КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ЭЛЛИПС

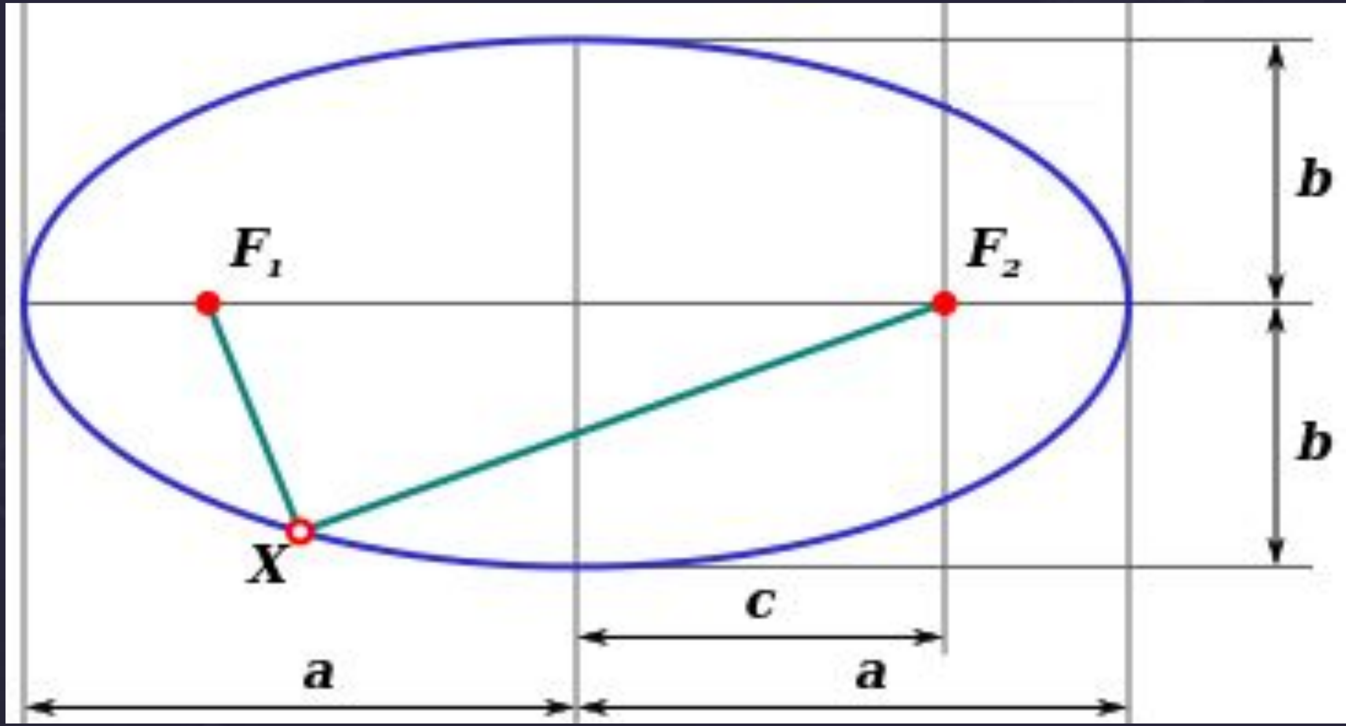
<u>Выполнили работу:</u>
студенты группы **22928/2**
подгруппы **2**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Эллипсом *называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (и большая, чем расстояние между фокусами).*

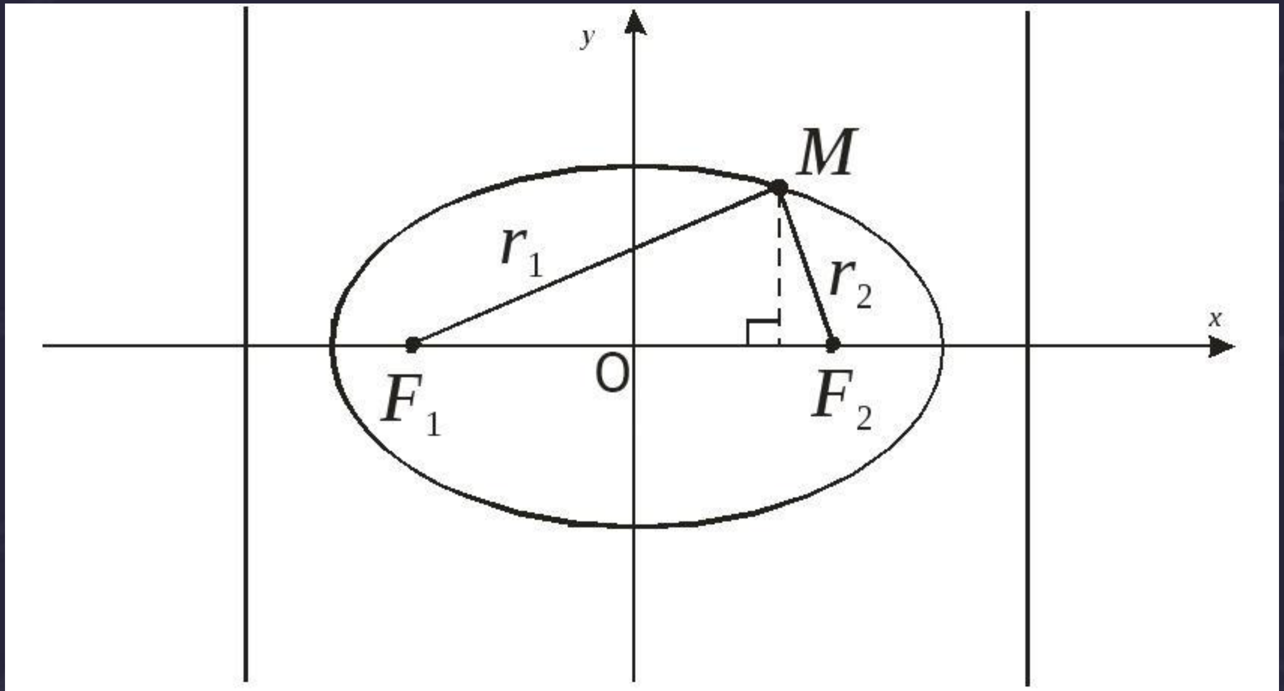
ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЛИПСА

a – большая полуось
b – малая полуось
c – фокальное расстояние (полурасстояние между фокусами)
ε – эксцентриситет эллипса



ВЫВОД КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Дано:
Эллипс
F_1 и **F_2** – фокусы
a – большая полуось
c – половина расстояния между фокусами



Возьмем за ось абсцисс прямую **F_1F_2**, а точку **O** поместим на середине этого отрезка. Пусть **M (x; y)** – произвольная точка плоскости. Пусть **$r_1 = |F_1M|$**, **$r_2 = |F_2M|$**. По определению эллипса точка M принадлежит эллипсу тогда, когда **$r_1 + r_2 = 2a$**. Координаты фокусов равны соответственно **$F_1(-c; 0)$**, **$F_2(c; 0)$**, следовательно

$$\mathbf{r_1} = \sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2},\ \mathbf{r_2} = \sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{c})^2+\mathbf{y}^2}$$

ВЫВОД КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Подставим $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

Полученное уравнение – уравнение эллипса в заданной системе координат.

Преобразуем его к виду $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$\left(a^2-cx\right)=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$; возведем в квадрат еще раз;

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

ВЫВОД КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

$$\mathbf{x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)}$$

Обозначим $\mathbf{b = \sqrt{a^2 - c^2}}$, получим $\mathbf{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}$

После приведения к каноническому виду уравнение эллипса запишется так:

$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, при $\boldsymbol{a > b}$

Если фокусы лежат на оси **Oy**, то каноническое уравнение имеет следующий вид:

$\boldsymbol{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$**, при** $\boldsymbol{a > b}$

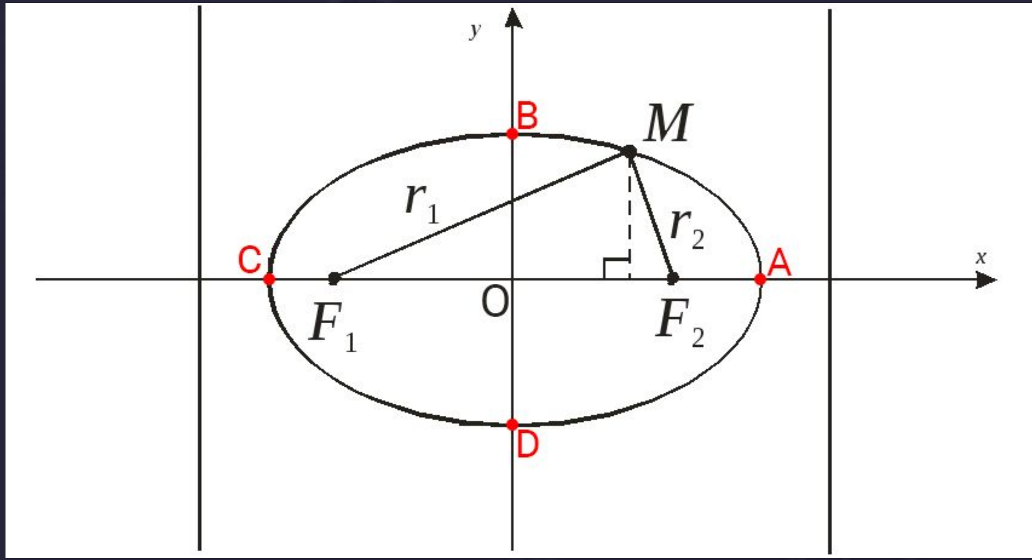
СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 1: эллипс пересекает каждую из осей координат в двух точках.

Доказательство

Для определения точек пересечения эллипса с осью *Ox* нужно решить совместно два уравнения: $y = 0$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Отсюда получим $x = \pm a$. Таким образом, точками пересечения эллипса с осью *Ox* будут точки **A (a; 0)** и **C (-a; 0)**. Аналогично, точки пересечения эллипса с осью *Oy* – **B (0; b)** и **D (0; -b)**.



СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 2: Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равная удвоенной большей полуоси.

Доказательство

Действительно, используя полученные выражения для расстояний от точки эллипса до его фокусов, получим: $\mathbf{F_1M + F_2M = a + \varepsilon x + a - \varepsilon x = 2a}$

СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 3: эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.

Доказательство

В уравнение эллипса переменные x и y входят только во второй степени, поэтому если точка M (x; y) принадлежит эллипсу, то точки M1 (x; -y) и M2 (-x; y) также принадлежат ему, т.к. их координаты удовлетворяют уравнению эллипса. Точка M1 симметрична M относительно оси Ox, а точка M2 – относительно Oy. Таким образом, эллипс имеет две оси симметрии, они взаимно перпендикулярны. Большая и малая полуоси эллипса лежат на его осях симметрии.

СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 4: эллипс имеет центр симметрии.

Доказательство

Если координаты точки M (x; y) удовлетворяют уравнению эллипса, то этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки N (-x; -y). Точка M симметричная точка N относительно начала координат. Таким образом, эллипс имеет центр симметрии.

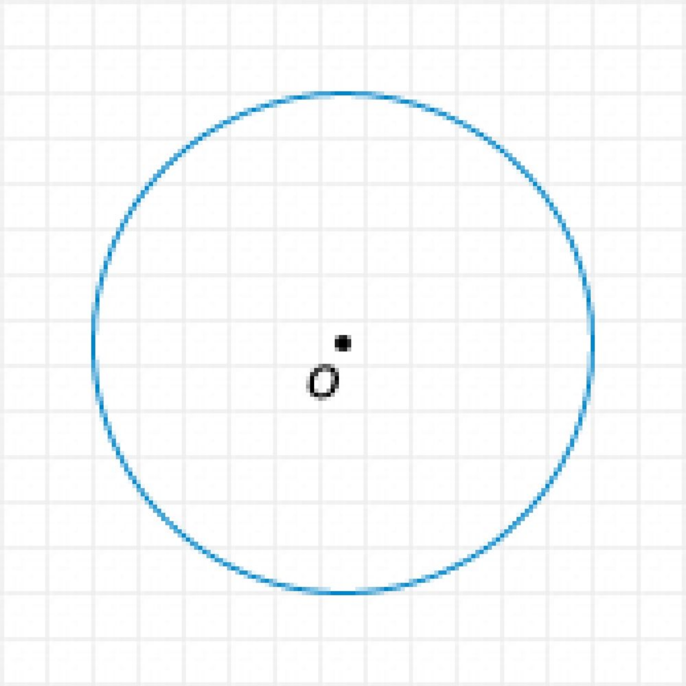
СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

Свойство 5: эллипс может быть получен сжатием окружности.

Доказательство

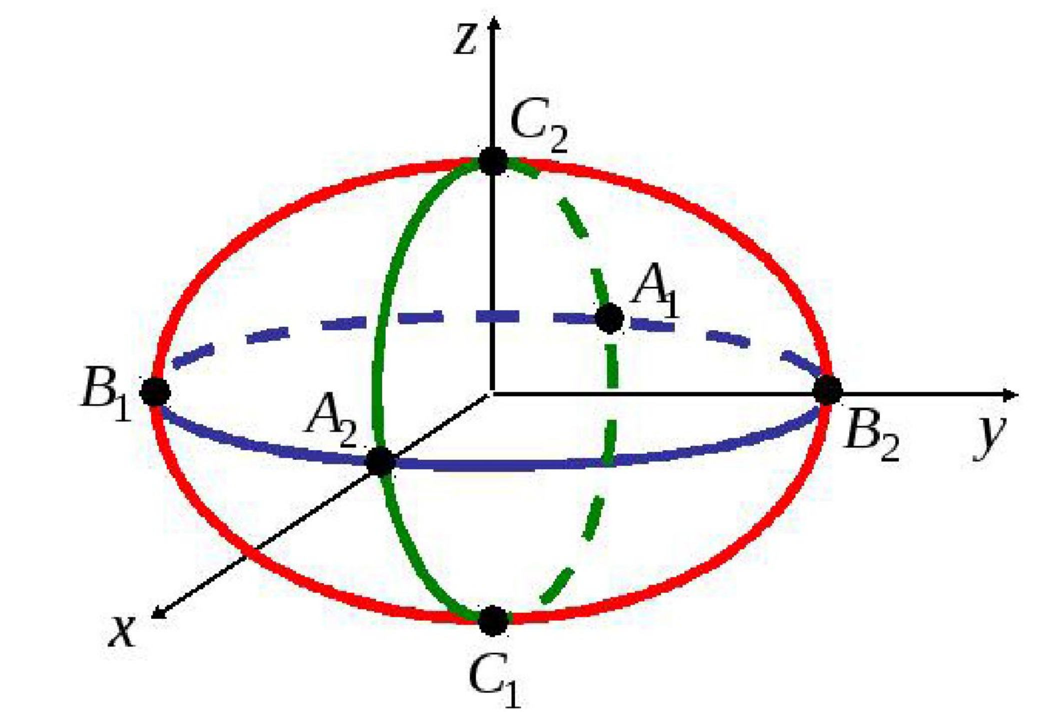
Пусть $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{0}, \boldsymbol{a})$ – окружность с центром в начале координат и радиуса а. Тогда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \mathbf{1}$. Точке ***P (X; Y)*** на окружности сопоставим точку ***P₁ (X; Y)*** такую, что $\chi = X$ и $y = \frac{y}{a} Y$. Точка $\boldsymbol{P_1}$ получается сдвигом точки ***P***, при котором абсцисса не меняется, а ордината уменьшается в отношении $\frac{b}{a}$. Координаты точки $\boldsymbol{P_1}$ удовлетворяют уравнению эллипса. В самом деле, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{(\frac{b}{a}Y)^2}{b^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \mathbf{1}$. Таким образом, эллипс можно получить из окружности равномерным сжатием к оси Ox, при котором координаты точек уменьшаются в одном и том же соотношении, равном $\frac{b}{a}$. Отсюда следует, что форма эллипса зависит от значения соотношения $\frac{b}{a}$: чем меньше это отношение, тем более сжатым будет эллипс и наоборот, чем больше отношение $\frac{b}{a}$, тем эллипс будет менее сжатым.

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЭЛЛИПСА



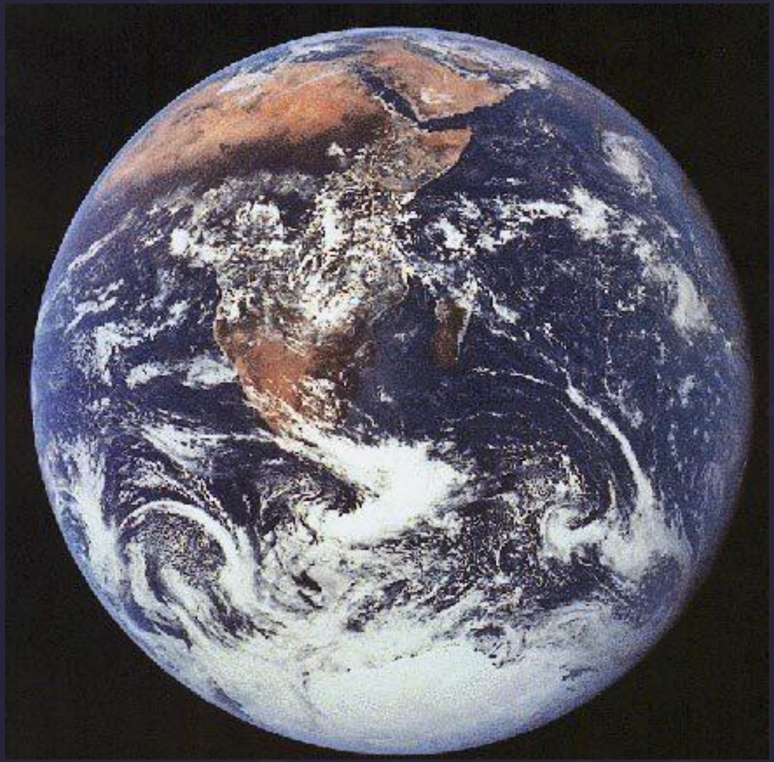
**Окружнос
ть**

ЭЛЛИПСОИД



Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.
Величины ***a***, ***b*** и ***c*** называются полуосями эллипсоида.
Если они все различны, то эллипсоид называется трехостным.
Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения.

ЭЛЛИПС В НАШЕЙ ЖИЗНИ



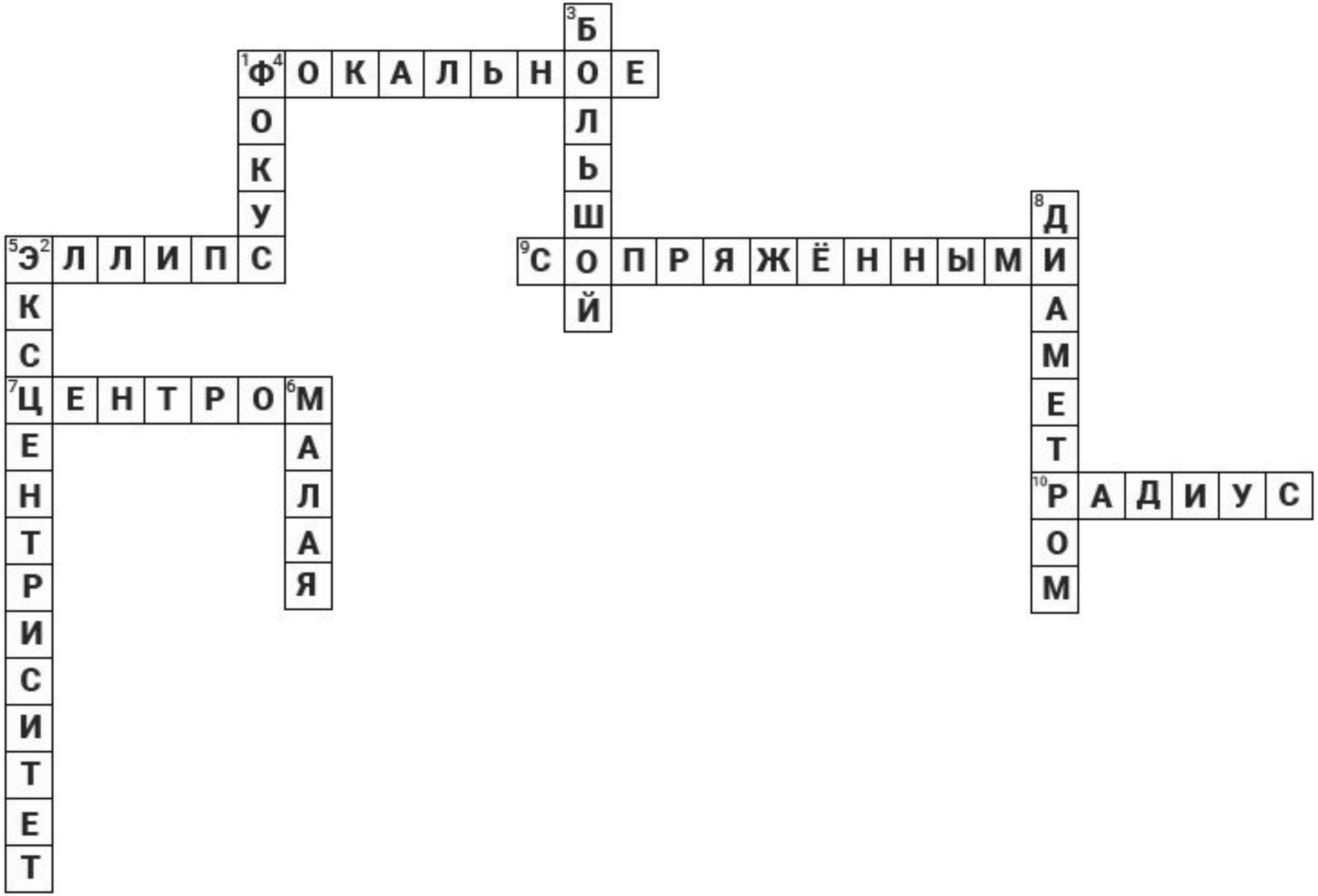
Мяч для игры в американский футбол

**Земл
я**

**Зеркал
о**

РЕШЕНИЕ КРОССВОРДА

ОТВЕТЫ НА КРОССВОРД



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1

Найти эксцентриситет эллипса.

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$$

ЗАДАЧА 2

Составить уравнение эллипса с фокусами на оси Ox, если расстояние между его фокусами равно 12, а эксцентриситет равен $\frac{3}{10}$.

ЗАДАЧА 3

Найти длину перпендикуляра, восстановленного из фокуса эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ к большой оси до пересечения с эллипсом.

ЗАДАЧА 4

Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$, проведённых из точки М (12; -3)