

Символы математической логики

Кванторы

\forall - общности

\exists - существования

Связки

\wedge - конъюнкция (и)

\vee - дизъюнкция (или)

\rightarrow - импликация (если..., то...)

\equiv - эквиваленция (если и только
если..., то...)

\neg - отрицание (неверно, что...)

Понятие множества

Под *множеством* понимается совокупность некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются *элементами* или точками, этого множества.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы – строчными.

$a \in A$ - принадлежит

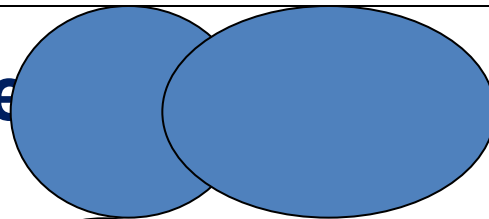
$a \notin A$ - не принадлежит

$A \subset B$ - подмножество

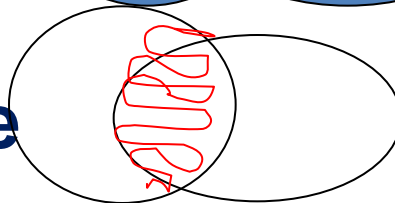
\emptyset - пустое множество

Операции над множествами

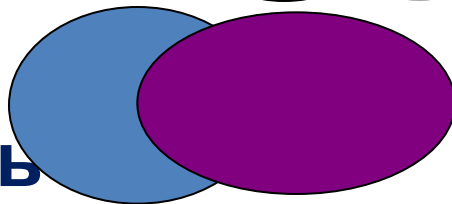
$A \cup B$ - объединение



$A \cap B$ - пересечение



$A \setminus B$ - разность



Пример. Даны множества $A = \{1; 3; 6; 8\}$ и $B = \{2; 4; 6; 8\}$

Найти объединение, пересечение и разность

множеств A и B .

Последовательность. Предел последовательности.

- **Определение 1.** Если по некоторому закону каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие вполне определенное число a_n , то говорят, что дана числовая последовательность $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

словами, числовая последовательность эта функция натурального аргумента $a_n = f(n)$.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются членами последовательности, а число a_n — общим членом.

Пример. $a_n = (-1)^n / (2n + 1)$.

- **Определение 2.** Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N , зависящий от ε , $N = N(\varepsilon)$, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ справедливо $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{или} \quad a_n \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а в противном случае - расходящейся.

Функция. Способы задания функции.

- **Определение 3.** Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу соответствует единственный элемент y из множества Y , то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$ переменной x . При этом множество X называется областью определения функции, а множество Y – областью значений функции.
 x - называется независимой переменной или аргументом, y - зависимой переменной, буква f – обозначает закон соответствия.

Существует несколько способов задания функции.

- **Аналитический способ**, если функция задана формулой вида $y = f(x)$.
- **Табличный способ**, если функция задана в виде таблицы.
- **Графический способ**, если функция изображена в виде в виде графика-множества точек (x, y) плоскости, абсциссой которых есть значения аргумента x , а ординаты - соответствующие им значения функции y .
- **Словесный способ**, если функция описана правилом ее составления, например функция Дирихле: $f(x) = 1$, если x – рационально; и $f(x) = 0$, если x – иррационально.

- Функция может быть задана программой, вычисляющей ее значения с помощью компьютера.

Основные свойства функций.

1. Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любых значений x из любой области определения $f(-x) = f(x)$, и **нечетной**, если $f(-x) = -f(x)$.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией **общего вида**.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

- 2. Монотонность.** Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке X , если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Функции возрастающие или убывающие называются **монотонными**.
- 3. Ограниченность.** Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке X , если существует такое положительное число $M > 0$, то $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$.

В противном случае функция называется **неограниченной**.

- **4. Периодичность.** Функция $y = f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x + T) = f(x)$.

Основные элементарные функции

- 1) Степенная функция: $y = x^\alpha$, где

Ее область определения и множество значений зависят от α .

Например:

а) $y = x^2 : D(x^2) = (-\infty; +\infty), E(x^2) = [0; +\infty)$

б) $y = \sqrt{x} : D(\sqrt{x}) = [0; +\infty), E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$

в) $y = x^3 : D(x^3) = (-\infty; +\infty), E(x^3) = (-\infty; +\infty)$.

- **2. Показательная функция:** a^x , где $a > 0, a \neq 1$; $D(a^x) = (-\infty; +\infty)$, $E(a^x) = (0; +\infty)$.

3) Логарифмическая функция:

$$y = \log_a x, \quad \text{где}$$

4) Тригонометрические функции:

а) $y = \sin x$: $D(\sin x) = (-\infty; +\infty)$, $E(\sin x) = [-1; 1]$;

б) $y = \cos x$: $D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$, $E(\cos x) = [-1; 1]$;

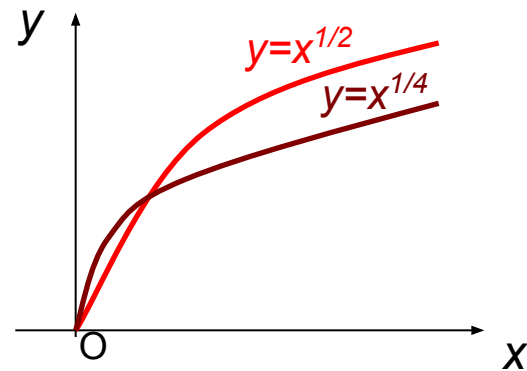
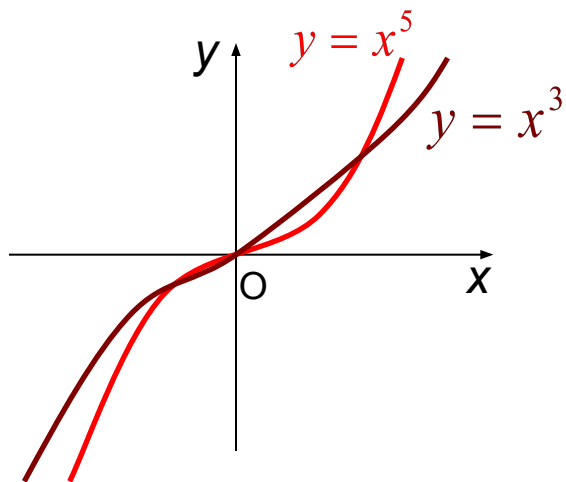
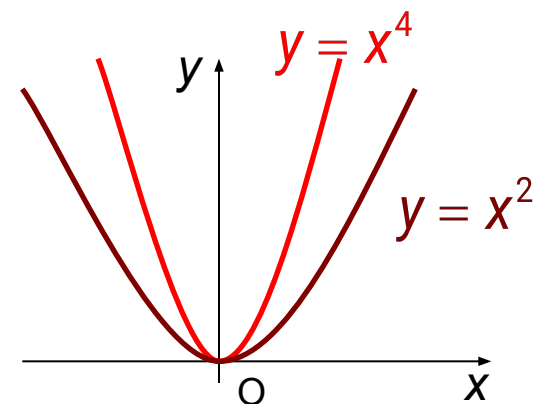
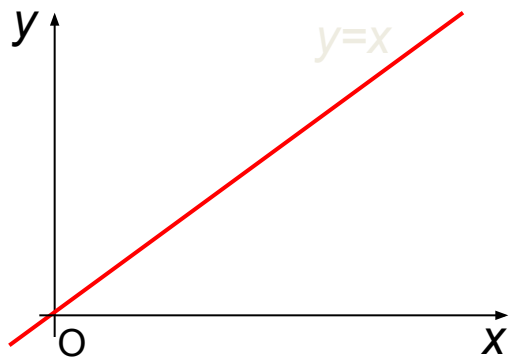
в) $y = \operatorname{tg} x$: $D(\operatorname{tg} x) = \left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \right\}$, $E(\operatorname{tg} x) = R$;

г) $y = \operatorname{ctg} x$: $D(\operatorname{ctg} x) = \left\{ x \mid x \neq \pi n, n \in Z \right\}$, $E(\operatorname{ctg} x) = R$.

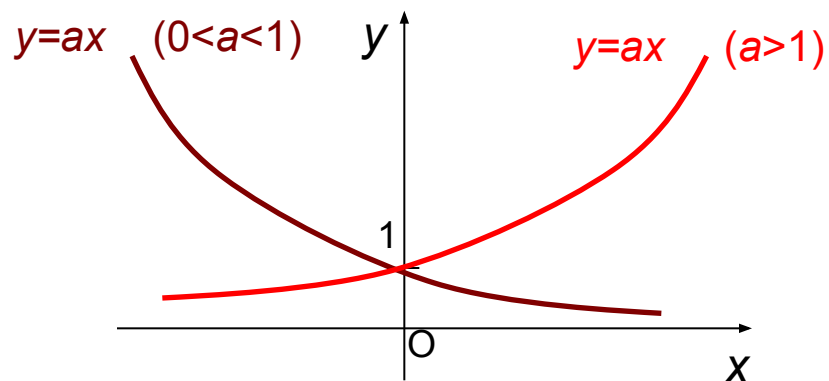
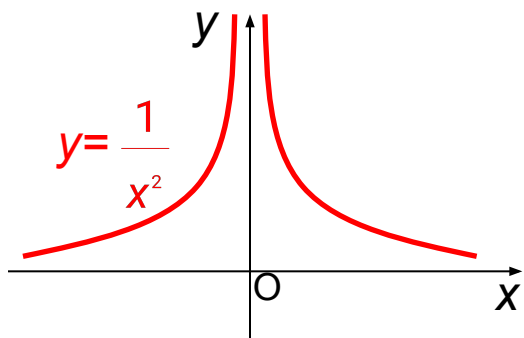
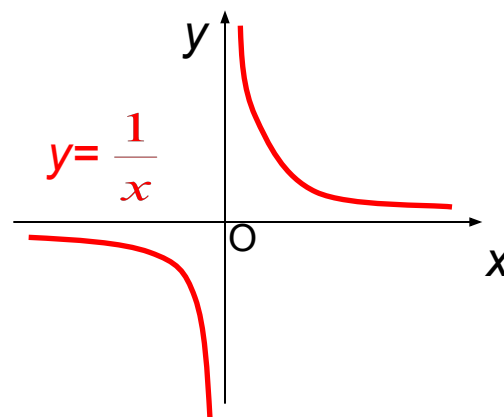
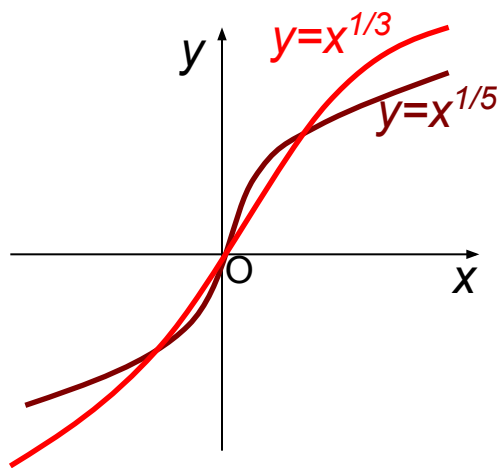
• 5) Обратные тригонометрические функции:

- а) $y = \arcsin x : D(\arcsin x) = [-1; 1] \quad E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$
- б) $y = \arccos x : D(\arccos x) = [-1; 1] \quad E(\arccos x) = [0; \pi];$
- в) $y = \operatorname{arctg} x : D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; +\infty) \quad E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$
- г) $y = \operatorname{arcctg} x : D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; +\infty), \quad E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi).$

- **Графики основных элементарных функций:**



- Графики основных элементарных функций:



ФУНКЦИЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

- Графики основных элементарных функций:

