И. В. Ященко

ПРИГЛАШЕНИЕ
НА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

Москва
Издательство МЦНМО
2005

УДК 51
ББК 22.1, 74.200.58
Я97

Ященко И. В.

Я97 Приглашение на Математический праздник. — 2-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2005. — 104 с. — ISBN 5-94057-182-4.

В книге приводятся все задания Математического праздника — самой массовой олимпиады по математике для учеников 6–7 классов города Москвы. Почти ко всем заданиям даны ответы, указания и решения.

Книга, рассчитанная на школьников 5–8 классов, будет полезна также их учителям, родителям, руководителям кружков и всем, кто любит решать занимательные задачи.

Первое издание книги увидело свет в 1998 году, настоящее (второе) издание включает материалы всех Математических праздников с 1990 по 2004 год.

ББК 22.1, 74.200.58

Издание осуществлено при поддержке Департамента Образования г. Москвы, Московского института открытого образования, корпорации «Boeing», Научно-методического центра «Школа нового поколения».

Иван Валериевич Ященко

Приглашение на Математический праздник

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 04.12.2004 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 6,5. Тираж 10000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-182-4

Памяти Димы Ботина,

замечательного человека,
учителя и организатора олимпиад
посвящается эта книга

ДОРОГОЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Книжка, которую ты сейчас держишь в руках, — это приглашение учащимся 6–7 классов принять участие в Математическом празднике. Он традиционно проходит каждый год в одно из воскресений февраля в Главном здании Московского государственного университета на Воробьёвых горах. В этот день сотни школьников 6–7 классов приходят, чтобы решать интересные задачи.

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК И КАК ОН ПРОХОДИТ?

Начинается праздник в 10:00 (конечно, прийти лучше минут на 10–15 раньше). Сначала участников рассаживают по аудиториям и объясняют «правила игры», ведь для многих это первое в их жизни математическое соревнование.

А правила достаточно просты. Надо постараться решить как можно больше задач, причём самому — разговаривать с соседями не разрешается. (Играть надо честно!)

Решение записывайте аккуратно, на специальных бланках, чтобы проверяющие могли это прочитать и понять! При этом писать надо не только ответ, но и решение (обоснование). Не бойтесь приступать к записи, особенно если вроде всё ясно, но непонятно, с чего начать. Задачи на олимпиаде нестандартные, и, в отличие от школьной контрольной, здесь нет специальных правил оформления решений. Кроме того, никто не будет снижать вам оценку за помарки, простят описку (если она не повлияла на ход решения). Главное, чтобы была видна идея и были понятны ваши мысли. Даже если задачу не удалось решить полностью, запишите то, что удалось сделать — может быть, вы остановились в одном шаге от цели, и это обязательно будет отмечено. Помните, что просто верный ответ во многих задачах ценится ниже, чем хорошее решение, но с опиской в конце.

Если задача не поддаётся, стоит перейти к следующей, а потом вернуться ещё раз. Полученное решение лучше сразу записать, а через некоторое время прочитать «свежим» взглядом.

На решение задач даётся 2 часа. Пока ребята решают задачи, родители встречаются с представителями оргкомитета, руководством мехмата МГУ, руководителями кружков, учителями ведущих школ города.

Потом перерыв, во время которого можно послушать разбор задач, посетить интересную лекцию по математике и перекусить.

В 14:00 начинается культурная программа (обычно это показ мультфильмов). В 17:00–17:30 происходит награждение победителей. После награждения — показ работ.

Информация о том, когда состоится математический праздник, задачи прошлых лет, статистика всегда доступны на сайте Московского центра непрерывного математического образования (www.mccme.ru).

Ждём тебя на следующем Математическом празднике и Московской математической олимпиаде!

ИЗ ИСТОРИИ ПРАЗДНИКА

Математический праздник впервые был проведён в 1990 году по инициативе преподавателей математического кружка при МГУ (Малого мехмата) Димы Ботина (памяти которого посвящается эта книга), Саши Спивака и автора этих строк. На первом празднике было около 200 ребят — в основном из математических кружков. С 1990 года Математический праздник стал ежегодным. Число участников неуклонно росло. В 2004 году их уже было около 2000. Многие участники приехали из других городов. С 1994 года Праздник является частью Московской математической олимпиады.

За эти годы из небольшого соревнования для кружковцев Математический праздник превратился в яркий праздник для сотен ребят. Многие его участники (не только победители!), окунувшись в атмосферу математики, впоследствии успешно занимались в кружках, специализированных школах, окончили ведущие вузы, прежде всего МГУ.

Математический праздник проводится силами сотен энтузиастов — студентов и аспирантов мехмата, руководителей кружков, преподавателей вузов, учителей и школьников старших классов ведущих математических школ — низкий им всем поклон. Без них Праздника бы не было... Размер этой книги не позволяет перечислить всех, кто вложил часть своей души в Математический праздник за прошедшие 15 лет, упомянем лишь тех, кто много лет вносил большой вклад в работу оргкомитета и методической комиссии: Л. Д. Альтшуллер, Н. Н. Андреев, В. Д. Арнольд, А. Д. Блинков, Д. Ботин, В. Бугаенко, Т. Галкина, Б. П. Гейдман, Ю. Герман, Т. Голенищева-Кутузова, Д. Григоренко, В. Гуровиц, Б. М. Давидович, С. А. Дориченко, Е. Ю. Иванова, А. Н. Карпов, А. К. Ковальджи, В. Клепцын, В. Крюков, Ю. Кудряшов, Р. Кузнец, Н. Кулакова, А. Кулыгин, С. Маркелов, А. Митягин, М. Панов, М. Потанин, В. Радионов, А. В. Спивак, Р. Фёдоров, В. Фурин, А. Хачатурян, В. П. Хованский, П. В. Чулков, С. Шалунов, И. Ф. Шарыгин, А. Шень, В. В. Ященко.

Праздник был бы невозможен без поддержки со стороны руководства и сотрудников Московского государственного университета (в первую очередь ректората и механико-математического факультета): в этот день бóльшая часть комплекса МГУ на Воробьёвых Горах — в распоряжении участников этого соревнования.

С 1994 года Математический праздник поддерживается Департаментом образования и Московским институтом открытого образования. Все последние годы эта работа идёт в рамках Московской программы «Одарённые дети».

И конечно, у математического праздника не было бы участников, если бы учителя, руководители кружков, родители не занимались бы с детьми математикой.

ОБ ЭТОЙ КНИГЕ

Вы держите в руках второе (дополненное) издание. Первое издание вышло в 1998 году.

В первой части книги приведены условия задач Математических праздников 1990–2004 годов. Можно просто решать те задачи, которые вам понравятся, а можно иногда и поиграть в олимпиаду — попытаться решить как можно больше задач одной олимпиады за 2 часа. Обычно (но не всегда!) первые две задачи попроще, последние посложнее, причём все задачи на разные темы, так что 2–3 решённые задачи — это уже очень неплохой результат! Иногда (особенно в задачах первых праздников, в которых участвовали в основном кружковцы) могут встретиться задачи, использующие знания, которые формально выходят за рамки школьной программы соответствующего класса. Впрочем, сейчас, с распространением огромного числа альтернативных учебников, тяжело определить, что, собственно, в эту программу входит. В то же время, если у вас достаточно сообразительности и интуиции, нащупать путь решения всегда можно!

После того как задача решена, загляните во вторую часть книги и проверьте свой ответ. Также очень советуем сверить своё решение с приведённым в четвёртой части книги — кроме проверки правильности своего решения (даже если у вас совпал ответ, решение может быть неверным!) вы можете узнать другие подходы к задаче, прочитать интересные комментарии.

Если задача не поддаётся, стоит заглянуть в третью часть книги — там может содержаться подсказка или даже идея решения. Но не спешите — не лишайте себя радости маленького математического открытия! С помощью этих подсказок учитель может помочь ученику на кружке (но не на олимпиаде!).

В тематическом указателе в конце книги задачи сгруппированы по тематике, по основным идеям решения. Это поможет школьнику попрактиковаться в определённых методах решения, а учителю — подобрать задачи для математического кружка.

Много других задач, интересных материалов для кружков и самостоятельных занятий — в частности, задачи большинства математических соревнований (www.mccme.ru/olympiads), замечательные книги от старинной «Арифметики» Л. Ф. Магницкого до современных изданий (www.mccme.ru/ilib), архивы журнала «Квант» (kvant.mccme.ru), — можно найти на сайте Московского центра непрерывного математического образования (www.mccme.ru) и в проекте «Задачи» (www.problems.ru).

БЛАГОДАРНОСТИ

При подготовке данной книги, кроме архивов автора, использовались сборники задач и решений, которые ежегодно издаются оргкомитетом, книга «Московские математические олимпиады 60 лет спустя» (составители А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, под ред. Ю. С. Ильяшенко и В. М. Тихомирова) и материалы, предоставленные Д. Ботиным, В. Бугаенко, А. К. Ковальджи, А. В. Спиваком, Р. Фёдоровым. Внимательно прочитали рукопись и сделали много полезных замечаний В. Д. Арнольд, Д. и М. Вельтищевы, Т. Караваева, Ю. Кудряшов, А. В. Семёнов, В. В. Ященко.

Отдельная благодарность В. Радионову, который не только подготовил оригинал-макет и иллюстрации, но и исправил ряд неточностей.

И. Ященко
02.12.04

Условия задач

2004 год

6 класс

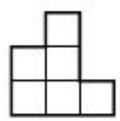
1. Кузнечик прыгает вдоль прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

2. Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины?

3. а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа.

4. Сложите из фигур, изображённых на рисунке, а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3; б) прямоугольник размером 9×12. (Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.)



5. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: ВКСАМО. Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» МТТЛАРАЕКИС. Что это за город, если его название начинается с буквы С?

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

7 класс

1. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

2. Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть? (Если да, нарисуйте пример, если нет, обоснуйте ответ.)

3. На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причём их числители — различные натуральные числа. Оказалось, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей.

4. Таня написала название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила таблицу 2 и выписала её последний столбец: ВКСАМО. Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» ОССНГСОРОК. Что это за город, если его название заканчивается на букву К?

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

5. См. задачу 4 а) для 6 класса.

6. Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зелёным и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что

4. Может ли горящая в комнате[2] свеча не освещать полностью ни одну из её стен, если в комнате а) 10 стен, б) 6 стен?

4. Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них никогда не говорит правду, и спросил одного из них: „Ты Винтик?“ „Да,“ — ответил тот. Когда Знайка спросил об этом же второго, то получил столь же чёткий ответ и сразу определил, кто есть кто.

Кого звали Винтиком?

7 КЛАСС

1. 2002 год — год-палиндром, то есть одинаково читается справа налево и слева направо. Предыдущий год-палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов-непалиндромов может идти подряд (между 1000 и 9999 годами)?

1. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6009} = 2003.$