

Тема 4. Нелинейные модели

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

12
45

Темы лекции

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Нелинейная регрессия
- Преобразования переменных
- Экономическая интерпретация регрессионной модели

1 2
4 5

Направления анализа и развития парной линейной регрессии

- Ключевые точки (начало координат)
- Кривая или прямая
- Форма криволинейной зависимости
- Вспомогательные экономические показатели (скорость и темп роста, эластичность)
- Уточнение формы (экстремумы, пределы)
- Сравнение функциональных форм

Этапы построения модели

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

1. Выбор теоретических предпосылок
2. Формализация предпосылок
3. Построение математической модели
4. Анализ построенной модели



Производственная функция Кобба-Дугласа

Многие экономические процессы не являются линейными по сути. Их моделирование линейными уравнениями не даст положительного результата.

Пример. Производственная функция Кобба – Дугласа

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Y – объем выпуска; K, L – затраты капитала и труда; α, β – параметры модели.

Классы нелинейных регрессий

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Различают *два класса* нелинейных регрессий:

1. Регрессии, нелинейные относительно переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.
2. Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Регрессии, нелинейные относительно объясняющих переменных, всегда сводятся к линейным моделям.

Классы нелинейных регрессий

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Линейная модель

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

Модель, нелинейная по переменным

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1^2 + \beta_2 \sqrt{X_2} + \beta_3 \log X_3 + \varepsilon$$

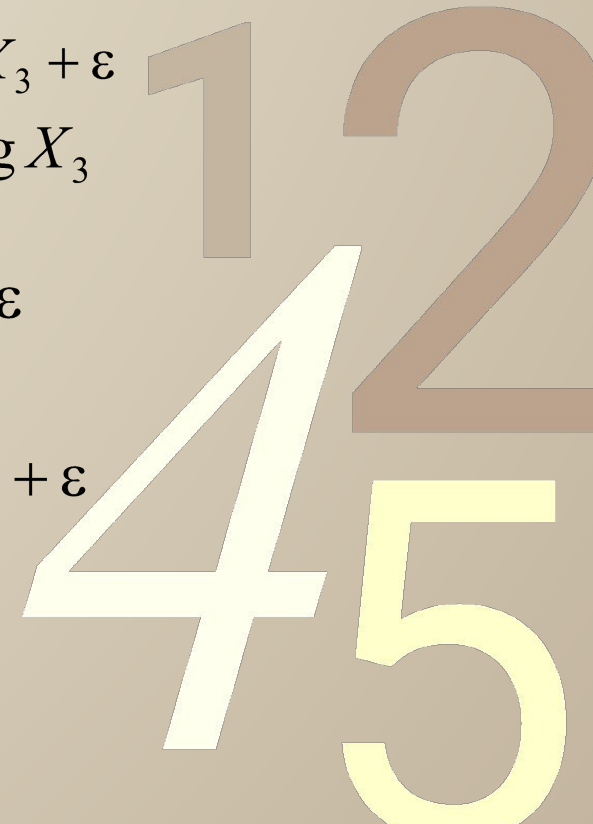
$$Z_1 = X_1^2, \quad Z_2 = \sqrt{X_2}, \quad Z_3 = \log X_3$$

После подстановки модель стала линейной

$$Y = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + \varepsilon$$

Модель, нелинейная по параметрам

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 \beta_4 X_3 + \varepsilon$$



Линейная модель

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

$$E[Y | X] = \alpha + \beta X$$

1 2
4 5

Линейная модель

$$E[Y | X] = \alpha + \beta X$$

$$\beta = \frac{\partial E[Y | X]}{\partial X} = \frac{\Delta E[Y | X]}{\Delta X}$$

$$\Delta X = 1 \quad \beta = \Delta Y$$

$$\alpha = E[Y | X = 0]$$

Если переменная X увеличится на 1, то Y изменится в среднем на β единиц измерения при прочих равных условиях

Моделирование эластичности

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Независимо от вида математической связи между Y и X *эластичность* равна:

$$L = \frac{dY / Y}{dX / X} = \frac{dY / dX}{Y / X} \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

Эластичность y по x рассчитывается как относительное изменение y на единицу относительного изменения x .

Пример расчета эластичности

Рассмотрим кривую Энгеля:

$$Y = \alpha X^{\beta}$$

где Y – спрос на товар, X – доход. Имеем:

$$\text{Эластичность} = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\alpha \beta X^{\beta-1}}{\alpha X^{\beta-1}} = \beta,$$

Например для модели $Y = 0,01X^{0,3}$ эластичность спроса по доходу равна 0,3. Иными словами, изменение дохода (X) на 1% вызывает изменение спроса (Y) на 0,3%

Эластичность – переменная величина

Эластичность не всегда бывает постоянной
для различных значений X и Y

Например, для линейной модели

$$L = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\beta}{Y / X} = \beta \frac{X}{Y}$$

Средний коэффициент эластичности

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Средний коэффициент эластичности $\bar{L}$ показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат Y от своей средней величины при изменении фактора X на 1% от своего среднего значения

$$\bar{L} = f'(\bar{X}) \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

1245

Логарифмическая форма

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$Y_i = \alpha' X_i^\beta \varepsilon'_i$$

Прологарифмировав обе части уравнения,
получим

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Логарифмическая форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии β – эластичность зависимой переменной по объясняющей переменной

$$\frac{dY}{Y} = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY / Y}{dX / X}$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает, на сколько процентов меняется в среднем Y при возрастании X на 1%. ППРУ

Логарифмическую форму следует использовать там, где есть основание предполагать постоянство эластичности

Логарифмическая форма

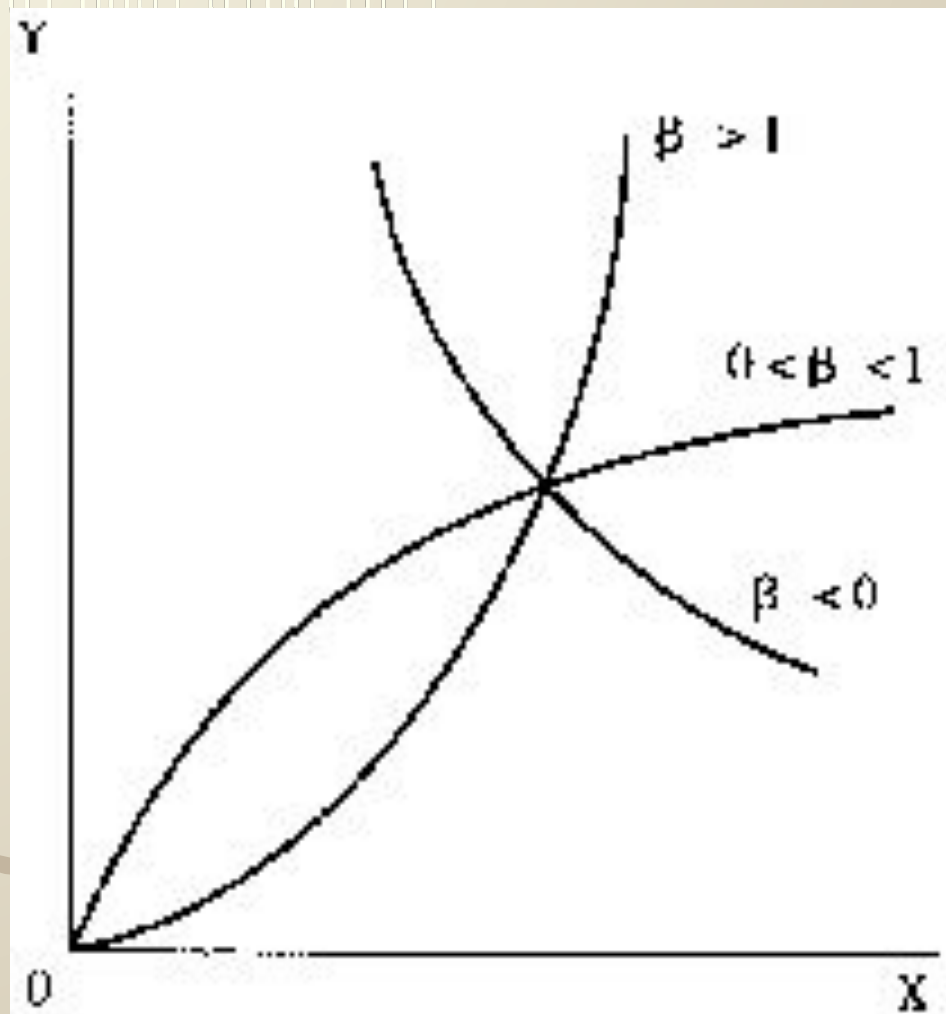
$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Вычисление наклона (скорости роста)

$$\frac{dY}{dX} = \beta \frac{Y}{X}$$

Наклон постоянно меняется с изменением
номера наблюдения

Графики логарифмической формы зависимости



Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии β :

$$\frac{dY}{Y} = \beta dX \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY}{Y dX} \quad \xRightarrow{dX=1} \quad \beta \cdot 100\% = \frac{dY}{Y} \cdot 100\%$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает на сколько процентов возрастает Y при возрастании X на одну единицу

При интерпретации коэффициент следует умножать на 100

Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Эластичность растет с ростом Y :

$$\beta = \frac{dY}{YdX} \Rightarrow L = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{YX}{Y} = \beta X$$

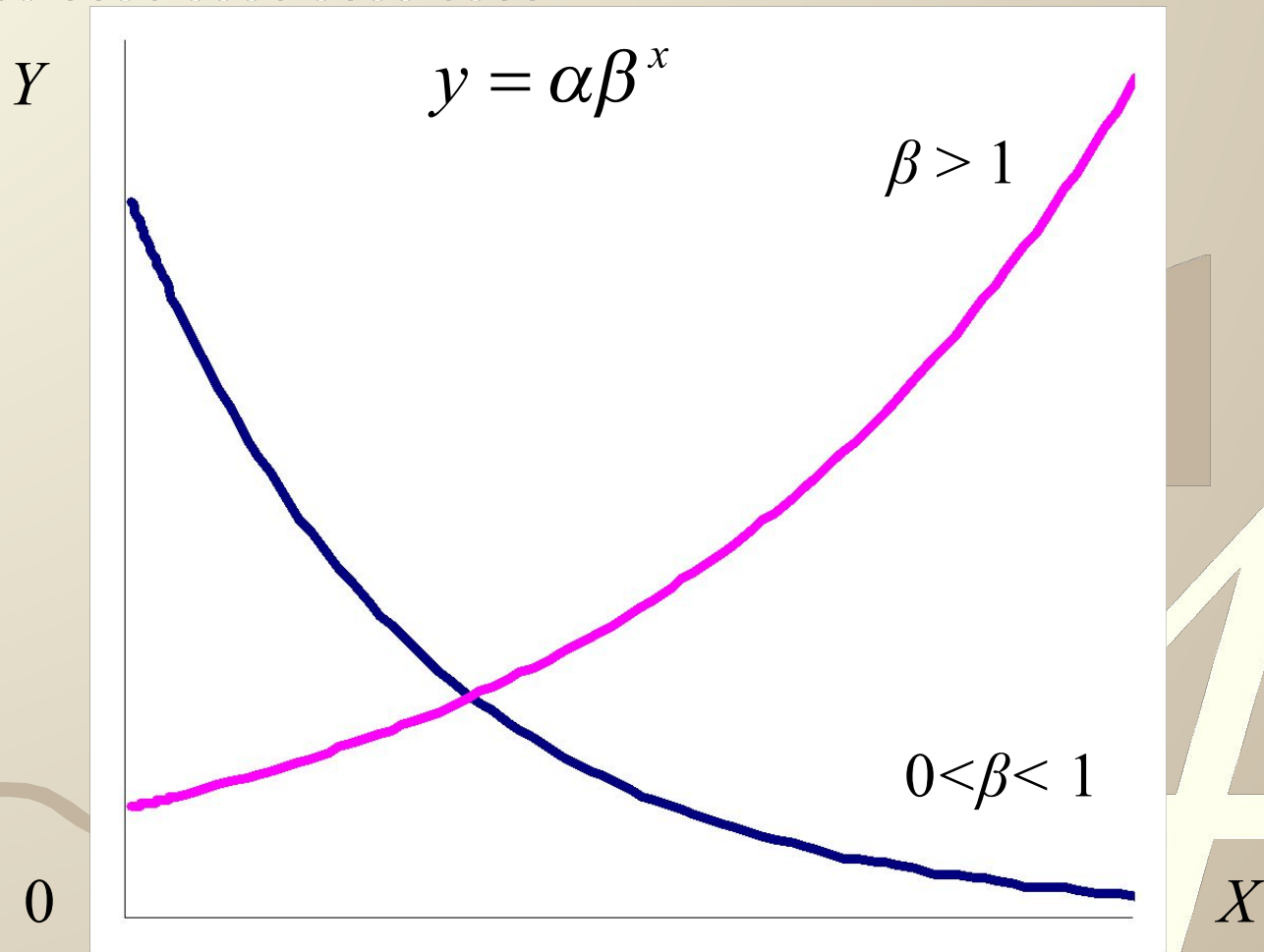
Это указывает на класс зависимостей, где следует применять линейно-логарифмическую форму регрессии

Моделирование эффектов насыщения на уровне скорости роста: «возрастание с возрастающей скоростью»

Примеры: кривые Энгеля для товаров роскоши, моделирование оплаты труда (процентная надбавка за стаж и опыт)

Графики логарифмически-линейной формы зависимости

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011



Логарифмически-линейная форма от времени

$$\ln Y_i = \alpha + \beta t_i + \varepsilon_i$$

Вид уравнения: $Y_i = e^{\alpha} e^{\beta t_i} e^{\varepsilon_i}$

Интерпретация: $\frac{dY}{Y} = \beta t$

Коэффициент при переменной времени выражает темп прироста. Он показывает на сколько процентов (если умножить его на 100) возрастает Y ежегодно

Эту функциональную форму удобно использовать для моделирования процессов экономического роста

Преобразование случайного отклонения

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

МНК применяется к преобразованным (линеаризованным) уравнениям. Поэтому необходимо особое внимание уделять рассмотрению свойств случайных отклонений – выполнимости предпосылок теоремы Гаусса-Маркова.

Пример.

$$Y = \alpha X^{\beta} + \varepsilon \xrightarrow{\ln(\cdot)} \ln Y = \ln(\alpha X^{\beta} + \varepsilon)$$

Логарифмирование нелинейной модели с аддитивным случайным членом не приводит к линеаризации соотношения относительно параметров.

Сравнение различных моделей

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

1. Содержательный анализ

2. Формальный анализ:

- *Метод Зарембки*
- *Преобразование Бокса-Кокса*



Метод Зарембки

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Применим для выбора из двух форм (несравнимых непосредственно), в одной из которых зависимая переменная входит с логарифмом, а в другой – нет

Метод позволяет сравнить линейную и логарифмическую регрессии и оценить значимость наблюдаемых различий

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Зарембки

1. Вычисляем среднее геометрическое значений зависимой переменной и все ее значения делим на это среднее:

$$Y_i^* = Y_i / \sqrt[n]{Y_1 Y_2 \boxtimes Y_n} = Y_i / e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln Y_i}$$

2. Рассчитываются линейная и логарифмическая регрессии, и сравниваются значения их сумм квадратов остатков (ESS)

$$Y_i^* = \alpha_1 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (RSS_1) \quad \ln Y_i^* = \alpha_2 + \beta_2 \ln X_i + \varepsilon'_i \quad (RSS_2)$$

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Зарембки

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

3. Вычисляем χ^2 -статистику для оценки значимости различий

$$\chi^2 = \left(\frac{N}{2} \right) \cdot \left| \ln \frac{RSS_1}{RSS_2} \right|$$

4. Сравниваем с критическим значением χ^2 -распределения $\chi_{\alpha;k}^2$. Различия значимы на уровне значимости α , если

$$\chi^2 > \chi_{\alpha;k}^2$$

Метод Бокса-Кокса

Идея метода. Переменная $\frac{Y^\lambda - 1}{\lambda}$:

при $\lambda=1$ превращается в линейную функцию $\frac{Y - 1}{1}$

при $\lambda \rightarrow 0$ переходит в логарифм $\frac{Y^\lambda - 1}{\lambda} \rightarrow \ln Y$

Плавно изменяя λ , можно постепенно перейти от линейной регрессии к логарифмической, все время сравнивая качество

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Бокса-Кокса

1. Преобразуют зависимую переменную по методу Зарембки:

$$Y_i^* = Y_i / \sqrt[n]{Y_1 Y_2 \otimes Y_n} = Y_i / e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln Y_i}$$

2. Рассчитывают новые переменные (преобразование Бокса-Кокса) при значениях λ от 1 до 0:

$$Y_i^{(B-C)} = \frac{Y_i^{*\lambda} - 1}{\lambda}$$

$$X_i^{(B-C)} = \frac{X_i^\lambda - 1}{\lambda}$$

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Бокса-Кокса

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

3. Рассчитывают уравнения регрессии для новых переменных при значениях λ от 1 до 0:

$$Y_i^{(B-C)} = \alpha + \beta X_i^{(B-C)} + \varepsilon_i$$

4. Определяют минимальное значение суммы квадратов остатков (SSR).

5. Выбирают одну из крайних регрессий, к которой ближе точка минимума.

Вопросы для самопроверки

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Какие вы знаете виды нелинейных моделей.
- Какие вы знаете нелинейные методы оценивания.
- Как определять эластичность.
- Что такое предельные эффекты переменных.
- Основные способы линеаризации моделей.
- Какие вы знаете типы производственных функций.
- Как выбрать между линейной и логарифмической моделями.
- Экономический смысл коэффициентов линейной модели.
- Экономический смысл коэффициентов логарифмической модели
- Экономический смысл коэффициентов полулогарифмической модели.

