Тригонометрические уравнения

Однородные тригонометрические уравнения

Математика

10 класс

МБОУ СШ №12

Учитель: Шудраков Николай

Однородные тригонометрические уравнения первой степени

- Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют **однородным** тригонометрическим уравнением **первой степени.**
- Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то для решения обе части уравнения разделим на $\cos x$, и получим:

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

$$x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n$$

Пример 1.

- Решите уравнение:

$$2\sin x - 3\cos x = 0$$

Пример 1. Решение

$$2\sin x - 3\cos x = 0$$

Разделим обе части на $\cos x$

Получим:

$$2\,tg\,x - 3 = 0$$

$$tg\,x = \frac{3}{2}$$

$$x = \mathrm{arcctg}\frac{3}{2} + \pi n$$

Ответ: $x = \mathrm{arcctg}\frac{3}{2} + \pi n$, $n \in Z$

Пример 2.

- Решите уравнение:

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Пример 2. Решение

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

По формулам приведения преобразуем обе части уравнения:

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos 2x$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$$

Получим $\cos 2x = \sin 2x$

$$\sin 2x - \cos 2x = 0$$

Пример 2. Решение

$$\sin 2x - \cos 2x = 0$$

Разделим обе части на $\cos 2x$

$$\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = \operatorname{arcctg} 1 + \pi n$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$

Однородные тригонометрические уравнения второй степени

- Уравнение вида

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

называют **однородным** тригонометрическим уравнением **второй степени.**

Алгоритм решения уравнения

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

- Если $a \neq 0, c \neq 0$, *то:*
- *1.* Уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = tg\, x$

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a\, tg^2 x + b\, tg\, x + c = 0$$

$$a z^2 + b z + c = 0$$

Алгоритм решения уравнения

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

- ***Если а=0 (или с=0), то:***
- *2.* Уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносим ***cos x*** (или ***sin x)***

$$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

$$\cos x(b \sin x + c \cos x) = 0$$

- ***Решаем два уравнения:***

$\cos x = 0$ *и* $b \sin x + c \cos x = 0$

Пример 3.

- Решите уравнение:

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$$

Пример 3. Решение

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$, получим:

$$tg^2 x + 3\, tg\, x + 2 = 0$$

Введем новую переменную ***z=tg x:***

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

Решив квадратное уравнение получим:

$z_1 = 1$, $z_2 = 2$

Пример 3. Решение

Значит $tg\,x = 1$, $tg\,x = 2$

Из первого уравнения получаем:

$x = \text{arcctg}\,1 + \pi n$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Из второго уравнения находим:

$x = \text{arcctg}\,2 + \pi n$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \text{arcctg}\,2 + \pi n$, $n \in Z$

Пример 4.

- Решите уравнение:

$$\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$$

Пример 4. Решение

$$\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$$

Выносим за скобку $\cos x$:

$$\cos x(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=0$$

Решаем два уравнения:

$\cos x=0$ и $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$

из первого уравнения находим

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

Пример 4. Решение

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

Делим обе части на $\cos x$:

$$\sqrt{3}\,tg\,x + 1 = 0$$

$$tg\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n$$

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

Пример 5.

- Решите уравнение:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2$$

Пример 5. Решение

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2$$

Обратим внимание на то, что уравнение в правой части содержится не 0, а 2. Значит это не однородное уравнение.

Преобразуем по основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$$

$$2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x = 2$$

Пример 5. Решение

Подставив в изначальное уравнение полученное выражение получим:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x$$

Приведем к виду однородного тригонометрического уравнения второй степени:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x - 2\sin^2 3x - 2\cos^2 3x = 0$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$$

Пример 5. Решение

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$$

Разделим обе части почленно на $\cos^2 3x$:

$$tg^2 3x - 2\sqrt{3}\,tg\,3x + 3 = 0$$

Введем новую переменную $z = tg\,3x$:

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0$$

Решив квадратное уравнение, получим:

$$z = \sqrt{3}$$

$$tg\,3x = \sqrt{3}$$

Пример 5. Решение

$$tg\,3x = \sqrt{3}$$

Итак, $3x = \text{arcctg}\sqrt{3} + \pi n$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$