Показникові нерівності

Нерівність називається **<u>показниковою</u>**, якщо їх змінні входять лише до показників степенів при сталих основах.

Розв'язування показникових нерівностей часто зводяться до розв'язування нерівностей $a^x > a^b$ (a^x a^b) або $a^x < a^b$ (a^x a^b).

Ці нерівності розв'язують, використовуючи монотонність (зростання, спадання) показникової функції.

Порівняйте числа *x* і *y*, якщо:

$\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^y$ $a = 4/5,\quad a < 1,$ то $\boldsymbol{x > y}$

$(1{,}5)^x < (1{,}5)^y$ $a = 1{,}5,\quad a > 1,$ то $\boldsymbol{x < y}$

$(0{,}3)^x > (0{,}3)^y$ $a = 0{,}3,\quad a < 1,$ то $\boldsymbol{x < y}$

$\left(\frac{8}{3}\right)^x > \left(\frac{8}{3}\right)^y$ $a = 8/3,\quad a > 1,$ то $\boldsymbol{x > y}$

Розв'язування показникових нерівностей

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

Якщо a >1, тоді

$$f(x) \geq g(x)$$

Якщо 0<a <1, тоді

$$f(x) \leq g(x)$$

знак нерівності змінюється на протилежний

Розв’язати нерівність

$$3^x \geq 27$$

Розв’язання:

Запишемо дану нерівність у вигляді $3^x < 3^3$. Оскільки $3 > 1$, то функція $y = 3^{t}$ є зростаючою.

Отже, при $x < 3$ виконується нерівність $3^x < 3^3$.

Відповідь: $x < 3$.

Розв’язати нерівність

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{16}$$

Запишемо дану нерівність у вигляді

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Оскільки $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — спадна функція, то x <4.

Відповідь: x <4.

① Найпростіші

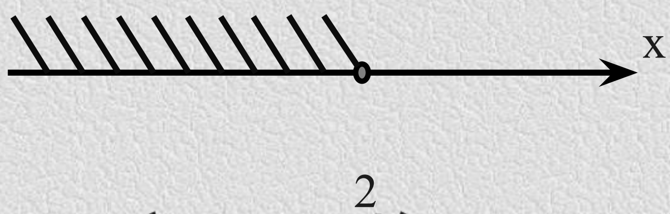
$1. 0{,}5^{x^2+2x+1} > 0{,}5^{x^2-3}$

<u>*Розв'язання*</u>

$$x^2+2x+1 < x^2-3$$

$$2x^2 < -4$$

$$x < -2$$



$x \in (-\infty; -2)$

Відповідь: $(-\infty; -2)$.

$2. \ 2^{2x^2+3x+2} < 2^{x^2}$

<u>*Розв'язання*</u>

$$2x^2+3x+2 < x^2$$

$$x^2+3x+2 < 0$$

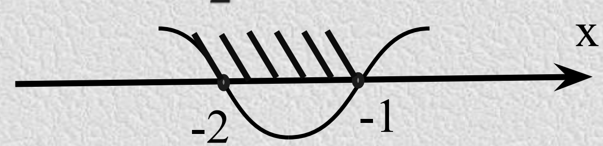
Прирівнюємо до нуля:

$$x^2+3x+2 = 0$$

$$D = 1$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -2$$



$x \in (-2; -1)$

Відповідь: (-2; -1).

② Заміна змінної

$1)\ 2^{2x} - 2^{x+1} - 24 < 0$

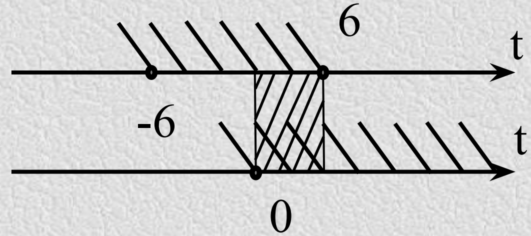
<u>*Розв'язання*</u>

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^{x} - 24 < 0$$

Заміна: $2^{x} = t, t > 0$

$$t^{2} - 2t - 24 < 0$$

$$(t - 6) \cdot (t + 6) < 0$$

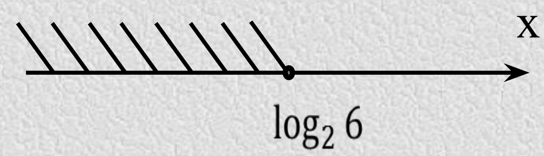


0<*t*<6

Повертаючись до заміни, маємо:

$$0 < 2^{x} < 6$$

$$\begin{cases} x \in R; \\ x < \log_2 6. \end{cases}$$



$x \in (-\infty; \log_2 6)$

Відповідь: $(-\infty; \log_2 6)$.

③ Однорідні нерівності

$$3\cdot 4^x + 9^x\cdot 2 - 5\cdot 6^x < 0$$

<u>*Розв'язання*</u>

$$3\cdot 2^{2x} + 2\cdot 3^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x < 0$$

$$3\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 2\cdot 3^{2x} < 0$$

$$3^{2x} > 0$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 2 < 0$$

Заміна : $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, t > 0$

$$3t^2 - 5t + 2 < 0$$

Прирівнюємо до нуля:

$$3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$t_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$t_2 = 1$$

$$\begin{cases} t > \frac{2}{3}; \\ t < 1; \end{cases}$$

Повертаючись до заміни, маємо:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{2}{3}; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1; \end{cases} \Big| \Rightarrow \begin{cases} x > 1; \\ x < 0; \end{cases}$$

Відповідь:

④ *Окремі типи*

$$2^{x+2} - 2^{x+2} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$$

Розв'язання

$$4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x - \frac{1}{4} \cdot 2^x \leq 9$$

$$2\frac{1}{4} \cdot 2^x \leq 9$$

$$2^x \leq 9 \cdot \frac{4}{9}$$

$$2^x \leq 4$$

$$x \leq 2$$

Відповідь: (-∞; 2).

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{2+x}$$

Розв'язання

$$4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x$$

$$-20 \cdot 2^x > -20 \cdot 5^x$$

$$2^x < 5^x$$

Поділимо ліву і праву частини на 5^x

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x > 0$$

Відповідь: (0; +∞).

5. Графічний спосіб

Розв’язати нерівність $2^x < 3 - x$

Побудуємо графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 3 - x$. Із рисунка видно, що $2^x \le 3 - x$ при $x \le 1$.

Отже, розв'язком нерівності $2^x < 3 - x$ є проміжок (- ; 1].

Відповідь: (- ; 1].