

# ЛЕСНАЯ БИОМЕТРИЯ

**Сидельник Николай Ярославович**

старший преподаватель  
кафедры лесоустройства

*тел. 8-029-755-48-76*

# ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

- Лекции – 2+6=8 часов
- Лабораторные занятия – 4 часа
- Практические занятия – 8 часов
- Экзамен – 5 семестр  
(3 курс, зимняя сессия)

# ЛИТЕРАТУРА

А.А. Атрошчанка, У.П. Машкоўскі,  
С.І. Мінкевіч

## **Лясная біяметрыя**

Праграма, метадычныя ўказанні і кантрольныя заданні для студэнтаў спецыяльнасці 1-75 01 01 «Лясная гаспадарка» завочнай формы навучання, Мінск БДТУ, 2008 - 58 стар.

# ЛИТЕРАТУРА

Атрощенко О.А., Машковский В.П.

## **ЛЕСНАЯ БИОМЕТРИЯ**

учебное пособие для студентов  
высших учебных заведений по  
специальности «Лесное хозяйство»,  
Минск: БГТУ, 2010. - 327 с.

# КАК СДАТЬ ЭКЗАМЕН?

- Посетить и выполнить все задания на практических и лабораторных занятиях.
- Выполнить контрольную работу.
- На экзамене знать:
  - на оценку 4 - ответы на вопросы:
    - а) или по лекциям (20 вопросов),
    - б) или по контрольной работе.
  - на оценку выше 4 – задача + ответ по экзаменационному билету

# БЫБОР ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант состоит из **4 цифр**, которые берутся:

**1 и 3 буква фамилии**

**2 и 4 буква имени**

Например,

**СИДЕЛЬНИК НИКОЛАЙ**

Из данной фамилии **1, 3** буква это **С, Д** соответственно

Из имени **2, 4** буква это **И, О** соответственно

Выбор варианта в зависимости от полученных цифр, осуществляется по таблице 1.1 (метод указания), согласно которой, буквы **С-Д-И-О** соответствуют варианту **17-15-9-7**.

Буква, знак	А	Ж	Н	У, Ё	Б	З, Ы	О, Ф	В, Ь	І, Й	П, Ю
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Буква, знак	Х, Т	Г	К	Р, Ц	Д, Э	Л	С, Ч	Е, Ё	М, ’	Ш, Я
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

В методических указаниях представлен вариант 18-13-14-9.

## Данные для всех вариантов берутся из приложения 1 методических указаний (дадатак 1, стар. 49)

Выборочная статистическая совокупность соотношения диаметров и высот деревьев. Вариант 18-13-14-9

Номера вариантов															
18				13				14				9			
D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H
28,1	25,6	29,5	24,5	46,6	26,4	29,6	27,1	47,0	27,7	28,5	25,2	36,0	26,6	25,0	23,6
36,0	28,0	22,2	21,9	21,6	20,1	29,7	24,6	35,3	22,5	30,3	25,2	44,0	30,3	34,5	24,6
26,4	22,6	33,6	27,3	34,0	27,0	26,6	25,5	36,3	24,6	33,3	25,2	36,4	24,4	28,0	25,6
56,6	26,6	31,5	27,0	30,6	23,1	25,5	23,7	22,0	22,4	36,5	26,6	24,3	23,3	24,2	21,5
38,6	28,0	39,5	26,6	44,0	27,3	23,1	21,6	48,5	26,1	37,6	26,6	32,2	24,7	20,3	22,7
36,6	26,0	25,0	23,6	38,1	24,5	29,5	23,5	35,3	26,2	26,5	23,3	39,5	26,1	27,5	22,6
30,1	24,6	40,6	25,3	40,5	27,1	22,6	22,2	38,0	25,5	17,5	18,6	50,5	28,1	36,0	28,1
35,2	22,6	36,0	25,6	26,1	22,6	42,0	26,6	22,2	24,0	46,4	24,6	40,6	25,4	43,0	28,0
33,3	26,6	22,6	18,6	24,2	22,1	30,6	25,6	23,3	29,0	29,0	26,5	25,6	25,0	37,1	25,6
30,3	28,3	43,4	27,5	31,6	27,3	41,6	25,6	38,5	26,2	38,5	25,5	27,0	22,0	36,6	26,1
19,4	19,3	26,5	24,0	46,6	24,6	23,0	19,0	28,3	24,5	26,2	25,6	22,0	21,5	32,0	24,6
42,6	26,6	30,6	26,0	24,5	24,6	44,0	28,3	24,0	23,6	15,6	19,1	29,5	27,6	37,0	25,2
28,1	24,7	25,6	22,4	39,0	27,6	21,5	22,2	20,0	22,6	37,5	28,6	28,4	27,0	27,6	29,6
31,7	25,8	28,7	21,3	28,0	22,2	36,5	27,6	25,5	23,5	40,1	27,3	35,0	24,5	33,5	25,6
37,8	26,0	32,6	24,8	36,0	27,0	26,0	21,6	22,0	22,2	19,0	18,0	42,0	25,0	31,0	25,1
26,3	22,7	35,1	24,4	33,3	25,0	28,0	23,5	30,5	23,3	15,5	19,0	36,6	27,1	24,6	23,6
26,6	23,0	31,0	24,5	24,6	23,6	28,4	22,7	29,6	22,5	26,0	22,5	34,1	25,7	24,0	21,6
27,3	23,0	26,0	22,6	39,6	26,6	36,5	26,0	47,4	27,5	30,6	23,6	27,1	23,1	23,1	22,1
22,5	22,7	34,6	25,8	33,6	26,3	40,5	25,5	17,5	19,6	29,6	25,2	23,6	22,5	25,1	24,5
38,0	27,5	31,4	24,8	29,5	24,6	40,6	26,5	33,0	26,0	33,3	26,0	44,1	28,0	53,4	27,6
20,5	21,6	28,0	25,6	32,0	24,3	17,5	19,6	26,0	25,5	28,0	25,0	39,7	23,9	45,0	26,5
42,2	25,0	38,1	27,7	39,3	26,3	29,6	21,5	27,0	23,6	32,5	19,4	21,5	20,0	21,5	21,0
39,6	24,4	27,6	25,5	41,0	27,6	36,5	26,0	25,0	23,6	40,0	26,6	29,0	23,6	36,6	25,6
26,6	25,6	29,9	27,0	37,6	27,6	35,1	24,6	28,0	22,6	30,3	25,7	32,1	24,6	28,5	25,4
30,2	28,3	33,3	28,4	36,0	24,4	23,1	22,0	37,3	26,2	22,9	17,8	29,6	24,6	31,1	24,4

# Порядок составления статистических рядов

- 1. Найти среди данных обмера (полученного варианта задания, например, 18-13-14-9) минимальное и максимальное значения ( $V_{\min}$  и  $V_{\max}$ ) для диаметров и высот соответственно.

Например, в нашем примере:

а) для диаметров  $V_{\max} = 53,0$  см;  $V_{\min} = 17,4$  см;

б) для высот  $V_{\max} = 29,6$  м;  $V_{\min} = 18,0$  м.

- 2. Принять количество интервалов  $n$  равным  $12 \pm 2$ , т.к. число наблюдений равно 200. Мы принимаем, например,  $n = 12$ .
- 3. Определяем размер интервала  $d$  составляемого статистического ряда по формуле:

$$d = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{n}$$

и округляем ее **до четной цифры после запятой**. В нашем примере

- а) для диаметров

$$d = \frac{53,0 - 17,0}{12} = 3,0 \text{ см};$$

- б) для высот

$$d = \frac{29,6 - 18,3}{12} = 0,9 \approx 1,0 \text{ м}$$

!!!! Помнить про округление до четной цифры.

- 4. Согласно варианта задания, найти среднearифметическую величину  $M$  для диаметров и высот соответственно. В нашем примере - для диаметров  $M = 31,5$  см; для высот  $M = 24,5$  м.
- 5. Определить границы центрального интервала ( $V_{i \max}$  и  $V_{i \min}$ ):

$$M + \quad = V_{i \max}; \quad M - \quad = V_{i \min};$$



- В нашем примере: для диаметров:  $31,5 + 3,0/2 = 33$  см;  $31,5 - 3,0/2 = 30$  см, границы центрального интервала будут 30–33 см;

для высот:  $24,5 + 1,0/2 = 25$  м;  $24,5 - 1,0/2 = 24$  м, т.е. границы - 24–25 м.

- 6. Определить границы оставшихся интервалов и выполнить разnosку частот (количеств)

- - от значения нижней границы центрального интервала (у нас для диаметров 30 см) **ОТНИМАЕМ** величину интервала  $d$ , т.е. 3,0 см.

*В результате получаем границы: 30,0–27,0–24,0–21,0–18,0–15,0.*

*Больше отнимать не нужно, т.к. у нас минимальное значение диаметра 17,0 см, и это минимальное значение попадет в интервал 15,0–18,0 см. Более тонких деревьев в нашем варианте нет.*

- - к значению верхней границы центрального интервала (у нас для диаметров 33,0 см) **прибавляем** величину интервала ( $d = 3,0$  см).



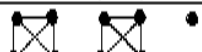










*В результате: 33,0–36,0–39,0–42,0–45,0–48,0–51,0–54,0. Больше прибавлять не нужно, т.к. максимальное значение диаметра 53,0 см попадет в интервал 51,0–54,0. А деревьев с большим диаметром у нас нет.*

То же самое выполняем и для ряда высот (значение величины интервала в нашем примере  $d = 1$  м).

- 7. Выполняем разnosку частот по полученным интервалам по системе конверта для рядов диаметров и высот соответственно. Данные сводим в таблицу.

D	H	D	H
28,1	25,6	29,5	24,5
36,0	28,0	22,2	21,9
26,4	22,6	33,6	27,3
56,6	26,6	31,5	27,0
38,6	28,0	39,5	26,6
36,6	26,0	25,0	23,6
30,1	24,6	40,6	25,3
35,2	22,6	36,0	25,6
33,3	26,6	22,6	18,6
30,3	28,3	43,4	27,5
19,4	19,3	26,5	24,0
42,6	26,6	30,6	26,0
28,1	24,7	25,6	22,4
31,7	25,8	28,7	21,3
37,8	26,0	32,6	24,8
26,3	22,7	35,1	24,4
26,6	23,0	31,0	24,5
27,3	23,0	26,0	22,6
22,5	22,7	34,6	25,8
38,0	27,5	31,4	24,8
20,5	21,6	28,0	25,6
42,2	25,0	38,1	27,7
39,6	24,4	27,6	25,5
26,6	25,6	29,9	27,0
30,2	28,3	33,3	28,4

### Размеркаванне колькасці ствалоў дрэў па інтэрвалах дыяметраў

Межы інтэрвалаў	Сярэднія значэнні інтэрвалаў	Разноска колькасці ствалоў па інтэрвалах	Колькасці ствалоў па інтэрвалах
15,0–17,9	16,5		3
18,0–20,9	19,5		9
21,0–23,9	22,5		21
24,0–26,9	25,5		22
27,0–29,9	28,5		38
30,0–32,9	31,5		34
33,0–35,9	34,5		18
36,0–38,9	37,5		22
39,0–41,9	40,5		13
42,0–44,9	43,5		8
45,0–47,9	46,5		7
48,0–50,9	49,5		1
51,0–53,9	52,5		4
Усяго	–	–	200

Номера вариантов															
18				13				14				9			
D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H	D	H
28,1	25,6	29,5	24,5	46,6	26,4	29,6	27,1	47,0	27,7	28,5	25,2	36,0	26,6	25,0	23,6
36,0	28,0	22,2	21,9	21,6	20,1	29,7	24,6	35,3	22,5	30,3	25,2	44,0	30,3	34,5	24,6
26,4	22,6	33,6	27,3	34,0	27,0	26,6	25,5	36,3	24,6	33,3	25,2	36,4	24,4	28,0	25,6
56,6	26,6	31,5	27,0	30,6	23,1	25,5	23,7	22,0	22,4	36,5	26,6	24,3	23,3	24,2	21,5
38,6	28,0	39,5	26,6	44,0	27,3	23,1	21,6	48,5	26,1	37,6	26,6	32,2	24,7	20,3	22,7
36,6	26,0	25,0	23,6	38,1	24,5	29,5	23,5	35,3	26,2	26,5	23,3	39,5	26,1	27,5	22,6
30,1	24,6	40,6	25,3	40,5	27,1	22,6	22,2	38,0	25,5	17,5	18,6	50,5	28,1	36,0	28,1
35,2	22,6	36,0	25,6	26,1	22,6	42,0	26,6	22,2	24,0	46,4	24,6	40,6	25,4	43,0	28,0

### Распределение частот (количеств) стволов деревьев по интервалам диаметров и высот

D \ H	15,0-17,	18,0-20,	21,0-23,	24,0-26	27,0-29,	30,0-32,	33,0-35,	36,0-38	39,0-41,	42,0-44	45,0-47,	48,0-50	51,0-53,	Разам
	9	9	9	,9	9	9	9	,9	9	,9	9	,9	9	
29,0-29,9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	2
28,0-28,9	-	-	-	-	-	-	-	-	1	2	4	1	-	8
27,0-27,9	-	-	-	-	-	-	4	4	6	3	1	-	2	20
26,0-26,9	-	-	-	-	1	3	7	5	5	-	1	-	1	23
25,0-25,9	-	-	-	1	4	13	3	4	1	3	-	-	-	29
24,0-24,9	-	-	1	3	10	10	4	7	-	-	-	-	-	35
23,0-23,9	-	-	6	11	12	8	-	2	-	-	-	-	-	39
22,0-22,9	-	3	7	4	8	-	-	-	-	-	-	-	-	22
21,0-21,9	-	4	4	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	12
20,0-20,9	-	-	3	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	5
19,0-19,9	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
18,0-18,9	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
Усяго	3	9	21	22	38	34	18	22	13	8	7	1	4	200

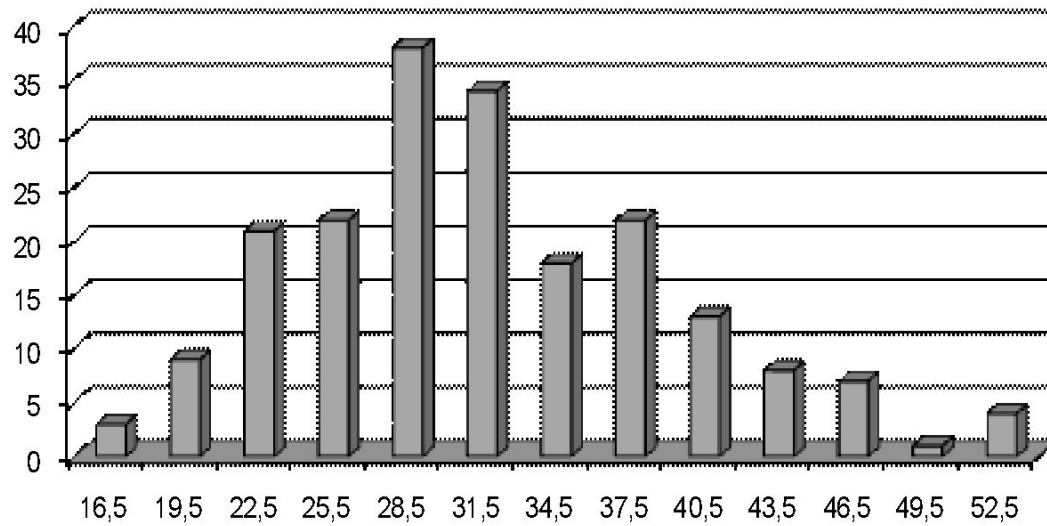
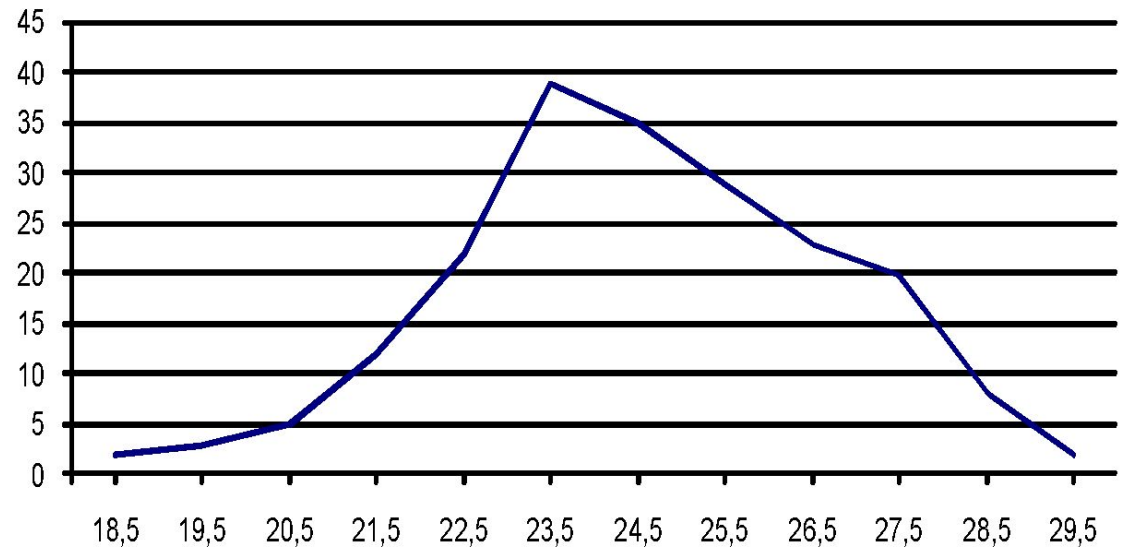


Рис. 1.1. Гистограмма распределения частот статистического ряда диаметров

Рис. 1.2. Полигон распределения частот статистического ряда высот



## 2. ОЦЕНКА МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ

$V_i$	$n_i$	$K_i$	$n_i K_i$	$n_i K_i^2$	$n_i K_i^3$	$n_i K_i^4$	Кантроль	
							$K_i + 1$	$n_i (K_i + 1)^4$
16,5	3	-6	-18	108	-648	3 888	-5	1 875
19,5	9	-5	-45	225	-1 125	5 625	-4	2 304
22,5	21	-4	-84	336	-1 344	5 376	-3	1 701
25,5	22	-3	-66	198	-594	1 782	-2	352
28,5	38	-2	-76	152	-304	608	-1	38
31,5	34	-1	-34	34	-34	34	0	0
34,5	18	0	0	0	0	0	1	18
37,5	22	1	22	22	22	22	2	352
40,5	13	2	26	52	104	208	3	1 053
43,5	8	3	24	72	216	648	4	2 048
46,5	7	4	28	112	448	1 792	5	4 375
49,5	1	5	5	25	125	625	6	1 296
52,5	4	6	24	144	864	5 184	7	9 604
Усяго	200	-	-194	1 480	-2 270	25 792	-	25 016

$$m_0 = 1;$$

$$m_1 = \frac{\sum n_i K_i}{N} = \frac{-194}{200} = -0,970; \quad m_2 = \frac{\sum n_i K_i^2}{N} = \frac{1480}{200} = 7,400;$$

$$m_3 = \frac{\sum n_i K_i^3}{N} = \frac{-2270}{200} = -11,350; \quad m_4 = \frac{\sum n_i K_i^4}{N} = \frac{25\,792}{200} = 128,960.$$

$$m_4^* = \frac{\sum n_i (K_i + 1)^4}{N} = \frac{25\,016}{200} = 125,080.$$

$$m_4^{**} = m_0 + 4m_1 + 6m_2 + 4m_3 + m_4.$$

$$m_4^{**} = 1 + 4(-0,970) + 6 \cdot 7,400 + 4(-11,350) + 128,960 = 125,080.$$

## Схема оценки смешенного начального момента $m_{1/1}$ методом

D K <sub>x</sub> H K <sub>y</sub>	произведений													Разам
	15,0-1	18,0-2	21,0-3	24,0-4	27,0-2	30,0-3	33,0-3	36,0-4	39,0-4	42,0-4	45,0-4	48,0-5	51,0-5	
	7,9	0,9	23,9	26,9	9,9	32,9	5,9	38,9	41,9	44,9	7,9	0,9	3,9	
	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	
29,0-29,9 +5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+20	-	+30	2
28,0-28,9 +4	-	-	-	-	-	-	-	-	+8	+12	+16	+20	-	8
27,0-27,9 +3	-	-	-	-	-	-	4	+3	+6	+9	+12	-	+18	20
26,0-26,9 +2	-	-	-	-	-4	-2	7	+2	+4	-	+8	-	+12	23
25,0-25,9 +1	-	-	-	-3	-2	-1	3	+1	+2	+3	-	-	-	29
24,0-24,9 0	-	-	1	3	10	10	4	7	-	-	-	-	-	35
23,0-23,9 -1	-	-	+4	+3	+2	+1	-	-1	-	-	-	-	-	39
22,0-22,9 -2	-	+10	+8	+6	+4	-	-	-	-	-	-	-	-	22
21,0-21,9 -3	-	+15	+12	+9	+6	-	-	-	-	-	-	-	-	12
20,0-20,9 -4	-	-	+16	+12	+8	-	-	-	-	-	-	-	-	5
19,0-19,9 -5	+30	+25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
18,0-18,9 -6	+36	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
Усяго	3	9	21	22	38	34	18	22	13	8	7	1	4	200
$\sum_{K_x} K_x K_y$	102	140	176	84	64	-11	0	24	66	60	104	20	78	907
$(\sum_{K_x} n_{xy} K_x)^2$	289	784	1936	784	1024	121	841	576	1089	400	676	16	169	-
$\sum_{K_x} n_x^2$	96,3	87,1	92,2	35,6	26,9	3,6	46,7	26,2	83,8	50,0	96,6	16,0	42,3	656,5

$$m_{1/1} = \frac{\sum n_{xy} K_x K_y}{N} = \frac{907}{200} = 4,535;$$

$$\mu_{1/1} = m_{1/1} - m_{1x} m_{1y} = 4,535 + 0,975 \cdot 0,055 = 4,588;$$

$$r_{1/1} = \frac{\mu_{1/1}}{\sigma_{1x} \sigma_{1y}} = \frac{4,588}{2,541 \cdot 2,168} = 0,833;$$

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЯДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ОСНОВНЫХ ОШИБОК

$V_i$	$n_i$	$V_i n_i$	$\alpha_i = V_i - M$	$\alpha_i^2$	$n_i \alpha_i^2$	$n_i \alpha_i^3$	$n_i \alpha_i^4$
16,5	3	49,5	-15,09	227,7	683	-10 308	155 553
19,5	9	175,5	-12,09	146,2	1 316	-15 905	192 286
22,5	21	472,5	-9,09	82,6	1 735	-15 773	143 375
25,5	22	561,0	-6,09	37,1	816	-4 969	30 262
28,5	38	1 083,0	-3,09	9,5	363	-1 121	3 464
31,5	34	1 071,0	-0,09	0,0	0	0	0
34,5	18	621,0	2,91	8,5	152	444	1 291
37,5	22	825,0	5,91	34,9	768	4 541	26 839
40,5	13	526,5	8,91	79,4	1 032	9 196	81 932
43,5	8	348,0	11,91	141,8	1 135	13 515	160 967
46,5	7	325,5	14,91	222,3	1 556	23 202	345 946
49,5	1	49,5	17,91	320,8	321	5 745	102 892
52,5	4	210,0	20,91	437,2	1 749	36 570	764 674
Усяго	200	6 318,0	37,83	1 748,0	11 626	45 137	2 009 482

Сярэднеарыфметычная велічыня:  $M = \frac{\sum V_i n_i}{N} = \frac{6318}{200} = 31,59 = 31,6 \text{ см};$

Найменшае сярэднеквадратычнае адхіленне  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i \alpha_i^2}{N-1}} = \frac{11626}{199} = 7,64 \text{ см};$

Паказчык дакладнасці (асноўная памылка) ацэнкі сярэднеарыфметычнай велічыні:  $m_M = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{7,64}{\sqrt{200}} = \pm 0,54 \text{ см};$

Каэфіцыент варыяцыі:  $V = \frac{100\sigma}{M} = \frac{100 \cdot 7,64}{31,6} = 24,2\%;$

Працэнт дакладнасці сярэднеарыфметычнай велічыні:  
 $P = \frac{100m_M}{M} = \frac{100 \cdot 0,54}{31,6} = 1,71\%;$

Каэфіцыент асіметрыі:  $A_s = \frac{\sum n_i \alpha_i^3}{N\sigma^3} = \frac{45137}{200 \cdot 7,64^2} = 0,505;$

Каэфіцыент эксцэсу:  $E = \frac{\sum n_i \alpha_i^4}{N\sigma^4} - 3 = \frac{2009482}{200 \cdot 7,64^4} - 3 = -0,056;$

Асноўная памылка ацэнкі сярэднеквадратычнага адхілення:

$m_\sigma = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{7,64}{\sqrt{400}} = \pm 0,38 \text{ см};$

Асноўная памылка ацэнкі каэфіцыента варыяцыі:  $m_V = \pm \frac{V}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{24,2}{\sqrt{400}} = \pm 1,21\%;$

Асноўная памылка ацэнкі каэфіцыента асіметрыі:

$m_{A_s} = \pm \sqrt{\frac{6}{N}} = \pm \sqrt{\frac{6}{200}} = \pm 0,173;$

Асноўная памылка ацэнкі каэфіцыента эксцэсу:  $m_E = \pm 2$

$\sqrt{\frac{6}{N}} = \pm 2 \sqrt{\frac{6}{200}} = \pm 0,346;$

Асноўная памылка працэнта дакладнасці сярэднеарыфметычнай велічыні:

$m_P = \pm \frac{P}{\sqrt{2N}} = \pm \frac{1,71}{\sqrt{400}} = \pm 0,086\%;$



# 4. МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

$V_i$	$n_i$	$t_i$	$\Phi(t_i)$	$P_i$	$n'_i$	$\Delta = n_i - n'_i$
15,0–17,9	3	-1,79	0,037	0,037	7,4	-4,4
18,0–20,9	9	-1,40	0,081	0,044	8,8	0,2
21,0–23,9	21	-1,01	0,156	0,075	15,0	6,0
24,0–26,9	22	-0,62	0,268	0,112	22,4	-0,4
27,0–29,9	38	-0,22	0,413	0,145	29,0	9,0
30,0–32,9	34	0,17	0,567	0,154	30,8	3,2
33,0–35,9	18	0,56	0,712	0,145	29,0	-11,0
36,0–38,9	22	0,96	0,831	0,119	23,8	-1,8
39,0–41,9	13	1,35	0,911	0,080	16,0	-3,0
42,0–44,9	8	1,74	0,959	0,048	9,6	-1,6
45,0–47,9	7	2,13	0,983	0,024	4,8	2,2
48,0–50,9	1	2,53	0,994	0,011	2,2	-1,2
51,0–	4	$+\infty$	1,000	0,006	1,2	2,8
Всего	200	-	-	1,000	200,0	-

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}};$$

$$t_i = \frac{x_i - M}{\sigma},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$t_i$	$\Phi(t_i)$
-1,79	0,037
-1,40	0,081
-1,01	0,156
-0,62	0,268
-0,22	0,413
0,17	0,567
0,56	0,712
0,96	0,831
1,35	0,911
1,74	0,959
2,13	0,983
2,53	0,994
$+\infty$	1,000

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

$$n'_i = P_i N$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,506	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,728	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,866	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,961	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999
3,0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000
3,3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3,4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

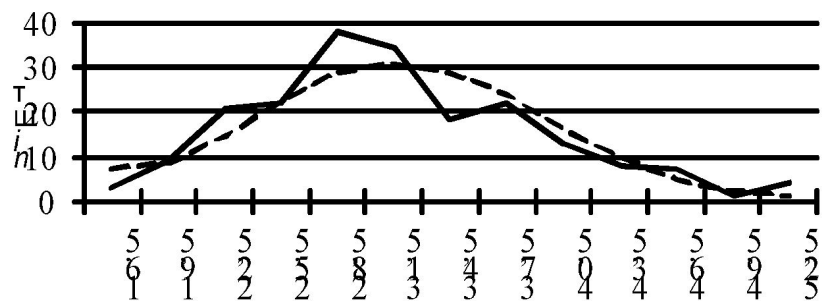


Рис. 4.1. Сопоставление теоретических частот кривой нормального распределения ряда диаметров с опытными данными

— Опытные данные (частоты)  
 --- Теоретические данные (частоты)

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТЕРИЯ СОГЛАСИЯ

$V_i$	$n_i$	$n'_i = NP$	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2 / n'_i$
16,5	3	7,4	-4,4	19,36	2,62
19,5	9	8,8	0,2	0,04	0,00
22,5	21	15,0	6,0	36,00	2,40
25,5	22	22,4	-0,4	0,16	0,01
28,5	38	29,0	9,0	81,00	2,79
31,5	34	30,8	3,2	10,24	0,33
34,5	18	29,0	-11,0	121,00	4,17
37,5	22	23,8	-1,8	3,24	0,14
40,5	13	16,0	-3,0	9,00	0,56
43,5	8	9,6	-1,6	2,56	0,27
46,5	7	4,8	2,2	14,44	3,01
49,5	1	2,2	3,8		
52,5	4	1,2	3,8		
-	200	200	0	-	16,30

# Критические значения квантилей $\chi^2_{\alpha;u}$ в зависимости от уровня значимости $\alpha$ и числа степеней свободы $u$

$\alpha = 0,05$  (в лесном хозяйстве сейчас чаще всего используется уровень значимости  $\alpha = 0,05$ )

$$u = m - r - 1 = 11 - 2 - 1 = 8.$$

Число  $m = 11$  – это количество интервалов вариационного ряда с учетом объединения интервалов  
 $r = 2$  – количество параметров распределения (для нормального распределения это 2 параметра:

$M$  – среднеарифметическая величина и  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение).

$u \backslash \alpha$	0,99	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	<b>0,05</b>	0,01	0,001
1	0,000157	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	<b>3,841</b>	6,635	10,827
2	0,0201	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	<b>5,991</b>	9,210	13,815
3	0,115	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	<b>7,815</b>	11,345	16,266
4	0,297	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	<b>9,488</b>	13,277	18,467
5	0,554	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	<b>11,070</b>	15,086	20,515
6	0,872	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	<b>12,592</b>	16,812	22,457
7	1,239	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,363	9,803	12,017	<b>14,067</b>	18,475	24,322
8	1,646	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	<b>15,507</b>	20,090	26,125
9	2,088	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	<b>16,919</b>	21,666	27,877
10	2,558	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	<b>18,307</b>	23,209	29,588
11	3,053	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	<b>19,675</b>	24,725	31,264
12	3,571	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,519	<b>21,026</b>	26,207	32,909
13	4,107	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	<b>22,362</b>	27,688	34,528
14	4,660	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	<b>23,685</b>	29,141	36,123
15	5,229	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	<b>24,996</b>	30,578	37,697
16	5,812	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	<b>26,296</b>	32,000	39,252
17	6,408	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	<b>27,587</b>	33,409	40,790
18	7,015	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	<b>28,869</b>	34,805	42,312
19	7,633	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	<b>30,144</b>	36,191	43,820
20	8,260	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	<b>31,410</b>	37,566	45,315
21	8,897	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,853	26,171	29,615	<b>32,671</b>	38,932	46,797
22	9,542	12,338	14,041	16,310	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	<b>33,924</b>	40,289	48,268
23	10,196	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	<b>35,172</b>	41,638	49,728

# 5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

$$r = \frac{\sum \alpha_x \alpha_y}{N \sigma_x \sigma_y}. \quad (5.1)$$

Пры дастатковым аб'ёме выбаркі ацэнка каэфіцыента карэляцыі выконваецца метадам момантаў:

$$r = \frac{\mu_{1/1}}{\sigma_{1x} \sigma_{1y}}, \quad (5.2)$$

дзе  $\mu_{1/1}$  – змяшаны цэнтральны момант першага парадку паміж  $x = D$  і  $y = H$  (гл. тэма 2, падраздзел 2.3);  $\sigma_{1x}$ ,  $\sigma_{1y}$  – ненайменныя сярэднеквадратычныя адхіленні (для радоў дыяметраў і вышынь) (гл. тэма 2, падраздзел 2.2).

Змяшаны цэнтральны момант першага парадку паміж  $x$  і  $y$  вылічваецца па формуле

$$\mu_{1/1} = m_{1/1} = m_{1x} m_{1y}, \quad (5.3)$$

Раней былі вылічаны значэнні (гл. тэма 2):

$$m_{1/1} = 4,535; m_{1x} = -0,970; m_{1y} = 0,055; \sigma_{1x} = 2,541; \sigma_{1y} = 2,168.$$

$$\text{Адсюль } \mu_{1/1} = m_{1/1} - m_{1x} m_{1y} = 4,535 + 0,975 \cdot 0,055 = 4,588.$$

Значыць, змяшаны асноўны момант першага парадку ( $r_{1/1}$ ), які ўяўляе сабою каэфіцыент карэляцыі ( $r$ ), склаў (гл. тэма 2, падраздзел 2.3):

$$r_{1/1} = \frac{M_{1/1}}{\sigma_{1x} \sigma_{1y}} = \frac{4,588}{2,541 \cdot 2,168} = 0,833.$$

Асноўная памылка каэфіцыента карэляцыі:

$$m_r = \pm \frac{1 - r^2}{\sqrt{N}} = \frac{1 - 0,833^2}{\sqrt{200}} = \frac{1 - 0,6932}{14,14} = \pm 0,022.$$

## Корреляционное отношение ( $\eta$ )

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{1}{M_{2y}} \left[ \frac{1}{N} \sum \frac{(\sum n_{xy} k_y)^2}{n_x} - m_{1y}^2 \right]. \quad (5.4)$$

У нашым выпадку гэтыя паказчыкі роўныя (гл. тэма 2):  $\mu_{2y} = 4,702$   
(для рада вышынь  $y$ );  $\sum \frac{(\sum n_{xy} k_y)^2}{n_x} = 656,5$ ; (гл. табл. 2.2);  $N = 200$ ;  
 $m_{1y} = 0,055$  (для рада вышынь), адсюль:

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{1}{4,702} \left( \frac{656,5}{200} - 0,055 \right) = 0,698.$$

Значыць, карэляцыйная адносіна складзе:

$$\eta_{y/x} = \sqrt{0,698} = 0,835.$$

Таму  $\eta_{y/x} = 0,835 > r = 0,833$ .

# 6. РЕГРЕССИОННЫЙ

## АНАЛИЗ

D \ H	15,0-17,9	18,0-20,9	21,0-23,9	24,0-26,9	27,0-29,9	30,0-32,9	33,0-35,9	36,0-38,9	39,0-41,9	42,0-44,9	45,0-47,9	48,0-50,9	51,0-52,9	V <sub>y</sub>	n <sub>y</sub>
29,0-29,9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	29,5	2
28,0-28,9	-	-	-	-	-	-	-	-	1	2	4	1	-	28,5	8
27,0-27,9	-	-	-	-	-	-	4	4	6	3	1	-	2	27,5	20
26,0-26,9	-	-	-	-	1	3	7	5	5	-	1	-	1	26,5	23
25,0-25,9	-	-	-	1	4	13	3	4	1	3	-	-	-	25,5	29
24,0-24,9	-	-	1	3	10	10	4	7	-	-	-	-	-	24,5	35
23,0-23,9	-	-	6	11	12	8	-	2	-	-	-	-	-	23,5	39
22,0-22,9	-	3	7	4	8	-	-	-	-	-	-	-	-	22,5	22
21,0-21,9	-	4	4	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	21,5	12
20,0-20,9	-	-	3	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	20,5	5
19,0-19,9	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	19,5	3
18,0-18,9	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	18,5	2
V <sub>x</sub>	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5	31,5	34,5	37,5	40,5	43,5	46,5	49,5	52,5	-	200
n <sub>x</sub>	3	9	21	22	38	34	18	22	13	8	7	1	4	200	-
H <sub>ум</sub>	18,8	21,4	22,4	23,2	23,7	24,8	26,1	24,9	27,0	27,0	28,2	28,5	27,8		

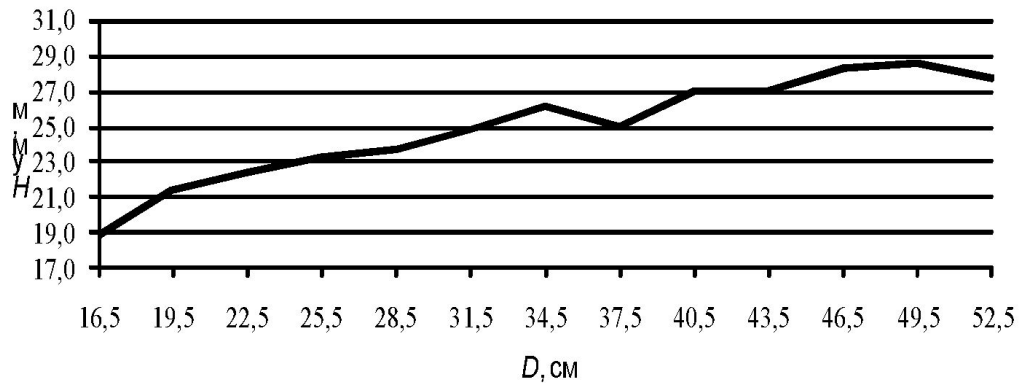


Рис. 6.1. График условных средних высот по интервалам диаметров

## 6.1. Оценка коэффициентов уравнения прямой

D = x	H <sub>ср</sub> = y	x <sup>2</sup>	xy	y'	Δ = y - y'	Δ <sup>2</sup>
16,5	18,8	272,25	310,75	20,7	-1,8	3,32
19,5	21,4	380,25	417,08	21,4	0,0	0,00
22,5	22,4	506,25	504,11	22,1	0,3	0,09
25,5	23,2	650,25	592,30	22,8	0,4	0,16
28,5	23,7	812,25	674,25	23,5	0,1	0,01
31,5	24,8	992,25	781,94	24,3	0,6	0,30
34,5	26,1	1 190,25	900,83	25,0	1,1	1,25
37,5	24,9	1 406,25	933,75	25,7	-0,8	0,67
40,5	27,0	1 640,25	1 095,06	26,4	0,6	0,36
43,5	27,0	1 892,25	1 174,50	27,2	-0,2	0,03
46,5	28,2	2 162,25	1 311,96	27,9	0,3	0,11
49,5	28,5	2 450,25	1 410,75	28,6	-0,1	0,01
52,5	27,8	2 756,25	1 456,88	29,3	-1,6	2,50
<b>Σ448,5</b>	<b>323,8</b>	<b>17 111,25</b>	<b>11 564,16</b>	-	-	<b>8,82</b>

$$\begin{cases} an + b \sum x = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum xy. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13a + 448,5b = 323,8, \\ 448,5a + 17111,25b = 11564,16. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} a + 34,5b = 24,91 \\ - \\ a + 38,15b = 25,78 \\ \hline -3,65b = -0,87 \\ b = 0,239. \end{array}$$

Подставляя значение  $b = 0,239$  в первое уравнение, получаем  $a = 24,91 - (0,239 \cdot 34,5) = 16,669$ .

Уравнение прямой будет иметь вид:  $H' = 16,669 + 0,239D$ .

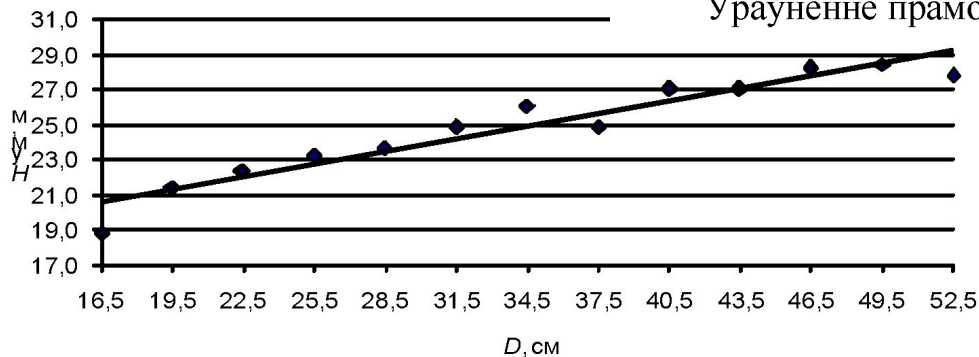


Рис. 6.2. Линейная зависимость между условными средними высотами и средними диаметрами по интервалам статистического ряда



$$m_{1x} = \pm \frac{\sqrt{\sum \Delta^2}}{\sqrt{n-2}} = \pm \sqrt{\frac{8,72}{13-2}} = \pm 0,89 \text{ м.}$$

$$P_y = \frac{m_{1x} \cdot 100}{y''} = \frac{0,89 \cdot 100}{24,5} = 3,6\%.$$

---

Спасибо за внимание!

## Рекомендуемая литература

Атрощенко О.А., Машковский В.П.  
Лесная биометрия.- Мн.: БГТУ, 2010. -  
329 с.

# Рекомендуемая литература

Машковский В.П. Лесная биометрия:  
учебно-методическое пособие  
по одноименной дисциплине  
для студентов специальности 1-75 01 01  
«Лесное хозяйство.  
Мн.: БГТУ, 2005. – 72 с.

## Рекомендуемая литература

Труль О.А. Математическая статистика в лесном хозяйстве.- Мн.: Высшая школа, 1966. - 234 с.

Свалов Н.Н. Вариационная статистика. М.: Лесная промышленность, 1977.- 176 с.

## Рекомендуемая литература

Лакин Г.Ф. Биометрия: Учеб. пособие для биол. спец. вузов - 4-е изд., перераб. и доп.- М.: Высш. шк., 1990.- 352 с.

Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика.- Мн.: Вышэйшая школа, 1973.- 320 с.

## Рекомендуемая литература

Митропольский А.К. Техника статистических вычислений.- М.: Наука, 1971.- 576 с.

Плохинский Н.А. Биометрия.- М.: Издательство московского университета, 1970.- 368 с.

# Рекомендуемая литература

Тюрин А.В. Основы вариационной статистики в применении к лесоводству.

М.: Гослесбумиздат, 1961. - 103 с.

Дворецкий М.Л. Пособие по вариационной статистике  
Изд. 3.- М.: Лесная промышленность,  
1971.- 104 с.