

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

2 СЕМЕСТР

Лекция 1. Последовательность.

Предел последовательности.

Лекция 2. Функция. Предел функции.

Лекция 3. Непрерывность функций.

Точки разрыва, их классификация.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

- Интуитивное понятие о предельном переходе использовалось еще в Древней Греции при вычислении площадей и объемов (Архимед)
- При создании дифференциального и интегрального исчисления математики XVII в (Исаак Ньютон, Готфрид Вильгельм Лейбниц) тоже неявно использовали понятие предельного перехода
- Определение понятия предела – работа Джона Валлиса «Арифметика бесконечных величин» (1655 г.)
- В XIX в теория пределов использована для строгого обоснования математического анализа (Огюстен Луи Коши)
- Дальнейшая разработка теории пределов – Карл Вейерштрасс, Бернард Больцано и др.

ДЖОН ВАЛЛИС (JOHN WALLIS)



Точнее - Джон Уоллес (1616-1703) английский математик, предшественник математического анализа. Сын священника из Эшфорда.

Уже в молодости вызывал восхищение как феноменальный счётчик: как-то в уме извлёк квадратный корень из 53-значного числа

По окончании Кембриджского университета стал священником англиканской церкви и получил степень магистра. После женитьбы (1645) вынужден был покинуть университет, так как от профессоров в те годы требовался обет безбрачия.

ЛЕКЦИЯ 1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Понятие числовой
последовательности.

Способы задания последовательности

Ограниченные последовательности

Монотонные последовательности

Предел последовательности

Теоремы о пределах
последовательностей

Необходимое и достаточное условие
сходимости последовательностей

Примеры

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

- - это множество чисел, занумерованных либо конечным отрезком натурального ряда (конечная последовательность), либо всеми натуральными числами (бесконечная последовательность)
- Элементы этого множества называются **членами** последовательности и обозначаются a_n , где n - его номер
- Сама последовательность записывается как

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots \text{ или } \{a_n\}$$

ПРИМЕРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

✘ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

✘ $2, 4, 8, 16, \dots$

✘ $0, 1, 0, 1, \dots$

✘ $5, 5, 5, 5, \dots$

ИНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Отображение множества натуральных чисел \mathbf{N} на некоторое конечное или счетное числовое множество \mathbf{A} , при котором каждому натуральному числу n соответствует один и только один элемент множества \mathbf{A} - a_n .
- Функция $a_n = f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел \mathbf{N}

ДЕЙСТВИЯ НАД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

- ✦ Сумма двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ это последовательность $\{s_n\}$, членами которой являются суммы членов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одинаковые номера

$$s_n = x_n + y_n$$

- ✦ Произведение, разность и частное двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ это последовательность $\{m_n\}$, $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ члены которых вычисляются по правилам:

$$m_n = x_n - y_n, \quad q_n = x_n \cdot y_n, \quad r_n = \frac{x_n}{y_n}$$

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- – задание **формулы общего члена последовательности**, позволяющую по номеру члена последовательности однозначно его вычислить

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

✘ Например,

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = 2^n, \quad c_n = (-1)^n, \quad d_n = 3$$

Задают соответственно последовательности

✘ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

✘ $2, 4, 8, 16, \dots$

✘ $-1, 1, -1, 1, \dots$

✘ $3, 3, 3, 3, \dots$

РЕКУРРЕНТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Задается первый член (или несколько первых членов) последовательности и указывается формула вычисления последующих членов последовательности по заданным первым

- ✦ Например, последовательность натуральных чисел

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 1$$

- ✦ Последовательность чисел Фибоначчи

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

0,1,1,2,3,5,8,13.....

ОПИСАТЕЛЬНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✘ Описание способа получения членов последовательности
- ✘ Например, последовательность
3,1; 3,14; 3,141; 3,1415;
Образована из приближенных значений числа π
- ✘ Используется когда нельзя указать ни формулы общего члена, ни рекуррентного соотношения

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существуют два такие числа m и M , что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$m \leq x_n \leq M$$

- ✦ Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существуют такое число M , что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$x_n \leq M$$

- ✦ Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существуют такое число m , что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$m \leq x_n$$

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Доказательство ограниченности сводится к нахождению этих чисел, например:
- ✦ $x_n = n$ ограничена снизу ($m=0$) и не ограничена сверху
- ✦ $x_n = -2 \cdot n$ ограничена сверху ($m=-1$) и не ограничена снизу
- ✦ $x_n = \frac{1}{n}$ ограничена снизу ($m=0$) и ограничена сверху ($M=1$), следовательно, это ограниченная последовательность
- ✦ $x_n = (-1)^n$ ограничена снизу ($m=-2$) и ограничена сверху ($M=2$) следовательно, это тоже ограниченная последовательность

МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$x_{n+1} > x_n$$

- ✦ Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$x_{n+1} < x_n$$

- ✦ $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если $x_{n+1} \geq x_n$
- ✦ $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если $x_{n+1} \leq x_n$

МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности образуют класс **МОНОТОННЫХ** последовательностей
- Возрастающие и убывающие последовательности называют **строго МОНОТОННЫМИ**
- Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c , то ее называют **ПОСТОЯННОЙ**.

ПРИМЕР 1

- ✘ Исследовать на монотонность последовательность

$$x_n = \frac{3n + 1}{2n - 1}$$

- ✘ Рассмотрим разницу между x_{n+1} и x_n членами

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{3(n+1)+1}{2(n+1)-1} - \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3n+1}{2n-1} = \\ &= \frac{(3n+4)(2n-1) - (3n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-5}{(2n+1)(2n-1)} \end{aligned}$$

- ✘ Числитель дроби отрицателен, знаменатель положителен, следовательно вся дробь отрицательна, поэтому

$$x_{n+1} - x_n < 0 \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$$

- ✘ Т.е. данная последовательность убывающая и следовательно строго монотонная

ВОПРОСЫ.

- Является ли постоянная последовательность монотонной? А строго монотонной?
- Приведите примеры возрастающей и убывающей последовательности
- Приведите примеры ограниченной и не ограниченной последовательности

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Число a называют пределом последовательности $\{x_n\}$ и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

- ✦ если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_0 , что все члены последовательности с номерами $n > N_0$ удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

- ✦ Если такое число существует, последовательность называется сходящейся, если нет - расходящейся

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Промежуток $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ называют **ε -окрестностью** точки a .
- Используя понятие ε -окрестности можно дать следующее определение предела:
- Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N_0 такой, что все члены последовательности с номерам $n > N_0$ принадлежат ε -окрестности точки a

ПРИМЕР 2

- ✦ Например, рассмотрим последовательность

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

- ✦ Данная последовательность ограничена (снизу числом 0, сверху число 1)
- ✦ Если изображать члены последовательности точками на числовой прямой, то можно убедиться, что с ростом номеров точки будут приближаться к 1
1; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{99}{100}$;...

ПРИМЕР 2

- ✘ Более того, для всех x_n , где $n > 11$, $|x_n - 1| < 0,1$;
где $n > 101$, $|x_n - 1| < 0,01$ и т.д.
- ✘ То есть, какое бы малое положительное ε мы ни выбрали, в данной последовательности найдется такой член (номер которого мы будем обозначать N_0), что все члены последовательности с номерам $n > N_0$ будут принадлежат ε -окрестности точки $a=1$
- ✘ Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$
- ✘ Нужно отметить, что для каждого ε будет свой N_0 , и при уменьшении ε N_0 будет увеличиваться

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- 1) Теорема об единственности предела:
Последовательность не может сходиться к двум различным пределам
- 2) Предел последовательности, все члены которой равны одной и той же величине, равен этой величине.
- 3) Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a и $a > p$ ($a < q$), то все члены последовательности, начиная с некоторого, тоже будут меньше p (больше q)
- 4) Если последовательность имеет предел, то она ограничена

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✳ 5) Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы, то их сумма (разность) тоже имеет предел, причем предел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

- ✳ 6) Если последовательности имеют пределы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то их произведение тоже имеет предел, причем предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

- ✳ Из теорем 2 и 6 следует, что постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✳ 7) Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы, причем $y_n \neq 0$ для всех n , начиная с некоторого N_0 , то последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ тоже имеет предел, равный отношению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

- ✳ При помощи сформулированных теорем нахождение пределов последовательностей можно свести к нахождению пределов простейших последовательностей

ПРИМЕР 3

Вычислить предел последовательности

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 + n + 1}$$

Сразу использовать теорему о пределе частного нельзя, т.к. последовательности, стоящие в числителе и в знаменателе не имеют конечных пределов. Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на n^2

$$\frac{2n^2}{n^2 + n + 1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

ПРИМЕР 3 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

$$\square \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}$$

Определяем значения полученных простейших пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + n + 1} = \frac{2}{1 + 0 + 0} = 2$$

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной
- Т.е. любая сходящаяся последовательность ограничена
- Однако обратное утверждение не верно, из ограниченности последовательности не всегда следует ее сходимость, т.е. это условие не является достаточным

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✘ Действительно, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
- ✘ Тогда для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, кроме конечного их числа попадают в ε -окрестность точки a

$$a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon$$

- ✘ Так как членов последовательности, лежащих правее точки $a + \varepsilon$ конечно число, то перебрав их можно выбрать максимальный член, обозначим его M
- ✘ Аналогично, минимальный из членов последовательности, лежащих левее $a - \varepsilon$ обозначим m
- ✘ Таким образом, если $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность, то существуют числа m и M , такие, что для всех всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$m \leq x_n \leq M$$

- ✘ Следовательно $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность

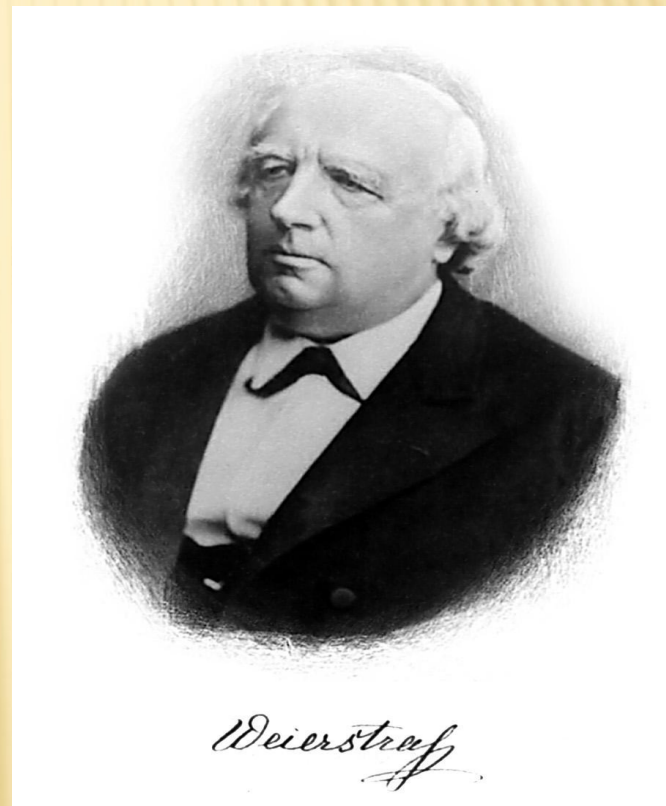
НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✘ Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$. Это ограниченная последовательность.
- ✘ Предположим, что предел этой последовательности существует и равен a .
- ✘ Если a – некоторое число отличное от 1 и -1 , то всегда можно будет найти такую ε -окрестность точки a , в которую не попадет ни один член последовательности.
- ✘ Следовательно $a=1$ или $a=-1$. Допустим, $a=1$.
- ✘ Возьмем $\varepsilon=0,1$. В промежуток $(0,9;1,1)$ попадают все члены последовательности, стоящие на четных местах (1), но не попадает ни один член последовательности, стоящий на нечетном месте (-1), следовательно 1 не является пределом данной последовательности
- ✘ Аналогично доказывается, что и -1 не является пределом
- ✘ Следовательно, несмотря на то, что последовательность $\{x_n\}$ ограниченная, она не является сходящейся

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема Вейерштрасса:

Если
последовательность
монотонна и ограничена,
то она обязательно
сходится



Карл Теодор Вильгельм
Вейерштрасс

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✳ Исследуем сходимость последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- ✳ Докажем, что она монотонна. Раскладывая выражение по формуле бинома Ньютона, получаем

$$\begin{aligned}x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\&= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\&+ \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = \\&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\&+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Если написать аналогичное разложение для x_{n+1} , то увидим, что к разложению x_n добавится $(n+2)$ -ое положительное слагаемое, каждое же из прежних слагаемых увеличится,
- ✦ Отсюда следует, что $x_{n+1} > x_n$, т.е. данная последовательность возрастающая и, следовательно, монотонная.
- ✦ Докажем, что она ограниченная.
- ✦ Опустив в выражении для x_n все сомножители, стоящие в круглых скобках, мы тем самым увеличим правую часть равенства, т.к. каждый из этих сомножителей меньше 1. В результате получим неравенство

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✘ Учитывая, что $2^{n-1} \leq n!$, т.е. $2^1 \leq 2!$, $2^2 \leq 3!$, $2^3 \leq 4!$... Для нашего неравенства имеем:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

- ✘ В правой части последнего неравенства сумма всех членов, начиная со второго есть сумма $n-1$ членов убывающей геометрической прогрессии, которая равна 1, поэтому при любом натуральном n

$$x_n < 3$$

- ✘ Таким образом, последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастающая и ограниченная, и согласно теореме Вейерштрасса, имеет предел.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- ✦ Этот предел имеет специальное обозначение e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045....$$

- ✦ Число e называют **неперовым** числом или числом Эйлера. Оно является одной из важнейших в математическом анализе констант
- ✦ Число e принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию e называется **натуральным логарифмом** и обозначается $\ln x$, т. е.
 $\ln x = \log_e x$
- ✦ Показательная функция с основанием e называется

ЧИСЛО ЭЙЛЕРА (НЕПЕРОВО ЧИСЛО) $e \approx 2,72$

- Названо в честь шотландского учёного Джона Непера (1550—1617), автора работы «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614 год), одного из изобретателей логарифмов,



ЧИСЛО ЭЙЛЕРА (НЕПЕРОВО ЧИСЛО) $e \approx 2,72$

- Саму константу впервые вычислил швейцарский математик Якоб Бернулли (1655-1705) в ходе решения задачи о предельной величине процентного дохода (1690 г).



ЧИСЛО ЭЙЛЕРА (НЕПЕРОВО ЧИСЛО) $e \approx 2,72$

- Букву e начал использовать швейцарский, немецкий и российский математик и механик, Леонард Эйлер в 1727 году.
- Почему была выбрана именно буква e ? Возможно, это связано с тем, что с неё начинается слово *exponential* («показательный», «экспоненциальный»). Другое предположение заключается в том, что буквы a , b , c и d уже довольно широко использовались в иных целях, и e была первой «свободной» буквой. Также примечательно, что буква e является первой в фамилии Эйлер (Euler).



НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема Больцано-Коши (критерий сходимости)

Для того, чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного числа ε существовал такой номер $N_0(\varepsilon)$, чтобы неравенство $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$ выполнялось для всех $n > N_0$ и $p \geq 1$



Французский математик и механик
Огюстен Луи Коши



Чешский математик и философ
Бернард Больцано