Аппроксимирующий полином Ньютона

Задача. Придать интерполяционной формуле более простой вид. Слагаемые должны располагаться в порядке убывания их значимости.

Элементы теории разделённых разностей.

1) Схема Эйткена

2) Формулы численного дифференцирования

разностные методы

Задана табличная функция:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\
y_0 & y_1 & y_2 & \ldots & y_n
\end{array}
\qquad x_i \neq x_j
$$

$$\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1), \qquad \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = f(x_1, x_2),$$

$$\frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = f(x_{n-1}, x_n)$$

разделённые разности **первого** порядка

$$\frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0, x_1, x_2),$$

$$\frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} = f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

разделённые разности **второго** порядка

$$f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right) = \frac{f\left(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right) - f\left(x_i, \ldots, x_{i+k-1}\right)}{x_{i+k} - x_i}$$

разделённая разность k-го порядка

Полезные свойства разделённых разностей

1) Разделённая разность k-го порядка равна:

$$f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f\left(x_{i+l}\right)}{\prod\limits_{i \neq j}\left(x_{i+l} - x_j\right)}$$

2) Разделённая разность суммы или разности функций равна сумме или разности разделённых разностей слагаемых, соответственно уменьшаемого и вычитаемого.

3) Постоянный множитель можно выносить за знак разделённой разности.

4) Разделённая разность есть <u>симметрическая</u> функция своих аргументов, т.е.

$$f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right) = f\left(x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}\right)$$

5) Разделённая разность многочлена понижает на единицу его степень.

$$f(x) = x^n: \quad f\left(x_i, x_{i+1}\right) = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{x_{i+1} - x_i} = x_{i+1}^{n-1} + x_{i+1}^{n-2} x_i + \ldots + x_{i+1} x_i^{n-2} + x_i^{n-1}$$

Вывод:

Разделённые разности n-го порядка многочлена n-й степени $P_n(x)$ постоянны. (Все последующие равны нулю)

Свойство 5 применяют для определения предпочтительной степени многочлена, подходящего для интерполирования данной функции. Или используют для обнаружения ошибок в таблицах многочленов или функций, близких к ним.

Построим таблицу разделённых разностей

i	x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(\overline{x_i, x_{i+3}})$
0	**0**	**0**	$\frac{8-0}{2-0}=4$	$\frac{19-4}{3-0}=5$	$\frac{10-5}{5-0}=1$
1	**2**	**8**	$\frac{27-8}{3-2}=19$	10	**1**
2	**3**	**27**	49	14	**1**
3	**5**	**125**	91	12	
4	**6**	**216**	43		
5	**1**	**1**			

$$f(x) = x^3$$

Строим полином Ньютона

Задана табличная функция:

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ f_0 & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \end{matrix}$$

При построении полинома Ньютона в качестве базисных функций возьмем следующие:

$$1, \quad x - x_0, \quad (x - x_0)\cdot(x - x_1), \ldots, (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot \ldots \cdot(x - x_{n-1})$$

Многочлен ищем в виде:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)\cdot(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + a_n(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot \ldots \cdot(x - x_{n-1})$$

График многочлена должен проходить через заданные узлы, т.е.

$$N(x_i) = f_i, \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$$

Из этих условий найдём коэффициенты:

$$N(x_0) = a_0 = f_0$$

$$N(x_1) = f_0 + a_1 \underbrace{(x_1 - x_0)}_{h} = f_1$$

$$N(x_2) = f_0 + a_1 \underbrace{(x_2 - x_0)}_{2 \cdot h} + a_2 \underbrace{(x_2 - x_0)}_{2 \cdot h} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{h} = f_2$$

$a_0 = f_0$ − разделённая разность 0-го порядка

$a_1 = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ − разделённая разность 1-го порядка

$$a_2 = \frac{f_2 - f_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - f_0 - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{f_2(x_1 - x_0) - f_0(x_1 - x_0) - f_1(x_2 - x_0) + f_0(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} =$$

$$= \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f_0}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

− разделённая разность 2-го порядка

Для равноотстоящих узлов:

$$a_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$$ – разделённая разность 1-го порядка

$$a_2=\frac{f(x_2)-f(x_0)-a_1 2h}{2h^2}=\frac{f(x_2)-f(x_0)-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}2h}{2h^2}=$$

$$=\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{2h^2}=\frac{\left[f(x_2)-f(x_1)\right]-\left[f(x_1)-f(x_0)\right]}{2h^2}=$$

$$=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{2h^2}$$ – разделённая разность 2-го порядка

Общая формула для коэффициента многочлена Ньютона имеет вид:

$$a_k = \frac{f\left(x_0, x_1, \ldots, x_k\right)}{k!\,h^k}; \quad k = \overline{0, n}$$

Окончательный вид многочлена Ньютона:

$$N_n\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f\left(x_0, x_1\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0, x_1, x_2\right)\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right) + \ldots$$

$$\ldots + f\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right)\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \ldots \cdot \left(x - x_{n-1}\right)$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования вперёд.

Этой формулой пользуются для вычисления значений функции в узлах левой(верхней) части таблицы.

4) Разделённая разность есть <u>симметрическая</u> функция своих аргументов, т.е. $f(x_0, x_1, x_2) = f(x_1, x_0, x_2) = f(x_2, x_1, x_0) = \ldots$

Если $0 \leftrightarrow n$, $1 \leftrightarrow n-1$, $2 \leftrightarrow n-2$ и т.д., тогда

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1}) + \ldots$$

$$\ldots + a_n(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1})\cdot\ldots\cdot(x - x_1)$$

$$N_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1}) + \ldots$$

$$\ldots + f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1})\cdot\ldots\cdot(x - x_1)$$

Второй интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования назад.

Погрешность многочлена Ньютона.

$$f(x) - N_n(x) = f(x, x_0, \ldots, x_n)\omega_n(x)$$

где $\quad f(x, x_0, \ldots, x_n) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

при $\quad |x - x_k| \to 0$

$$f(x, x_0, \ldots, x_n) \approx \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \approx f(x_0, \ldots, x_{n+1})$$

Пример. Вычислить в точках $x = 0{,}1$ и $x = 4{,}5$ значения функции, заданной таблично.

i	x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$f(\overline{x_i, x_{i+3}})$
0	**0**	**1**	1	$2/3$	$3/10$
1	**2**	**3**	-1	$5/6$	
2	**3**	**2**	$3/2$		
3	**5**	**5**			

При $x=0.1$ воспользуемся первой формулой Ньютона.

$$f(0.1)\approx N(0.1)=1+1\cdot(0.1-0)+\left(-{}^{2}\!/_{3}\right)\cdot(0.1-0)(0.1-2)+$$

$$+{}^{3}\!/_{10}\cdot(0.1-0)(0.1-2)(0.1-3)=$$

$$=1.1+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{19}{10}\right)+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{19}{10}\right)\cdot\left(-\frac{29}{10}\right)=$$

$$=1.1+0.127+0.166=1.393$$

При $x=4.5$ воспользуемся второй формулой Ньютона.

$$f(4.5)\approx N(4.5)=5+{}^{3}\!/_{2}\cdot(4.5-5)+{}^{5}\!/_{6}\cdot(4.5-5)(4.5-3)+$$

$$+{}^{3}\!/_{10}\cdot(4.5-5)(4.5-3)(4.5-2)\;=3.854$$

Возможна такая нумерация узлов:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\cdots$	$\Delta^n y$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}				
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\cdots$		
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\cdots$	$\Delta^n y_0$	$\cdots$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\cdots$		
x_2	y_2	Δy_2	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

Многочлен Гаусса