Розділ 4. Булеві функції

4.1. Булеві змінні і функції

- *двійкові інтерпретації*
- *істотні та фіктивні змінні*

Розглянемо двохелементну множину B, елементи якої будемо позначати через 0 і 1: $B=\{0,1\}$.

- Змінні, які можуть приймати значення тільки з множини B, називаються ***логічними*** або ***булевими змінними***. Самі значення 0 і 1 булевих змінних називаються ***булевими константами***.

В мовах програмування для роботи з такими змінними, як правило, вводиться спеціальний логічний (булевський) тип (наприклад, у мовах Pascal і Java — boolean, у C+ — bool). Змінна цього типу приймає два значення: true і false.

- Функція виду $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, аргументи x_i і значення y якої належать множині B, називається ***n-місною булевою функцією***. Такі функції також називають ***логічними*** або ***перемикальними*** функціями.

- Кортеж $(x_1; x_2, ..., x_n)$ конкретних значень булевих змінних називається ***двійковим словом (n-словом)*** або ***булевим набором*** довжини n.

- Для булевої функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ конкретне значення булевого набору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається також ***інтерпретацією булевої функції*** f.

- Множина всіх двійкових слів, що позначається через B^n, називається ***n-вимірним булевим кубом*** і містить 2^n елементів-слів: $|B^n| = 2^n$.

Функції кількох незалежних змінних можна розглядати як функції від більшої кількості змінних. При цьому значення функції не змінюється при зміні значення цих «додаткових» змінних.

- Змінна x_{i} у функції $f(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..., x_{\mathrm{n}})$ називається ***неістотною*** (або ***фіктивною***), якщо $f(x_1,\ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1},..., x_{\mathrm{n}}) = f(x_1,\ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1},..., x_{\mathrm{n}})$ при будь-яких значеннях решти змінних, тобто якщо зміна значення x_{i} у будь-якому наборі значень x_1, ..., x_{n} не змінює значення функції.

  В цьому випадку функція $f(x_1, ..., x_{\mathrm{n}})$ фактично залежить від n-1 змінної, тобто зображує функцію $g(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},..., x_{\mathrm{n}})$.

4.2. Способи задання булевих функцій

- *таблиця істинності*
- *булева алгебра*
- *пріоритет операцій*

Булеві функції можуть бути задані такими способами:

1. За допомогою таблиці істинності (значеннями на кожній з інтерпретацій).
2. Аналітично (у вигляді формули).

- Таблиці, в яких кожній інтерпретації (тобто набору аргументів) функції поставлено у відповідність її значення, називаються ***таблицями істинності булевої функції***.

  В таблиці істинності кожній змінній та значенню самої функції відповідає по одному стовпчику, а кожній інтерпретації — по одному рядку. Кількість рядків у таблиці відповідає кількості різних інтерпретацій функції.

Булеві функції однієї змінної

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$\varphi_0 = 0$ — константа 0,

$\varphi_1 = x$ — повторення аргументу,

$\varphi_2 = \neg x$ — інверсія або заперечення аргументу,

$\varphi_3 = 1$ — константа 1.

Булеві функції двох змінних

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Позначення булевих функцій двох змінних

Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_0(x, y)$	0	константа 0	константа 0
$f_1(x, y)$	$x \wedge y = xy$	кон'юнкція (логічне «і»)	x і y
$f_2(x, y)$	$x \leftarrow y$	заперечення імплікації	x і не y
$f_3(x, y)$	x	повторення першого аргументу	як x
$f_4(x, y)$	$y \leftarrow x$	заперечення оберненої імплікації	не x і y
$f_5(x, y)$	y	повторення другого аргументу	як y
$f_6(x, y)$	$x \oplus y$	що виключає «або» (сума за модулем 2)	x не як y
$f_7(x, y)$	$x \vee y$	диз'юнкція (логічне «або»)	x або y

Функція	Позначення	Назва	Прочитання
$f_8(x, y)$	$x \downarrow y$	заперечення диз'юнкції (стрілка Пірса)	не x і не y
$f_9(x, y)$	$x \sim y$	еквівалентність	x як y
$f_{10}(x, y)$	$\square y$	заперечення другого аргументу	не y
$f_{11}(x, y)$	$y \to x$	обернена імплікація	x, якщо y (x або не y)
$f_{12}(x, y)$	$\square\ x$	заперечення першого аргументу	не x
$f_{13}(x, y)$	$x \to y$	імплікація	якщо x, то y (не x або y)
$f_{14}(x, y)$	$x \mid y$	заперечення кон'юнкції (штрих Шеффера)	не x або не y
$f_{15}(x, y)$	1	константа 1	константа 1

Булева алгебра

- ***Булева алгебра*** (загальна) — це алгебраїчна структура $(A, \wedge, \vee, \overline{\ }, 0, 1)$ з бінарними операціями $\wedge$, $\vee$: $A^2 \rightarrow A$, унарною операцією «$\overline{\ }$»: $A \rightarrow A$ і виділеними елементами 0, 1 в носії A, які задовольняють властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності.
- Якщо носій алгебраїчної структури $B = \{0, 1\}$ складається з двох елементів, то така структура $(B, \wedge, \vee, \overline{\ })$ називається ***двохелементною булевою алгеброю***.
- ***Алгеброю логіки*** називається двохелементна булева алгебра $(B, \wedge, \vee, \overline{\ }, \rightarrow, \sim)$, $B=\{0,1\}$, в якій множину операцій доповнено двома бінарними операціями: імплікацією та еквівалентністю.

- ***Формула*** — це вираз, що містить булеві функції та їхні суперпозиції.
- ***Суперпозицією*** називається спосіб одержання нових функцій шляхом підстановки значень одних функцій замість значень аргументів інших функцій, при цьому деякі з функцій можуть тотожно співпадати з однією із змінних.

Якщо у формулі відсутні дужки, то
операції виконуються у такій послідовності:

заперечення $\overline{\ }$
кон'юнкція $\wedge$
диз'юнкція $\vee$
імплікація $\rightarrow$
еквівалентність ~

На відміну від табличного задання, зображення функції формулою не єдине.

- Формули, що зображують одну й ту ж функцію, називаються ***еквівалентними*** або ***рівносильними***.

Приклад. Функцію штрих Шеффера можна зобразити за допомогою основних операцій булевої алгебри формулами:

$$f_{14} = \neg x_1 \vee \neg x_2 \quad \text{або} \quad f_{14} = \overline{x_1 x_2}$$

а функцію стрілка Пірса таким чином:

$$f_8 = \neg x_1 \neg x_2 \quad \text{або} \quad f_8 = \overline{x_1 \vee x_2}$$

4.3. Двоїстість

- *двоїсті та самодвоїсті булеві функції*
- *принцип двоїстості*
- *побудова двоїстої функції за таблицею*
- *побудова двоїстої функції за формулою*

- Функція $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ називається ***двоїстою*** до функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо
$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$.

  Для будь-якої функції двоїста їй визначається однозначно. $(f^*)^* = f$

$$(f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n))^* = (\overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}))^* =$$

$$= (\overline{\overline{f}}(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}, \ldots, \overline{\overline{x_n}})) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Якщо функції рівні, то і двоїсті їм функції також рівні: $f_1 = f_2$, то $f_1^* = f_2^*$.
- Функція, двоїста сама собі, тобто $f = f^*$, називається ***самодвоїстою***.

Щоб побудувати таблицю істинності функції, що двоїста даній, необхідно побудувати таблицю істинності заданої функції, кожне значення булевої функції замінити на протилежне і записати одержаний стовпчик у зворотній послідовності.

Приклад.

Знайти функцію, яка двоїста функції $f(x, y, z)$, якщо відомо, що $f(x, y, z) = 1$ тільки на інтерпретаціях (001), (011), (111).

x	y	z	f	f^*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Нехай функція F задана як суперпозиція функцій f_0 і функцій $f_1, ..., f_n$: $F = f_0(f_1, ..., f_n)$. Функцію F^*, що двоїста F, можна одержати, замінивши в формулі F функції $f_0; f_1, ..., f_n$ на двоїсті до них .

Вкажемо функції, що двоїсті до «елементарних» функцій логіки $\wedge$, $\vee$, $\overline{\ }$, константа 0, константа 1:

$f(x, y) = x \wedge y$; $\qquad f^*(x, y) = x \vee y$;

$f(x) = \square x$; $\qquad f^*(x) = \square x = f(x)$;

$f(x) = 0$; $\qquad f^*(x) = \square 0 = 1$;

Приклад.

Знайти функцію, яка двоїста функції $f = x \vee \square yz \vee 0$

$f^* = (x \vee (\square yz) \vee 0)^* = x \wedge (\square y \vee z) \wedge 1.$

Порядок виконання операцій повинен залишитися попереднім

4.4. Закони булевої алгебри

- ***Комутативні закони***

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

- ***Асоціативні закони***

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

- ***Дистрибутивні закони***

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Закони булевої алгебри

- ***Тотожності з константами***

$$x \vee 0 = x$$
$$x \wedge 1 = x$$
$$x \vee 1 = 1$$
$$x \wedge 0 = 0$$

- ***Закони ідемпотентності***

$$x \vee x = x$$
$$x \wedge x = x$$

Закони булевої алгебри

- ***Закон подвійного заперечення***

$$\overline{\overline{x}} = x$$

- ***Закон протиріччя***

$$x \wedge \square x = 0$$

- ***Закон виключеного третього***

$$x \vee \square x = 1$$

Закони булевої алгебри

- ***Закони елімінації (поглинання)***

$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$

- ***Закони де Моргана***

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$
$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

4.5. Диз'юнктивні та кон'юктивні розкладання булевих функцій

- *теореми розкладання*
- *елементарні кон'юнкція і диз'юнкція*
- *конституенти нуля та одиниці*
- *нормальні форми*

Для спрощення математичних викладень введемо двійковий параметр σ і позначення x^{σ} таким чином:

$x, \sigma \in B = \{0, 1\}$,

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \overline{x}, \sigma = 0 \\ x, \sigma = 1 \end{cases}$$

Можемо зробити висновок, що

$$x^{\sigma} = \begin{cases} 1, \sigma = x \\ 0, \sigma \neq x \end{cases}$$

Теорема 1. *Про диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за k змінними*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n) =$$

$$= \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots\sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_k^{\sigma_k} \wedge f(\sigma_1,\dots,\sigma_k,x_{k+1},\dots,x_n)$$

Запис $\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots\sigma_k)}$

означає багатократну диз'юнкцію, яка береться за всіма можливими наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ при будь-якому k $(1 \le k \le n)$.

Приклад.

Записати диз'юнктивне розкладання функції

$f(x,y,z,t) = \overline{(x \wedge y \vee z)} \wedge t$ за змінними x, z.

Розв'язок. За теоремою про розкладання:

$$f(x,y,z,t) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x^{\sigma_1} \wedge z^{\sigma_2} \wedge f(\sigma_1, y, \sigma_2, t) =$$

$= \square x \wedge \square z \wedge f(0, y, 0, t) \vee \square x \wedge z \wedge f(0, y, 1, t) \vee$

$\vee x \wedge \square z \wedge f(1, y, 0, t) \vee x \wedge z \wedge f(1, y, 1, t)$

Обчислимо:

$f(0,y,0,t) = \overline{(0 \wedge y \vee 0)} \wedge t = t;$ $f(1,y,0,t) = \overline{(1 \wedge y \vee 0)} \wedge t = \overline{y} \wedge t;$

$f(0,y,1,t) = \overline{(0 \wedge y \vee 1)} \wedge t = 0;$ $f(1,y,1,t) = \overline{(1 \wedge y \vee 1)} \wedge t = 0;$

$f(x, y, z, t) = \square x \wedge \square z \wedge t \vee \square x \wedge z \wedge 0 \vee x \wedge \square z \wedge \square y \wedge t \vee$

$\vee x \wedge z \wedge 0 = \square x \wedge \square z \wedge t \vee x \wedge \square z \wedge \square y \wedge t = \square x \square z$

Наслідок 1. *Диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за однією змінною.*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_i)} x_i^{\sigma_i} \wedge f(x_1, ..., x_{i-1}, \sigma_i, x_{i+1}, ..., x_n)$$

Приклад.

Записати диз'юнктивне розкладання функції $f(x,y,z,t)=\overline{(x\wedge y\vee z)}\wedge t$ за змінною *x*.

Розв'язок.

$$f(x,y,z,t)=\underset{(\sigma_1)}{\vee} x^{\sigma_1}\wedge f(\sigma_1,y,z_2,t)=$$

$$=\square x\ \wedge\ f(0,y,z,t)\ \vee\ x\ \wedge\ f(1,y,z,t)$$

Обчислимо:

$$f(0,y,z,t)=\overline{(0\wedge y\vee z)}\wedge t=\bar{z}\wedge t;$$

$$f(1,y,z,t)=\overline{(1\wedge y\vee z)}\wedge t=\bar{y}\wedge\bar{z}\wedge t;$$

Підставимо одержані значення:

$$f(x,y,z,t)=\square x\ \wedge\ \square z\ \wedge\ t\ \vee\ x\ \wedge\ \square y\ \wedge\ \square z\ \wedge\ t=x\square z\ t\ \vee\ x\square y\square z\ t$$

Наслідок 2. *Про диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за всіма змінними*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_k) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_k) = 1}} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

Запис $\bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_k) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_k) = 1}}$ означає, що диз'юнкція

береться за всіма наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, на яких $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x, y, z) = xy \vee \square z$.

Отримати диз'юнктивне розкладання цієї функції за всіма змінними.

Розв'язок. Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$f(0, 0, 0) = 0 \wedge 0 \vee \square 0 = 0 \vee 1 = 1,$

$f(0, 0, 1) = 0 \wedge 0 \vee \square 1 = 0 \vee 0 = 0,$

$f(0, 1, 0) = 0 \wedge 1 \vee \square 0 = 0 \vee 1 = 1,$

$f(0, 1, 1) = 0 \wedge 1 \vee \square 1 = 0 \vee 0 = 0,$

$f(1, 0, 0) = 1 \wedge 0 \vee \square 0 = 0 \vee 1 = 1,$

$f(1, 0, 1) = 1 \wedge 0 \vee \square 1 = 0 \vee 0 = 0,$

$f(1, 1, 0) = 1 \wedge 1 \vee \square 0 = 1 \vee 1 = 1,$

$f(1, 1, 1) = 1 \wedge 1 \vee \square 1 = 1 \vee 0 = 1.$

$$f(x, y, z) = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^1 z^0 \vee x^1 y^0 z^0 \vee x^1 y^1 z^0 \vee x^1 y^1 z^1 =$$

$$= \square x \square y \square z \vee \square x\, y \square z \vee x \square y \square z \vee x\, y \square z \vee x\, y\, z.$$

- ***Елементарною кон'юнкцією*** називається кон'юнкція будь-якого числа булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Елементарною кон'юнкцією, що містить нуль змінних, будемо вважати константу 1.

Приклад.

Елементарними кон'юнкціями для функції від однієї змінної можуть бути $y, \square z$,
від двох змінних — $\square x \wedge y, x \wedge \square z$,
від трьох змінних — $x \wedge \square y \wedge z, x \wedge \square y \wedge \square z, x \wedge y \wedge z$

- ***Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)*** називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції елементарних кон'юнкцій.

- Елементарна кон'юнкція $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$ називається ***конституентою одиниці*** функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$.

Конституента одиниці має такі властивості:

1. Конституента одиниці дорівнює одиниці тільки на відповідній їй інтерпретації.
2. Значення конституенти одиниці однозначно визначається номером відповідної інтерпретації.
3. Кон'юнкція будь-якого числа різних конституент одиниці функції дорівнює нулю.

- ***Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)*** булевої функції називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції конституент одиниці даної функції.

Теорема 2. *Про кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за k змінними*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) =$$

$$= \bigwedge_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_k)} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$$

Запис $\bigwedge_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_k)}$

означає багатократну кон'юнкцію, яка береться за всіма можливими наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)$ при будь-якому k $(1 \le k \le n)$.

Приклад.

Записати кон'юнктивне розкладання функції

$$f(x,y,z,t)=\overline{(x\wedge y\vee z)}\wedge t$$

за змінними *x*, *z*.

Розв'язок. За теоремою про розкладання:

$$f(x,y,z,t)=\bigwedge_{(\sigma_1,\sigma_2)} x^{\overline{\sigma_1}}\vee z^{\overline{\sigma_2}}\vee f(\sigma_1,y,\sigma_2,t)=$$

$$=(x\vee z\vee f(0,y,0,t))\wedge(x\vee\square z\vee f(0,y,1,t))\wedge$$
$$\wedge(\square x\vee z\vee f(1,y,0,t))\wedge(\square x\vee\square z\vee f(1,y,1,t))$$

Обчислимо:

$$f(0,y,0,t)=\overline{(0\wedge y\vee 0)}\wedge t=t;\qquad f(1,y,0,t)=\overline{(1\wedge y\vee 0)}\wedge t=\overline{y}\wedge t;$$

$$f(0,y,1,t)=\overline{(0\wedge y\vee 1)}\wedge t=0;\qquad f(1,y,1,t)=\overline{(1\wedge y\vee 1)}\wedge t=0;$$

$$f(x,y,z,t)=(x\vee z\vee t)\wedge(x\vee\square z\vee 0)\wedge(\square x\vee z\vee\square y\wedge t)\wedge(\square x\vee\square z\vee 0)==(x\vee z\vee t)\wedge(x\vee\square z)\wedge(\square x\vee z\vee\square y\, t)\wedge(\square x\vee\square z)$$

Наслідок 3. *Кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за однією змінною.*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_i)} x_i^{\bar{\sigma}_i} \vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Приклад.

Записати кон'юнктивне розкладання функції $f(x,y,z,t)=\overline{(x\wedge y\vee z)}\wedge t$ за змінною x.

Розв'язок.

$$f(x,y,z,t)=\bigwedge_{(\sigma_1)} x^{\overline{\sigma}_1}\vee f(\sigma_1,y,z_2,t)=$$

$$=(x\vee f(0,y,z,t))\wedge(\square x\vee f(1,y,z,t))$$

Обчислимо:

$$f(0,y,z,t)=\overline{(0\wedge y\vee z)}\wedge t=\overline{z}\wedge t;$$

$$f(1,y,z,t)=\overline{(1\wedge y\vee z)}\wedge t=\overline{y}\wedge\overline{z}\wedge t;$$

Підставимо одержані значення:

$$f(x,y,z,t)=(x\vee\square z\ t)\vee(\square x\vee\square y\square z\ t)$$

Наслідок 2. *Про кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за всіма змінними*

Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k) = 0}} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$$

Запис $\bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k) = 0}}$ означає, що кон'юнкція

береться за всіма наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, на яких $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x, y, z) = xy \vee \square z$.

Отримати кон'юнктивне розкладання цієї функції за всіма змінними.

Розв'язок. Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$f(0, 0, 0) = 0 \wedge 0 \vee \square 0 = 0 \vee 1 = 1,$

$f(0, 0, 1) = 0 \wedge 0 \vee \square 1 = 0 \vee 0 = 0,$

$f(0, 1, 0) = 0 \wedge 1 \vee \square 0 = 0 \vee 1 = 1,$

$f(0, 1, 1) = 0 \wedge 1 \vee \square 1 = 0 \vee 0 = 0,$

$f(1, 0, 0) = 1 \wedge 0 \vee \square 0 = 0 \vee 1 = 1,$

$f(1, 0, 1) = 1 \wedge 0 \vee \square 1 = 0 \vee 0 = 0,$

$f(1, 1, 0) = 1 \wedge 1 \vee \square 0 = 1 \vee 1 = 1,$

$f(1, 1, 1) = 1 \wedge 1 \vee \square 1 = 1 \vee 0 = 1.$

$$f(x, y, z) = (x^{\square 0} \vee y^{\square 0} \vee z^{\square 1}) \wedge (x^{\square 0} \vee y^{\square 1} \vee z^{\square 1}) \wedge (x^{\square 1} \vee y^{\square 0} \vee z^{\square 1}) =$$

$$= (x \vee y \vee \square z) \wedge (x \vee \square y \vee \square z) \wedge (\square x \vee y \vee \square z).$$

- ***Елементарною диз'юнкцією*** називається диз'юнкція будь-якого числа булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Елементарною диз'юнкцією, що містить нуль змінних, будемо вважати константу 0.

Приклад.

Елементарними диз'юнкціями для функції

від однієї змінної можуть бути $y, \square z$,

від двох змінних — $\square x \vee y$, $x \vee \square z$,

від трьох змінних — $x \vee \square y \vee z$, $x \vee \square y \vee \square z$, $x \vee y \vee z$

- ***Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ)*** називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції елементарних диз'юнкцій.

- Елементарна диз'юнкція $x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$ називається ***конституентою нуля*** функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0$.

Конституента нуля має такі властивості:

1. Конституента нуля дорівнює нулю тільки на відповідній їй інтерпретації.
2. Значення конституенти нуля однозначно визначається номером відповідної інтерпретації.
3. Диз'юнкція будь-якого числа різних конституент нуля функції дорівнює одиниці.

- ***Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)*** булевої функції називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції конституент нуля даної функції.

4.6. Нормальні форми зображення булевих функцій

- *алгоритми переходу від таблиць істинності булевих функцій до ДДНФ/ДКНФ і навпаки*
- *алгоритми переходу від довільної формули до ДКНФ і ДДНФ*

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ

1. Виділити всі інтерпретації ($\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$), на яких значення функції дорівнює одиниці.
2. Записати конституенти одиниці $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$ що відповідають відзначеним інтерпретаціям.
3. Одержати ДДНФ функції за допомогою з'єднання операцією диз'юнкції записаних конституент одиниці.

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДКНФ

1. Виділити всі інтерпретації $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, на яких значення функції дорівнює нулю.
2. Записати конституенти нуля $x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$ що відповідають виділеним інтерпретаціям.
3. Записавши кон'юнкцію конституент нуля, одержати ДКНФ функції.

Приклад. Одержати ДДНФ та ДКНФ для функції

x	y	$f_8(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$f_8(x,y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$$

ДДНФ: $f_8(x, y) = x^0 y^0 = \square x \square y.$

ДКНФ: $f_8(x, y) = (x^{\square 0} \vee y^{\square 1})\,(x^{\square 1} \vee y^{\square 0})\,(x^{\square 1} \vee$

$y^{\square 1}) = \qquad = (x \vee \square y)\,(\square x \vee y)\,(\square x \vee \square y).$

Одержання таблиці істинності функції, що задана ДДНФ або ДКНФ, зображує процедуру, обернену розглянутій вище.

Приклад. Для функції, що задана ДДНФ,

$$f(x, y, z) = x\, y \square z \vee \square x\, y\, z \vee \square x \square y \square z$$

побудувати її таблицю істинності.

Розв'язок. Дана функція містить три конституенти одиниці — $x\ y \square z$, $\square x\ y\ z$, $\square x \square y \square z$, яким відповідають інтерпретації (1,1,0), (0,1,1), (0,0,0). На даних інтерпретаціях функція дорівнює одиниці, на решті — нулю.

Таблиця істинності $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$

x	y	z	$f(x, y, z)$	$g(x, y, z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Приклад. Для функції, що задана ДКНФ,

$g(x, y, z) = (x \vee y \vee \neg z)(\neg x \vee y \vee z)(\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

побудувати її таблицю істинності.

Розв'язок. Конституентам нуля $x \vee y \vee \neg z$, $\neg x \vee y \vee z$, $\neg x \vee \neg y \vee \neg z$ даної функції відповідають інтерпретації (0,0,1), (1,0,0), (1,1,1). В наведених інтерпретаціях функція дорівнює нулю, в решті — одиниці.

Алгоритм переходу від довільної формули алгебри логіки до ДДНФ

1. Виключити константи (закони дій з константами).
2. Опустити знаки заперечення безпосередньо на змінні (закони де Моргана).
3. Розкрити дужки (дистрибутивний закон), спростити і звести подібні (закони ідемпотентності й протиріччя). Одержано ДНФ.
4. Побудувати конституенти одиниці функції введенням у кожну елементарну кон'юнкцію відсутніх змінних (закон виключеного третього).
5. Розкрити дужки (дистрибутивний закон) і звести подібні (закон ідемпотентності). Одержано ДДНФ функції.

Приклад. Побудувати ДДНФ функції

$$f(x, y, z) = xy \vee \overline{(x(z \vee \bar{y}) \vee yz)}$$

Розв'язок. Опускаємо заперечення на змінні, використовуючи закони де Моргана

$$xy \vee \overline{(x(z \vee \bar{y}) \vee yz)} = xy \vee \overline{x(z \vee \bar{y})} \wedge \overline{yz} =$$

$$= xy \vee (\bar{x} \vee \overline{(z \vee \bar{y})})(\bar{y} \vee \bar{z}) = xy \vee (\bar{x} \vee \bar{z}y)(\bar{y} \vee \bar{z})$$

Розкриваємо дужки (дистрибутивний закон)

$$= xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{z}y\bar{y} \vee \bar{z}y\bar{z} =$$

Спрощуємо (закони ідемпотентності і протиріччя)

$$= xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee 0 \vee \bar{z}y = xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{z}y$$

Одержано ДНФ.

Дана функція залежить від трьох змінних, тому до елементарних кон'юнкцій необхідно ввести відсутні змінні (закон виключення третього)

$$xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{z}y =$$

$$= xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee (x \vee \bar{x})y\bar{z} =$$

Розкриваємо дужки (дистрибутивний закон)

$$= xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} =$$

Зводимо подібні (закон ідемпотентності)

$$= xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

Одержано ДДНФ.

Алгоритм переходу від довільної формули алгебри логіки до ДКНФ

1. Виключити константи (закони дій з константами).
2. Опустити знаки заперечення безпосередньо на змінні (закони де Моргана).
3. Звести функцію до виду кон'юнкції елементарних диз'юнкцій (дистрибутивний закон), спростити і звести подібні (закони ідемпотентності і виключеного третього). Одержано КНФ.
4. Побудувати конституенти нуля функції введенням у кожну елементарну диз'юнкцію відсутніх змінних (закон протиріччя).
5. Звести функцію до виду кон'юнкції конституент нуля (дистрибутивний закон) і спростити (закон ідемпотентності). Одержано ДКНФ функції.

Приклад. Побудувати ДКНФ функції

$$f(x,y,z) = xy \vee \overline{(x(z \vee \overline{y}) \vee yz)}$$

Розв'язок. Опускаємо заперечення на змінні, використовуючи закони де Моргана

$$xy \vee \overline{(x(z \vee \overline{y}) \vee yz)} = xy \vee \overline{x(z \vee \overline{y})} \wedge \overline{yz} =$$

$$= xy \vee (\overline{x} \vee \overline{(z \vee \overline{y})}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z}) = xy \vee (\overline{x} \vee \overline{z}y) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z})$$

Будуємо КНФ

(дистрибутивний закон $a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)$)

$$= xy \vee (\square x \vee y \square z)(\square y \vee \square z) =$$

$$= xy \vee (\square x \vee y)(\square x \vee z)(\square y \vee \square z) =$$

$$= (x \vee (\square x \vee y)(\square x \vee \square z)(\square y \vee \square z)) \wedge$$

$$\wedge (y \vee (\square x \vee y)(\square x \vee \square z)(\square y \vee \square z)) =$$

$$= (x \vee \square x \vee y)(x \vee \square x \vee \square z)(x \vee \square y \vee \square z)(\square x \vee y \vee y) \wedge \wedge (\square x \vee y \vee \square z)(\square y \vee y \vee \square z)$$

$=$

ідемпотентность і виключення третього

$$= 1 \wedge 1 \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge 1 =$$

$$= (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$ Одержано КНФ.

Дана функція залежить від трьох змінних, тому до елементарних диз'юнкцій необхідно ввести відсутні змінні (закон протиріччя)

$$(x \vee \square y \vee \square z)(\square x \vee y)(\square x \vee y \vee \square z) =$$

$$= (x \vee \square y \vee \square z)(\square x \vee y \vee z \square z)(\square x \vee y \vee \square z) =$$

Знову дистрибутивний закон

$$= (x \vee \square y \vee \square z)(\square x \vee y \vee z)(\square x \vee y \vee \square z)(\square x \vee y \vee \square z) =$$

Зводимо подібні (закон ідемпотентності)

$$= (x \vee \square y \vee \square z)(\square x \vee y \vee z)(\square x \vee y \vee \square z)$$

Одержано ДКНФ.