УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЙ И ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Санкт-Петербург, 2017

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным пространством*** L *называется множество элементов* $x, y, z, \ldots$ *, если:*

1. $\forall x, y \in L$ указан закон (правило) нахождения суммы элементов: $z = x + y : z \in L$.

2. $\forall x \in L, \lambda \in R$ указан закон (правило) нахождения произведения элемента на число: $z = \lambda x = x\lambda : z \in L$.

3. *Операции сложения и умножения на число, удовлетворяют* ***аксиомам:***

1) $x + y = y + x$ - *коммутативность сложения,*

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ - *ассоциативность сложения,*

3) $\exists O \in L : x + O = x$ - *существование* ***нулевого элемента*** $O \in L$,

4) $\forall x \in L \ \exists(-x) \in L : (-x) + x = O$ - *существование* ***противоположного элемента*** $(-x) \in L$,

5) $\exists 1 \in L : 1 \cdot x = x$ - *существование* ***единичного элемента*** $1 \in L$,

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ -*ассоциативность умножения на число,*

$$\left.\begin{array}{l} 7)\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \\ 8)\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \end{array}\right\}$$

-*дистрибутивность умножения на число.*

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА: СВОЙСТВА

1. Существует единственный ***нулевой элемент*** линейного пространства.
2. Для $\forall x \in L$ существует единственный ***противоположный элемент.***
3. $\forall x \in L : 0 \cdot x = O$, где $0 \in R,\ O \in L$.
4. $\forall x \in L : (-1) \cdot x = -x,\ (-x)$ - противоположный элемент.
5. $\forall \alpha \neq 0 : \alpha \cdot O = O,\ O$ - нулевой элемент пространства.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА: ПРИМЕРЫ

1. Множество всех вещественных чисел R

2. Множество всех матриц.

3. Множество всех многочленов

$$P_n(x):\ P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_i \in R$$

4. $A^n,\ n = 1,2,3,\ldots$

-n-мерное пространство арифметических векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейное пространство называется* ***евклидовым*** E, *если в нём задано скалярное произведение векторов: определено действие, сопоставляющее каждым двум векторам* $\bar{x}, \bar{y} \in E$ *число* $\alpha = \bar{x} \cdot \bar{y}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Длиной (модулем, нормой) вектора*** $\bar{x} \in E$ *называется число* $|\bar{x}|$ $(\|\bar{x}\|)$, *равное корню из квадрата скалярного произведения вектора* $\bar{x}$: $|\bar{x}| = \|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Тогда операция ***нормирования вектора*** : $\bar{x}_0 = \dfrac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейное пространство* L *называется* ***n - мерным****, если в нём существует* n *линейно независимых векторов, а любые* $n+1$ *векторов являются линейно зависимыми.*

Обозначение: L_n (L^n).

Число n *называется* ***размерностью линейного пространства*** L_n: $\dim L_n = n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Базисом*** *n-мерного линейного пространства* L *называется любая упорядоченная совокупность (система)* ***n*** *линейно независимых векторов этого пространства. При этом любой другой вектор пространства* L *представим в виде линейной комбинации векторов базиса.*

1)Пространство P многочленов

$$P_2(x): P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, a_i \in R$$

является 3-х мерным: $\dim P = 3$.

2) Совокупность $x^2, x, 1$ является базисом пространства P многочленов

$$P_2(x): P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, a_i \in R.$$

3) Рассмотрим три некомпланарных вектора из R^3 :

$$\vec{p} = (1,-1,1), \vec{q} = (0,3,1), \vec{r} = (2,0,1)$$

Докажем: а) что они линейно независимы и являются базисом в R^3 :

$$\lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0,$$

$$\lambda_1\vec{p} + \lambda_2\vec{q} + \lambda_3\vec{r} = \lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(0,3,1) + \lambda_3(2,0,1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

б) Система из 4-х векторов

$$\vec{p} = (1,-1,1),\ \vec{q} = (0,3,1),\ \vec{r} = (2,0,1),\ \vec{s} = (8,-5,4)$$

линейно зависимая и вектор $\vec{s} = (8,-5,4)$ можно выразить через базисные вектора

$$\vec{p} = (1,-1,1),\ \vec{q} = (0,3,1),\ \vec{r} = (2,0,1):$$

$$\lambda_i \neq 0 : \vec{s} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} \Leftrightarrow$$

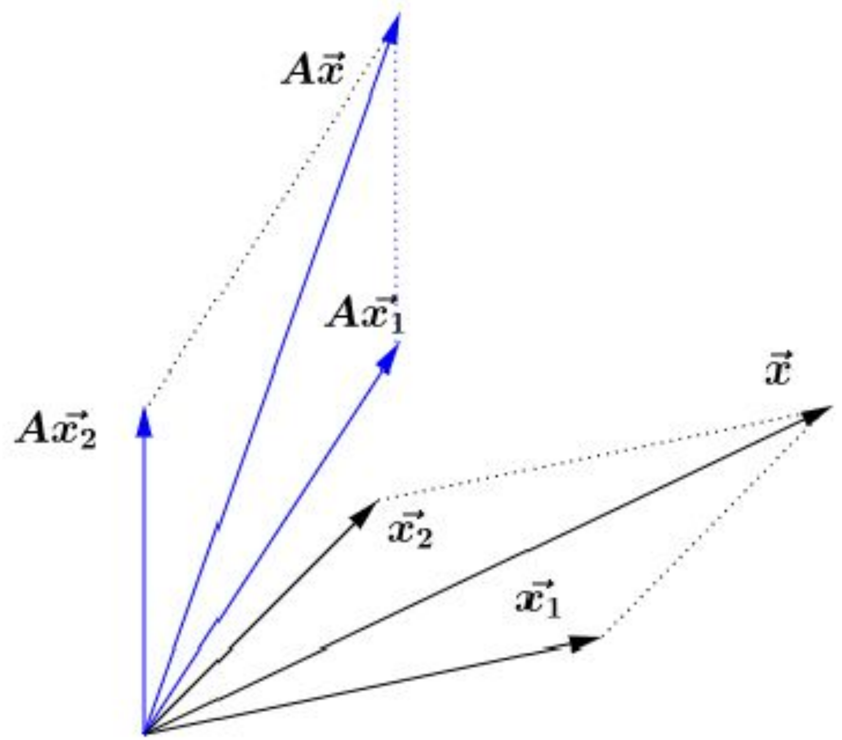
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 8 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = -5 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases},\ \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}.$$

ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть A - поворот всех векторов вокруг начала координат на некоторый угол α: каждому вектору $\vec{x}$ соответствует его образ - вектор $\mathrm{A}\vec{x}$.

При этом

$$\mathrm{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathrm{A}\vec{x}, \quad \mathrm{A}\vec{x} = \mathrm{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathrm{A}\vec{x}_1 + \mathrm{A}\vec{x}_2 .$$



ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ТЕОРЕМА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *В пространстве* L *задан* ***линейный оператор*** A, *если установлено правило (задан закон), по которому каждому вектору* $\overline{x} \in L$ *сопоставляется вполне определённый (единственный) вектор* $\overline{y} = \mathrm{A}\overline{x} : \overline{y} \in L$, *при этом выполнено:*

- $\mathrm{A}(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \mathrm{A}\overline{x}_1 + \mathrm{A}\overline{x}_2$,
- $\mathrm{A}(\lambda\overline{x}) = \lambda\mathrm{A}\overline{x}, \lambda \in R$.

ТЕОРЕМА. *Если* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \in L^n$ *-базис линейного (*n*-мерного) пространства* L^n, *то для* $\forall \overline{x} \in L^n$ *существует единственная система чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *такая что*

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n .$$

ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР: ТЕОРЕМА (ДОКАЗАТЕЛЬСТВО)

По определению ***линейного пространства*** для $\forall \bar{x} \in L^n$ совокупность из $n+1$ векторов $\bar{x}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ является линейно зависимой, т.е. $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n$, не все равные нулю, такие что

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n .$$

Предположим, что $\exists x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$:

$$\bar{x} = x'_1\bar{e}_1 + x'_2\bar{e}_2 + \ldots + x'_n\bar{e}_n .$$

Тогда

$$x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n = x'_1\overline{e}_1 + x'_2\overline{e}_2 + \ldots + x'_n\overline{e}_n,$$

$$(x'_1 - x_1)\overline{e}_1 + (x'_2 - x_2)\overline{e}_2 + \ldots + (x'_n - x_n)\overline{e}_n = 0.$$

Так как вектора $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ линейно независимы (см. определение ***базиса***) , то

$$(x'_1 - x_1)\overline{e}_1 + (x'_2 - x_2)\overline{e}_2 + \ldots + (x'_n - x_n)\overline{e}_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'_1 - x_1 = 0, x'_2 - x_2 = 0, \ldots, x'_n - x_n,$$

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \ldots, x'_n = x_n.$$

Теорема доказана.

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В БАЗИСЕ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Выражение* $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n$ *будем называть* ***разложением вектора*** $\overline{x}$ ***по базису*** $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$. *Коэффициенты* x_i *будем называть* ***координатами вектора*** $\overline{x}$ *в этом базисе.*

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В НОВОМ БАЗИСЕ: ВЫВОД ФОРМУЛЫ

$\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x}$ - образ вектора $\bar{x}$,

$\bar{y}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ - линейно зависимая совокупность из $n+1$ векторов, т.е. $\exists y_1, y_2, \ldots, y_n \in R$, не все равные нулю, такие что

$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \ldots + y_n\bar{e}_n,$$

Тогда

$$\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x} = \mathrm{A}(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n) =$$

$$= \mathrm{A}(x_1\bar{e}_1) + \mathrm{A}(x_2\bar{e}_2) + \ldots + \mathrm{A}(x_n\bar{e}_n) =$$

$$= x_1\mathrm{A}\bar{e}_1 + x_2\mathrm{A}\bar{e}_2 + \ldots + x_n\mathrm{A}\bar{e}_n.$$

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В НОВОМ БАЗИСЕ: ВЫВОД ФОРМУЛЫ

Т.к. $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \in L^n$, то вектора $A\overline{e}_1, A\overline{e}_2, \ldots, A\overline{e}_n \in L^n$, а значит могут быть разложенными по базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$:

$$A\overline{e}_k = a_{1k}\overline{e}_1 + a_{2k}\overline{e}_2 + \ldots + a_{nk}\overline{e}_n, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Таким образом мы получаем, что

$$y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + \ldots + y_n\overline{e}_n =$$

$$= x_1 A\overline{e}_1 + x_2 A\overline{e}_2 + \ldots + x_n A\overline{e}_n,$$

т.е.

$$y_1 = A\overline{e}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n1}\overline{e}_n,$$

$$y_2 = A\overline{e}_2 = a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n2}\overline{e}_n,$$

$$\vdots$$

$$y_n = A\overline{e}_n = a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + \ldots + a_{nn}\overline{e}_n.$$

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В НОВОМ БАЗИСЕ: МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ

В матричном виде эта запись выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ или } Y = A \cdot X,$$

где

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В НОВОМ БАЗИСЕ: МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ -столбец координат вектора $\overline{y} = \mathrm{A}\overline{x}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$ -матрица оператора A,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ -столбец координат вектора $\overline{x}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1)Отметим, что при применении ***одного и того же*** оператора A к различным наборам базисных векторов, мы будем получать ***различные*** матрицы этого оператора.

2) Линейный оператор A, матрица A которого невырожденная, называется ***невырожденным*** оператором.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

Пусть $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ и $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$ - два различных базиса в L^n. Тогда $\overline{x} \in L^n$:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n ,$$

$$\overline{x} = x'_1\overline{e}'_1 + x'_2\overline{e}'_2 + \ldots + x'_n\overline{e}'_n .$$

Каждый базисный вектор $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$ разложим по базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$:

$$\overline{e}'_1 = t_{11}\overline{e}_1 + t_{21}\overline{e}_2 + \ldots + t_{n1}\overline{e}_n ,$$

$$\overline{e}'_2 = t_{12}\overline{e}_1 + t_{22}\overline{e}_2 + \ldots + t_{n2}\overline{e}_n ,$$

$$\ldots$$

$$\overline{e}'_n = t_{1n}\overline{e}_1 + t_{2n}\overline{e}_2 + \ldots + t_{nn}\overline{e}_n .$$

Подставим полученные разложения:

$$\overline{x} = x_1'\overline{e}_1' + x_2'\overline{e}_2' + \ldots + x_n'\overline{e}_n' =$$

$$= x_1'\left(t_{11}\overline{e}_1 + t_{21}\overline{e}_2 + \ldots + t_{n1}\overline{e}_n\right) +$$

$$+ x_2'\left(t_{12}\overline{e}_1 + t_{22}\overline{e}_2 + \ldots + t_{n2}\overline{e}_n\right) +$$

$$+ \ldots + x_n'\left(t_{1n}\overline{e}_1 + t_{2n}\overline{e}_2 + \ldots + t_{nn}\overline{e}_n\right) =$$

$$= \left(t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + \ldots + t_{1n}x_n'\right)\overline{e}_1 +$$

$$+ \left(t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + \ldots + t_{2n}x_n'\right)\overline{e}_2 + \ldots$$

$$+ \left(t_{n1}x_1' + t_{n2}x_2' + \ldots + t_{nn}x_n'\right)\overline{e}_n .$$

Учитывая, что

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n ,$$

получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \ldots + t_{1n}x'_n, \\ x_2 &= t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \ldots + t_{2n}x', \\ &\vdots \\ x_n &= t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \ldots + t_{nn}x'_n. \end{aligned}$$

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ – МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ

В матричном виде эта запись выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & .. & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & .. & t_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ t_{n1} & t_{n2} & .. & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ или } X = T \cdot X',$$

где

КООРДИНАТ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ-МАТРИЧНАЯ ФОРМА

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - столбец координат вектора $\overline{x}$ в базисе

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n,$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & .. & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & .. & t_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ t_{n1} & t_{n2} & .. & t_{nn} \end{pmatrix}$$ - матрица перехода от базиса

$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ к базису $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$,

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$ - столбец координат вектора $\overline{x}$ в базисе

$$\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Отметим, что

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & .. & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & .. & t_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ t_{n1} & t_{n2} & .. & t_{nn} \end{pmatrix}$$

- ***матрица перехода*** от базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ к базису $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \dots, \overline{e}'_n$, составляется из столбцов координат векторов базиса $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \dots, \overline{e}'_n$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$.

2) Матрица перехода от одного базиса к другому является ***невырожденной.***

3) Любую невырожденную матрицу порядка n можно рассматривать как матрицу перехода от одного базиса к другому в n -мерном пространстве.

4) Так как матрица перехода от одного базиса к другому невырожденная, то у неё существует обратная матрица и можно выразить координаты в "новом" базисе $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \dots, \overline{e}'_n$ через координаты в "старом" базисе $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \dots, \overline{e}'_n$:

$$X' = T^{-1} \cdot X .$$

ПРИМЕР. Рассмотрим ***преобразование поворота*** на некоторый угол α в плоскости Oxy. Найдём матрицу этого преобразования.

Формулы связи "новых" и "старых" координат:

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha \cdot y_1 \\ y = \sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot y_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

тогда нетрудно найти:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ и } \begin{cases} x_1 = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y \\ y_1 = -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{cases}.$$

НАХОЖДЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

Рассмотрим:

- оператор A в некотором n-мерном линейном пространстве L,
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ - базис этого пространства,
- A - матрица оператора $\mathrm{A}: Y = A \cdot X$,
- $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ - новый базис пространства L,
- T - матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$: $X = T \cdot X'$, $Y = T \cdot Y'$.

НАХОЖДЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

$$Y = A \cdot X = A \cdot T \cdot X' = T \cdot Y',$$

$$A \cdot T \cdot X' = T \cdot Y',$$

$$T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot X' = T^{-1} \cdot T \cdot Y',$$

$$T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot X' = E \cdot Y' = Y',$$

$$Y' = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot X' = A' \cdot X',$$

$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$ - ***матрица оператора*** $\mathcal{A}$ ***в новом базисе*** $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Матрица* A *называется* ***подобной*** *матрице* B, *если существует невырожденная матрица* C, *такая что* $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Матрицы оператора при переходе от одного базиса к другому - ***подобные***: матрица A' подобна матрице A (где $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, T - матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадратная матрица* A *называется* ***ортогональной****, если её транспонированная матрица равна обратной:* $A^T = A^{-1}$. *Ортогональной матрице отвечает* ***ортогональный оператор.***

ЗАМЕЧАНИЕ. **1)**Определитель ортогональной матрицы всегда равен ± 1.
2) Ортогональный оператор переводит один ортонормированный базис (вектора этого базиса попарно перпендикулярны и имеют единичную длину) в другой ортонормированный базис.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Санкт-Петербург, 2017