Векторы

План.

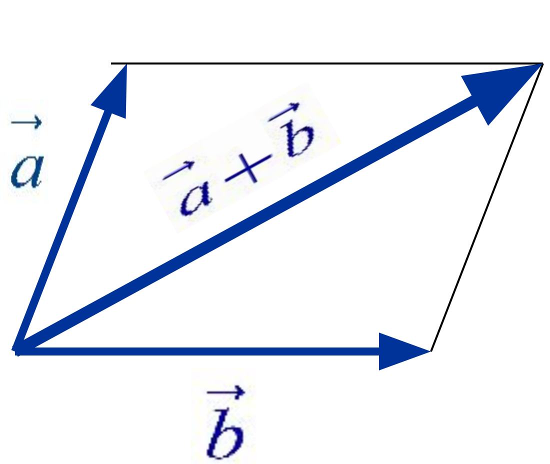
1. *Векторное n – мерное пространство.*
2. *Пространство R^2 и R^3.*
3. *Скалярное произведение векторов. Длина вектора. Угол между векторами.*
4. *Плоскость в трехмерном пространстве.*
5. *Прямая линия в трехмерном пространстве.*
6. *Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис пространства R^n.*

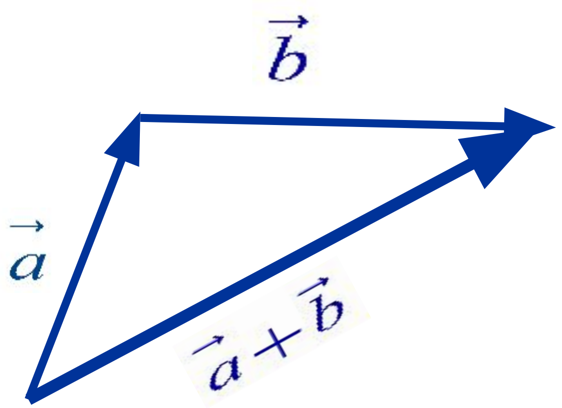
Векторное n – мерное пространство.

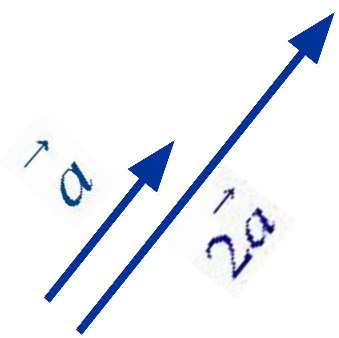
- Определение. *Пусть* n *– любое натуральное число. Упорядоченная совокупность n чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *называется* n *– мерным вектором.*

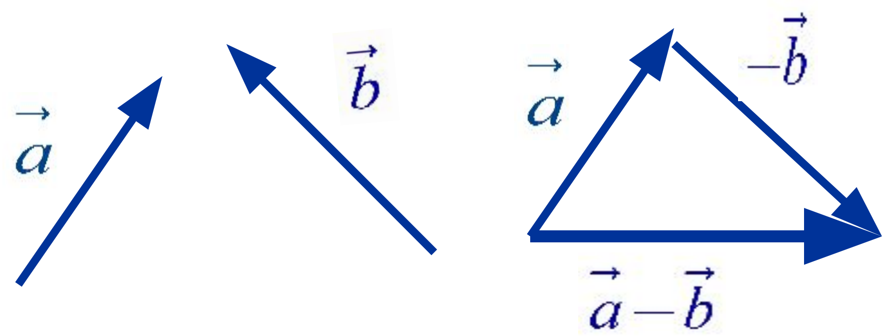
$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \vec{a}(a_i)_n$$

Линейные действия над векторами

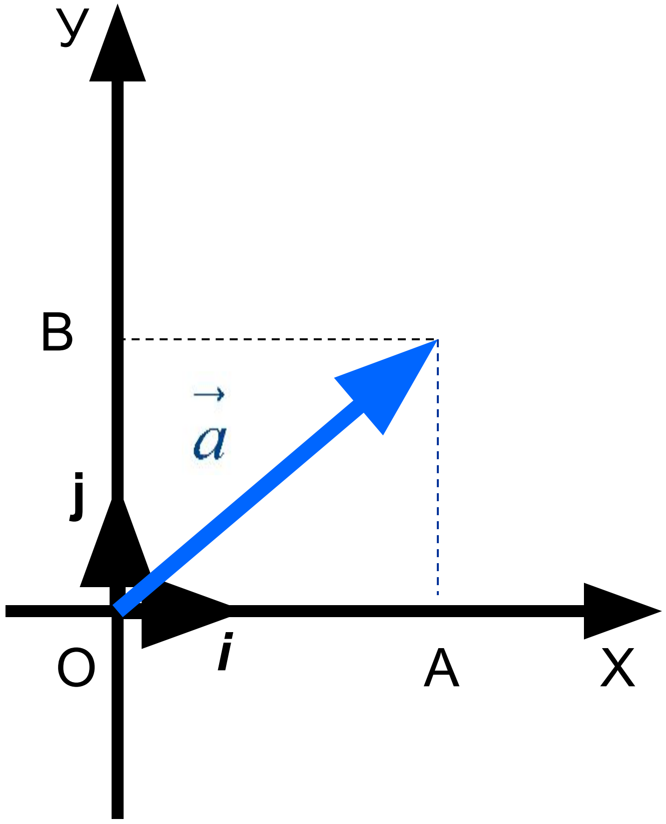








Пространство R^2.

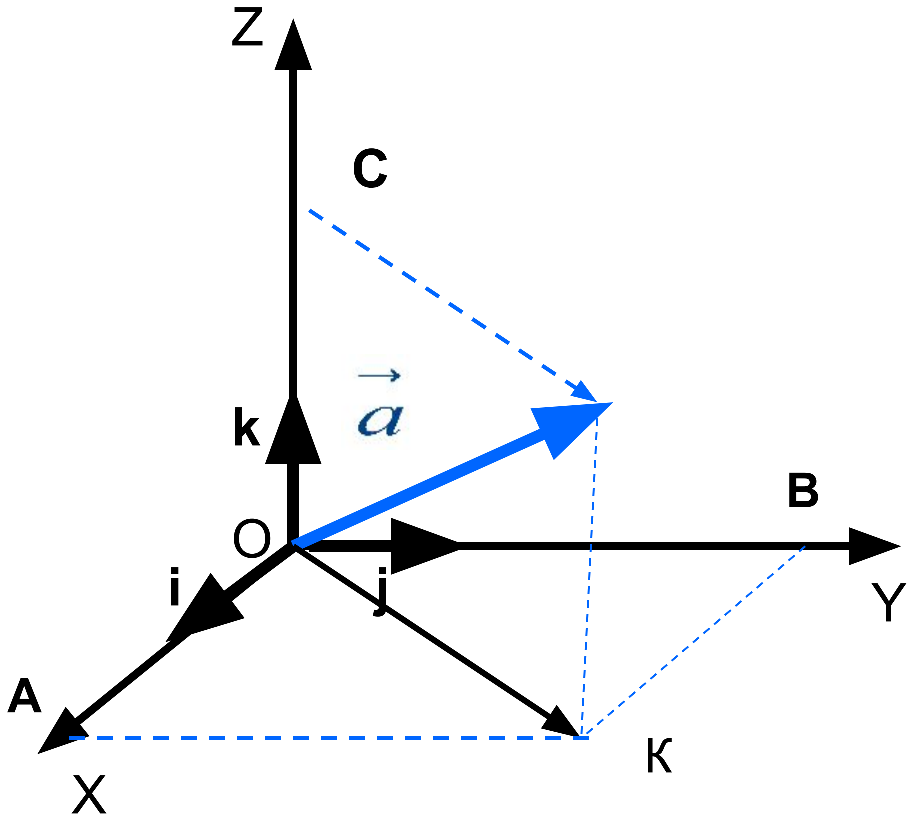


$$\overrightarrow{OA} = xi, \quad \overrightarrow{OB} = yj$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Пространство R^3.



$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|cos\varphi,\quad 0\leq\varphi\leq\pi$$

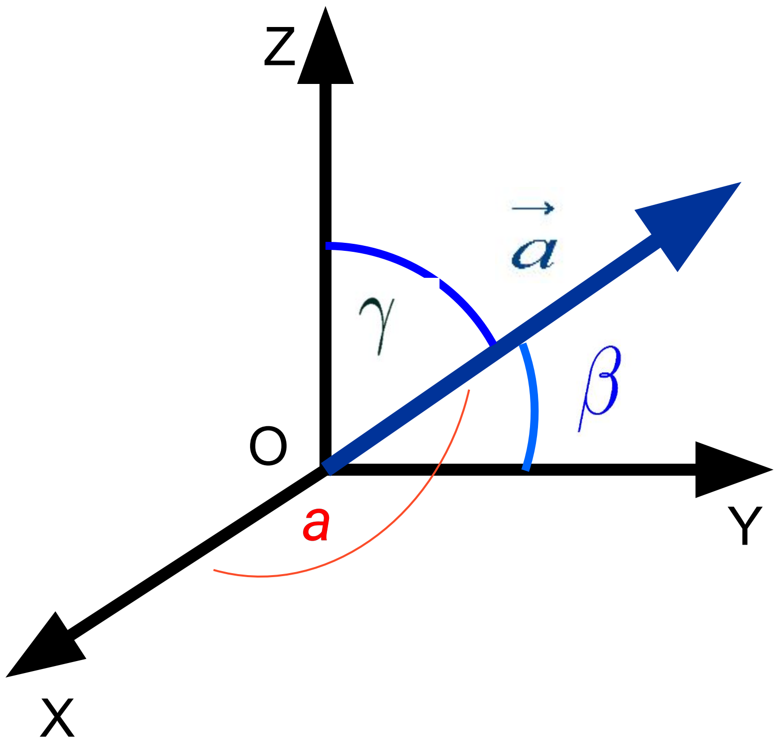
$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

$$\vec{a}=(a_1;a_2,a_3),\quad \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{b_2}+\overrightarrow{a_3}\cdot\overrightarrow{b_3}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

Направляющие косинусы



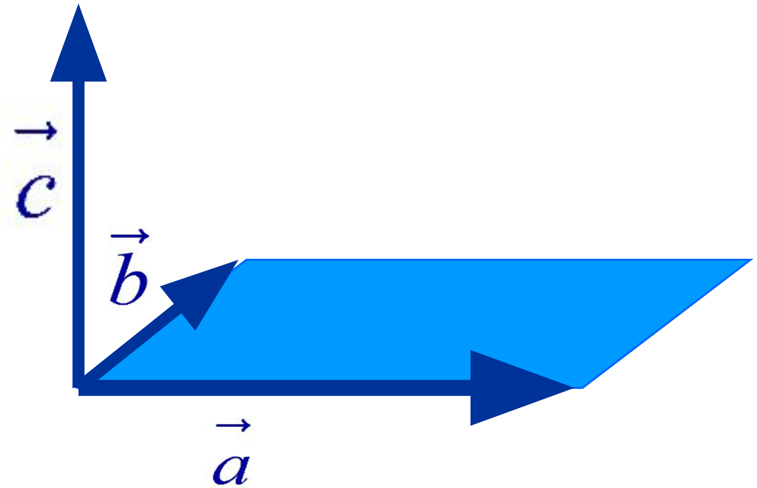
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Векторное произведение векторов

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\sin\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)\right|$$



$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Свойства векторного произведения

1^0 $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=0$ - условие коллинеарности

2^0 $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=-\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$

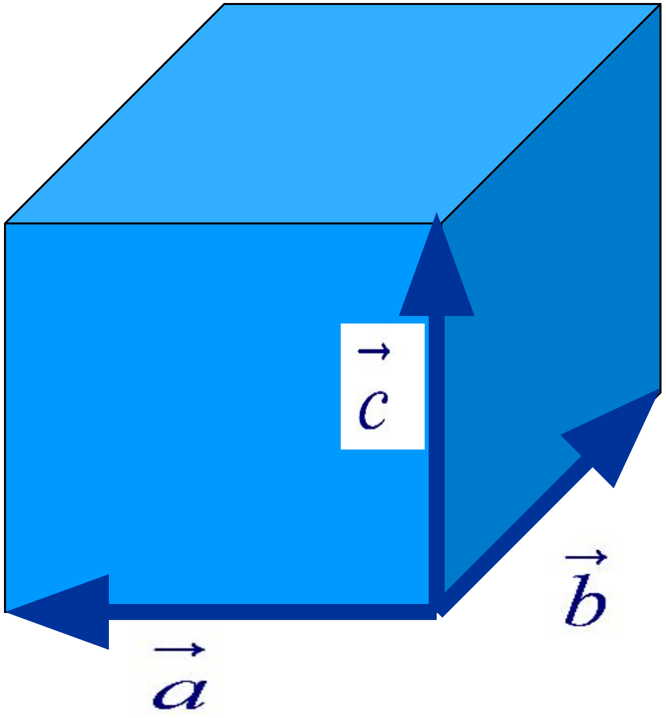
3^0 $m\cdot\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\left[\left(m\vec{a}\right)\vec{b}\right]=\left[\vec{a}\left(m\vec{b}\right)\right]$

4^0 $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\left[\overrightarrow{a'}\,\vec{b}\right]$

5^0 $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\,\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]$

Смешанное произведение векторов

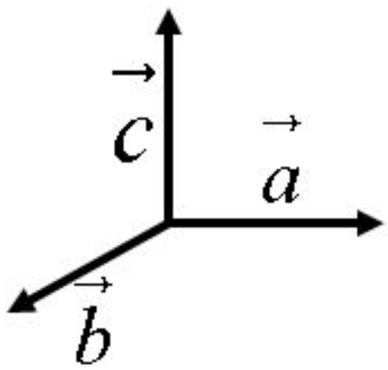
$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

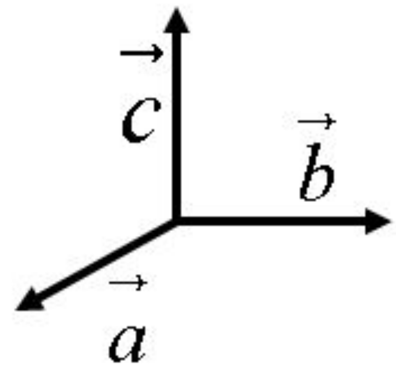


$$V=\left|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right|$$

Свойства смешанного произведения

$1^0 \quad [\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} > 0$ $\qquad\qquad$ $[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} < 0$

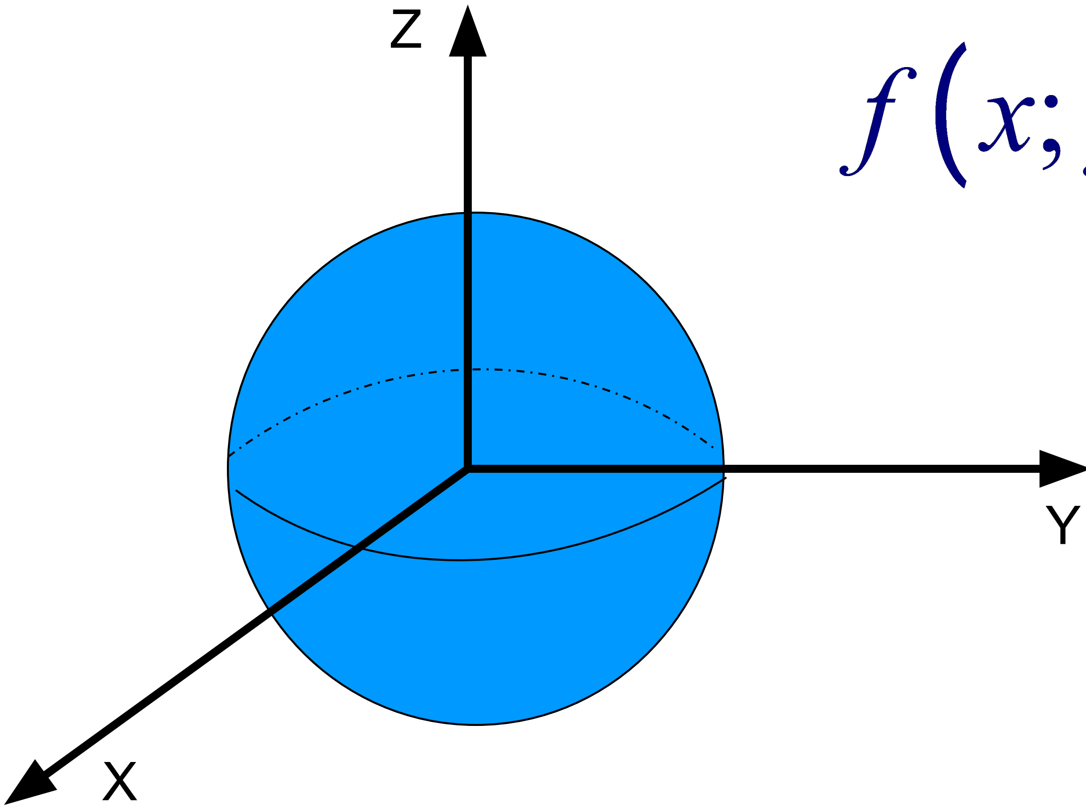




$$2^0 \quad [\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c} = [\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{a} = [\vec{c}\,\vec{a}]\,\vec{b} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$$

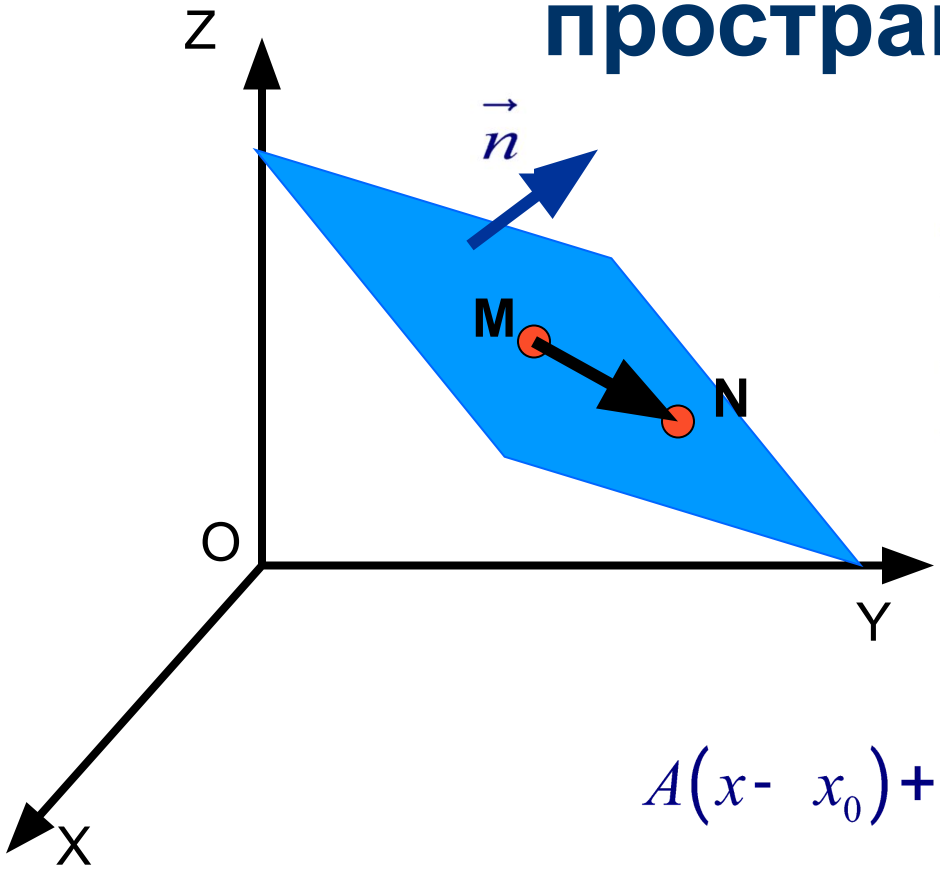
$3^0 \quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$ - условие компланарности

Поверхность в трехмерном пространстве



$$f\left(x; y; z\right) = 0$$

Плоскость в трехмерном пространстве



$$M(x_0; y_0; z_0), \quad N(x; y; z)$$

$$\overrightarrow{MN} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

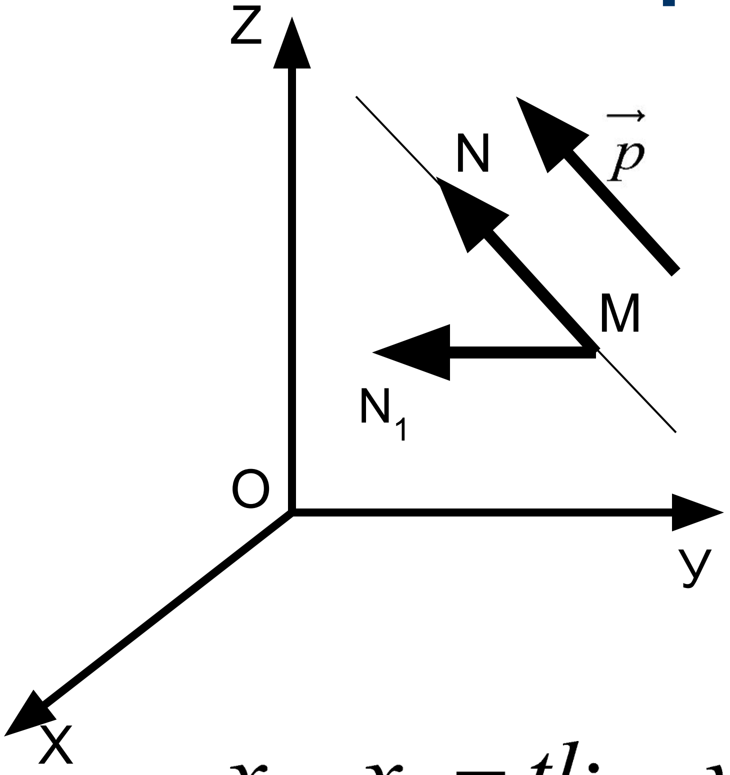
$$\vec{n} = (A; B; C)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Прямая линия в трехмерном пространстве



$$M(x_0;y_0;z_0),\quad N(x;y;z),\quad N_1(x_1;y_1;z_1)$$

$$\vec{p}(l;m;n)$$

$$\overrightarrow{MN}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$$

$$\overrightarrow{MN}=t\vec{p}$$

$$(x-x_0;y-y_0;z-z_0)=(tl;tm;tn)$$

$$x-x_0=tl;\quad y-y_0=tm;\quad z-z_0=tn$$

$$x=x_0+tl,\quad y=y_0+tm,\quad z=z_0+tn$$

Прямая линия в трехмерном пространстве

$$\frac{x - x_0}{l} = t, \quad \frac{y - y_0}{m} = t, \quad \frac{z - z_0}{n} = t,$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Пример 2. Даны координаты точек А(–6; 0; 0), В(–1; 1; 0), С(–3; 5; 4). Требуется: 1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в системе орт и найти модули этих векторов;
2) найти угол между векторам; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$
3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку С перпендикулярного вектору $\overrightarrow{AB}$;

Решение.

1) Координаты векторов $\overline{AB}((x_B - x_A);(y_B - y_A);(z_B - z_A))$

$$\overline{AC}((x_C - x_A);(y_C - y_A);(z_C - z_A))$$

Следовательно, $\overline{AB}(5;1;0)$ и $\overline{AC}(3;5;4)$

Запишу векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в системе орт:

$$\overrightarrow{AB} = 5i + j; \quad \overrightarrow{AC} = 3i + 5j + 4k$$

Найду модули этих векторов по формулам

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$$

Получаем

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(5)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{26}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

2) Найдем угол между векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|}$$

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=5\cdot 3+1\cdot 5+4\cdot 0=20$$

Тогда cos α равен

$$\cos\alpha=\frac{20}{\sqrt{26}\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{52}}{52}=\frac{\sqrt{52}}{13}$$

3) Составим уравнение плоскости, проходящей через точку C (-3;5;4) перпендикулярного вектору $\overrightarrow{AB}$:

По формуле $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Получаем $$5(x+3)+1(y-5)+0(z-4)=0$$

$$5x+15+y-5=0,\quad 5x+y+10=0$$

Контрольные вопросы

1) Метод координат. Расстояние между двумя точками.
2) Деление отрезка в данном отношении.
3) Уравнение прямой линии не плоскости. Угол между прямыми линиями.
4) Кривая второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола.
5) Полярная система координат.
6) Векторное n-мерное пространство.
7) Вектор. Действия над векторами. Свойства. Длина вектора.
8) Скалярное произведение. Свойства.
9) Угол между векторами.
10) Векторное произведение. Свойства.
11) Смешанное произведение . Свойства.
12) Линейная зависимость и линейная независимость векторов.
13) Плоскость в трехмерном пространстве.
14) Прямая линия в трехмерном пространстве.