого стержня из упругого материала.

**Определение.** Сплайном  $S_m(x)$  называется определённая на отрезке  $[a, b]$  функция  $l$  раз непрерывно дифференцируемая ( $S_m(x) \in C^l[a, b]$ ), такая, что на каждом промежутке  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – это многочлен  $m$ -й степени. Разность между степенью сплайна  $m$  и показателем его гладкости  $l$  называется *дефектом* сплайна ( $d = m - l$ )

## Прикладное применение.

Задача проведения гладкой кривой через точки, произвольным образом лежащие на плоскости, имеет прикладное применение.

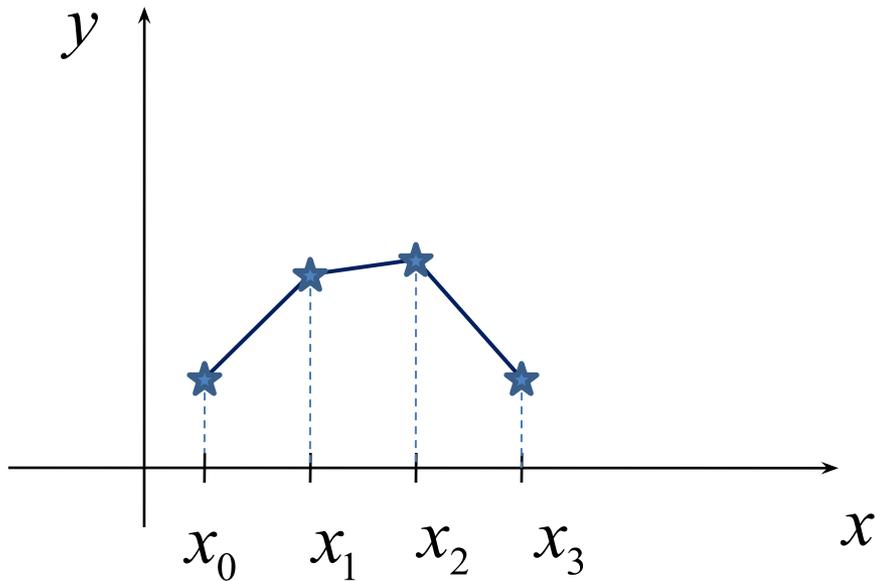
Допустим, имеется передвижная лаборатория, установленная на автомобиле, которая двигается по дороге и записывает свои географические координаты на жесткий диск бортового компьютера через определенные интервалы времени.



Лаборатория вычисляет координаты по данным, получаемым со спутников GPS (*Global Positioning System* – глобальной системы позиционирования) и инерциальной навигационной системы. Координаты записываются как во время движения лаборатории, так и в моменты её временных остановок. Требуется получить траекторию движения лаборатории, проведя гладкую интерполяционную кривую через точки, записанные во время проведения заезда. Траектория должна не иметь изломов в местах остановки лаборатории, когда точки траектории имеют одинаковые координаты. Эта задача решается с использованием кубических сплайнов с неравномерным сеточным разбиением параметра  $t$ .

Примеры сплайнов:

Кусочно-линейная функция



$$S_1(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, & x \in [x_0, x_1] \\ a_2x + b_2, & x \in [x_1, x_2] \\ a_3x + b_3, & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

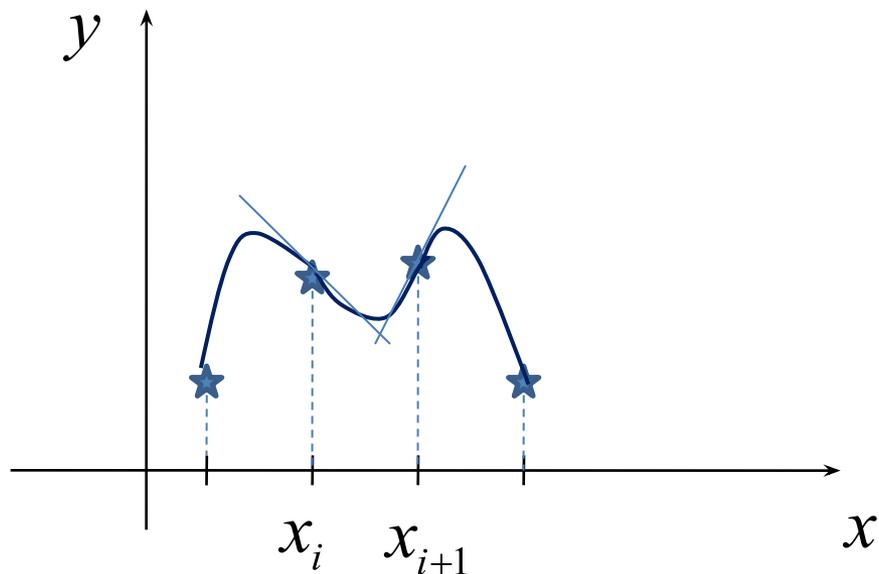
Степень сплайна – 1, дефект – 1.

**Определение.** Кубический сплайн дефекта 1, интерполирующий функцию  $f(x)$  есть функция

$$S(x) = \left\{ S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \right. \\ \left. x \in [x_{k-1}, x_k] \right\}_{k=1}^n \quad (d = m - l)$$

удовлетворяющая совокупности условий:

1.  $S(x_k) = f_k$
2.  $S(x_k) \in C^2[a, b]$
3.  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$



В узловых точках сплайн имеет непрерывную первую производную, т.е. наклон сплайна в точке  $x_i$  равен значению производной в этой точке.

Дано:

$$\begin{array}{cccccc}
 x_0 < x_1 < x_2 < \boxtimes < x_n \\
 f_0 & f_1 & f_2 & \boxtimes & f_n \\
 f'_0 & f'_1 & f'_2 & \boxtimes & f'_n
 \end{array}$$

Найти сплайн

Рассмотрим отрезок  $[x_i, x_{i+1}]$

Вывод: строим интерполяционный многочлен с кратными узлами

$$\begin{array}{l}
 x_i \text{ — кратность } 2 \\
 x_{i+1} \text{ — кратность } 2
 \end{array}
 \left| \Rightarrow 2 + 2 - 1 = s \text{ — степень многочлена}$$

Составим таблицу разделённых разностей

$x_i$	$f_i$	$f'_i$	$\frac{f_{i+1} - f_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} - \frac{f'_i}{x_{i+1} - x_i}$
$x_i$	$f_i$	$\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$	$\frac{f'_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - (f_{i+1} - f_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}$
$x_{i+1}$	$f_{i+1}$	$f'_{i+1}$	
$x_{i+1}$	$f_{i+1}$		

$$\frac{f'_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - 2(f_{i+1} - f_i) + f'_i(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^3}$$

$$S_3(x) = f_i + f'_i(x - x_i) + \frac{(f_{i+1} - f_i) - f'_i(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}(x - x_i)^2 +$$

$$+ \frac{f'_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - 2(f_{i+1} - f_i) + f'_i(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^3}(x - x_{i+1})^2(x - x_i)$$

Если неизвестны наклоны сплайна (т.е. значения производной в узлах), вычисляют их примерное значение по формулам численного дифференцирования.

# Пример

Функция задана в виде таблицы

$x_i$	1	2	3	4
$f_i$	0,5	-1	-0,5	5

$$S_3(x) = \begin{cases} 2,000 - 0,923 x - 0,866 x^2 + 0,289 x^3, & x < 2 \\ -0,149 + 2,300 x - 2,477 x^2 + 0,557 x^3, & x < 3 \\ 1,859 + 0,293 x - 1,808 x^2 + 0,483 x^3, & x < 4 \end{cases}$$